МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Электронное учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2017

УДК 531/534(07)
ББК ж 12я7
Б 37

Авторы: **П. И. Бегун, Е. А. Лебедева, Д. А. Лобачева**

Задачи прикладной механики: электронное учеб. пособие. СПб.:
Изд-во СПБГЭТУ «ЛЭТИ», 2017. 86 с.

ISBN978-5-7629-1688-2

Содержит два раздела и приложение: первый раздел с условиями задач и второй с их решениями. Задачи скомпонованы по следующим темам: 1. Основные понятия прикладной механики; 2. Закрепление стержней. Опорные реакции; 3. Определение внутренних усилий в стержнях; 4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела; 5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней; 6. Расчет перемещений; 7. Определение динамических параметров при ударе. Приложение содержит основные понятия по прикладной механике

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлениям 12.03.04, 12.03.01, 20.03.01.

УДК 531/534(07)
ББК ж 12я7
Б 37

Рецензенты: кафедра 24 СПбГУАП; д-р пед. наук, проф. А. В. Самсонова (НГУ им. П. Ф. Лесгафта, СПб).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN978-5-7629-1688-2 ©СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит два раздела: первый раздел с условиями задач и второй с их решениями. Задачи скомпонованы по следующим темам: 1. Основные понятия прикладной механики; 2. Закрепление стержней. Опорные реакции; 3. Определение внутренних усилий в стержнях; 4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела; 5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней; 6. Расчет перемещений; 7. Определение динамических параметров при ударе.

Задачи построены так, чтобы при незначительной затрате времени при понимании материала темы, дать правильный ответ на поставленную задачу.

Задачи могут быть использованы при экспресс опросе студентов для выяснения степени усвоения материала. Приведенные решения задач дают возможность студенту проконтролировать свои умения в реализации полученных знаний при самостоятельной работе.

ЗАДАЧИ

1. Основные понятия прикладной механики

1.1. Какие возможности при решении задач механики дают три принципа: 1) принцип относительной жесткости; 2) принцип суперпозиции; 3) принцип Сен-Венана?

1.2. Какие возможности при решении задач дает введение допущений сплошности, однородности и изотропности материала конструкций?

1.3. На какие составляющие раскладываются приведенные к центру тяжести сечения главный вектор внутренних сил и вектор главного момента внутренних сил. Как их называют?

1.4. Какие правила знаков вводят для составляющих главного вектора внутренних сил?

1.5. Какие правила знаков вводят для составляющих вектора главного момента внутренних сил?

1.6. На рис. 1 показан элементарный прямоугольный параллелепипед и касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} на его гранях. Допускаем, что нижняя грань

параллелепипеда жестко закреплена. Указать углы сдвига и перемещения точек.

1.7. На рис. 2 приведена диаграмма, полученная при растяжении образца из пластичного материала. Допустим, что аналогичный образец нагрузили до величины, соответствующей точке *D* и стали разгружать. м

Как определить: 1) величины упругой и пластической деформации; 2) изменятся ли механические характеристики образца?

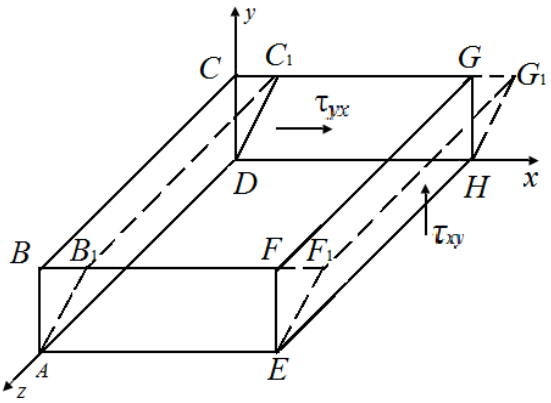


Рис. 1. Деформированный параллелепипед

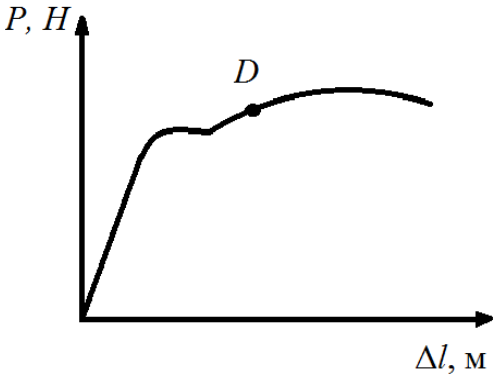


Рис. 2. Диаграмма растяжения образца из пластичного материала

1.8 Какая разница между силовыми факторами P, M и внутренними силовыми факторами Q_z и M_y (рис. 3)?

1.9. Опорные реакции (рис. 4) являются внутренними или внешними силами?

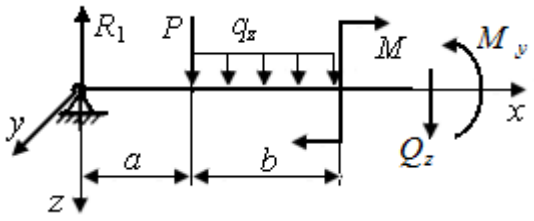


Рис. 3. Силовые факторы в сечении нагруженного стержня

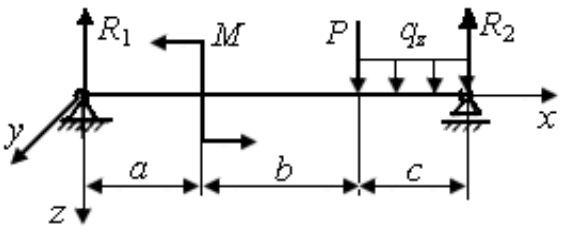


Рис. 4. Нагруженный стержень

1.10. Какие зависимости раскрывают условия статического равновесия?

1.11. Достаточно ли условий статического равновесия для определения опорных реакций в стержне, приведенном на рис. 5, *а, б*?

1.12. Как следует закрепить стержень (рис. 6), чтобы: 1) сечение, проходящее через точку *A* не могло перемещаться вдоль осей *x* и *z* и поворачиваться вокруг оси *y*; 2) сечения, проходящие через точки *A* и *B* не

могли перемещаться вдоль осей *x* и *z* и поворачиваться в плоскости *xOz*; 3) сечения, проходящее через точку *A* не могло перемещаться вдоль осей *x* и *z*, а сечение, проходящее через точку *B* - вдоль оси *z*?

а *б*

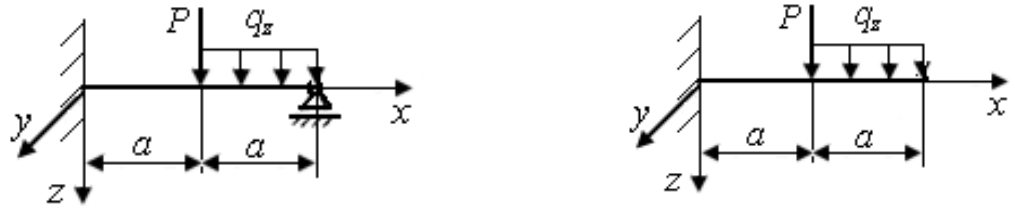


Рис. 5. Нагруженный стержень

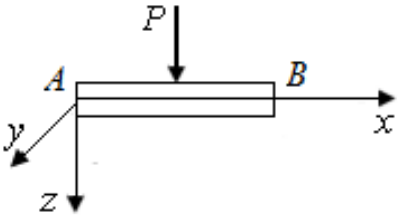


Рис. 6. Незафиксированный стержень

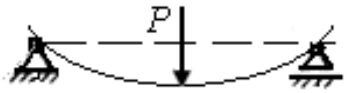


Рис. 7. Стержень нагруженный в плоскости xOz

1.13. Каким свойством обладает материал стержня (Рис. 7), если после снятия нагрузки: 1) полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры; 2) частично восстанавливает свою первоначальную форму и размеры; 3) сохраняет ту форму, которую получил при нагружении?

2. Закрепление стержней. Опорные реакции

2.1. Какие опорные реакции возникают в стержнях, нагруженных в соответствии с рис. 8 и 9. Определить величины этих опорных реакций в

а *б*

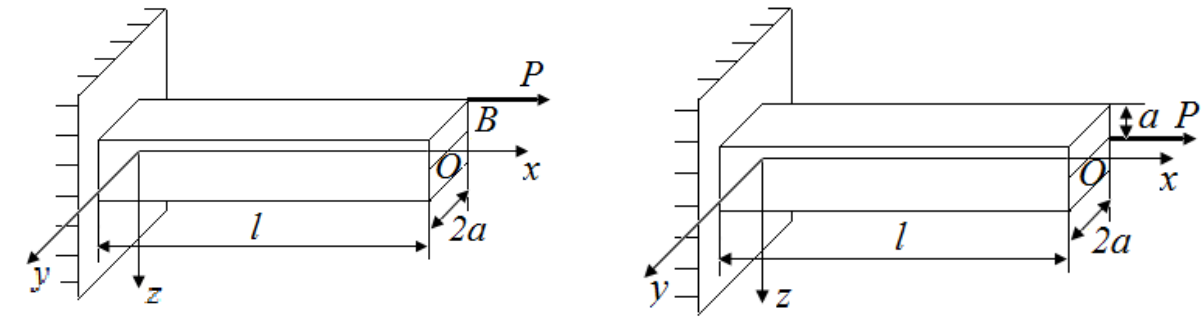
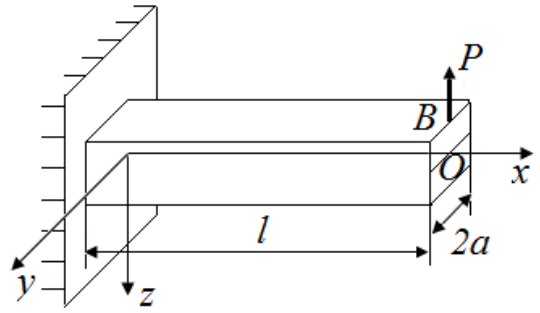


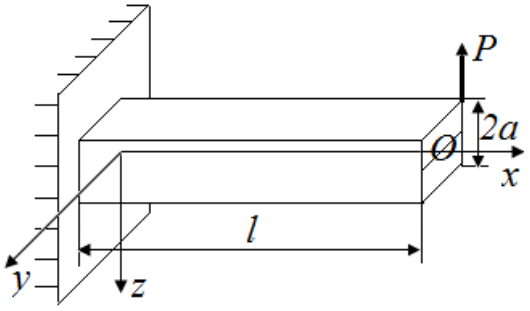
Рис. 8. Схемы стержней, нагруженных вдоль оси *x* и закрепленных по левому контуру

стержне длиной *l* квадратного поперечного сечения со стороной 2*a*.

а



б



в

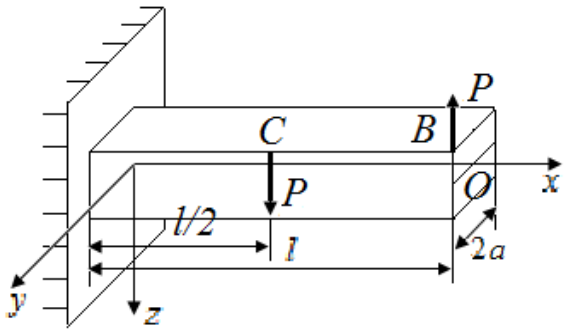
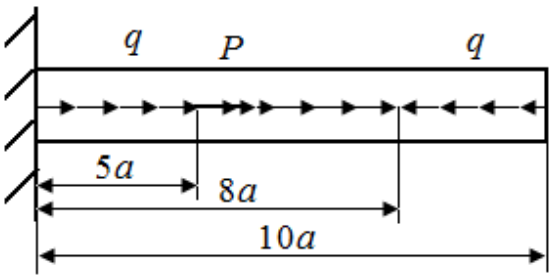


Рис. 9. Схемы стержней, нагруженных вдоль оси *z* и закрепленных по левому контуру

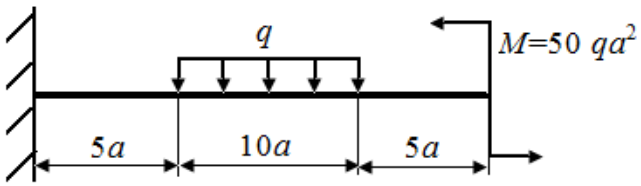
3. Определение внутренних усилий в стержнях

3.1 Определить внутренние силовые факторы и построить эпюры внутренних силовых факторов в стержнях, нагруженных в соответствии с рис. 10.

а



б



в

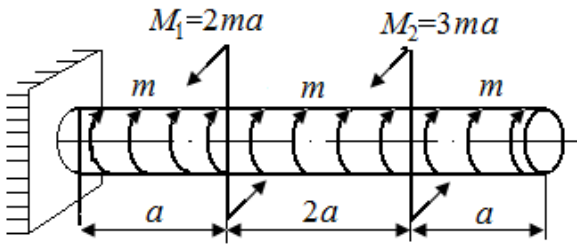


Рис. 10. Схемы стержней, испытывающих растяжение сжатие (*а*), плоский поперечный изгиб (*б*) и кручение (*в*)

4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела

4.1. Корни кубического уравнения $\sigma^3 - \Theta_I\sigma^2 + \Theta_{II}\sigma - \Theta_{III} = 0$ определяют нормальные напряжения, действующие на главных площадках. Почему оно инвариантно (безразлично) к изменению системы координат?

4.2. Как и почему так называют коэффициенты $\Theta_I, \Theta_{II}, \Theta_{III}$ кубического уравнения?

4.3. Для плоского элемента, выделенного в твердом теле, заданы напряжения в соответствии с рис. 11. Определить: а) значения напряжений на площадке, нормаль к которой повернута на угол $30°$ к горизонтальной оси; б) значения напряжений на площадке, нормаль к которой повернута на угол $-30°$ к горизонтальной оси; в) значения главных напряжений; г) положения главных площадок.

4.4. Для плоского элемента, выделенного в твердом теле, заданы напряжения в соответствии с рис. 12. Определить значения напряжений: а) на площадке, нормаль к которой повернута на угол $60°$ к горизонтальной оси; б) на площадке, нормаль к которой повернута на угол $-60°$ к горизонтальной оси.

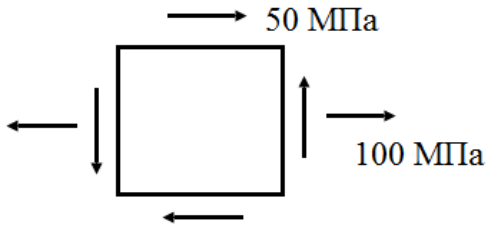


Рис. 11. Схема плоского элемента, выделенного в твердом теле

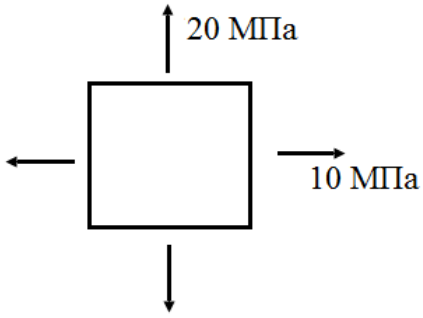


Рис. 12. Схема плоского элемента, выделенного в твердом теле

4.5. На гранях элементарного параллелепипеда в форме кубика, вырезанного из деформированного тела, действуют напряжения в соответствии с рис. 13 (*а* - *в*).

Определить главные напряжения и характер напряженного состояния: объемное, плоское или линейное?

4.6. Стержень на рис. 14 испытывает плоский поперечный изгиб. Определить главные напряжения и напряженное состояние в окрестности точек *A, B, C*.

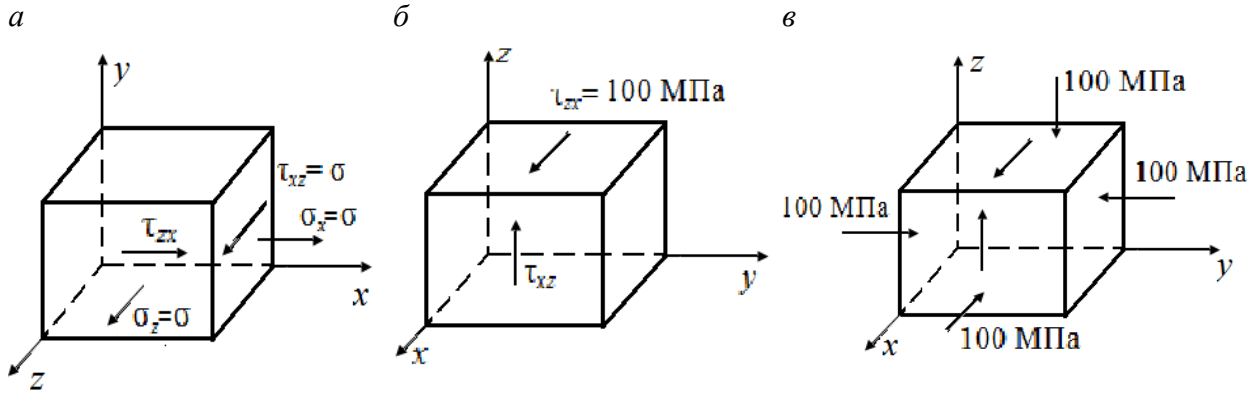


Рис. 13. Схемы элементарных параллелепипедов, вырезанных из деформированного тела

4.7. Стержень на рис. 15 испытывает кручение. Определить главные напряжения и напряженное состояние в окрестности точек *A, C*.

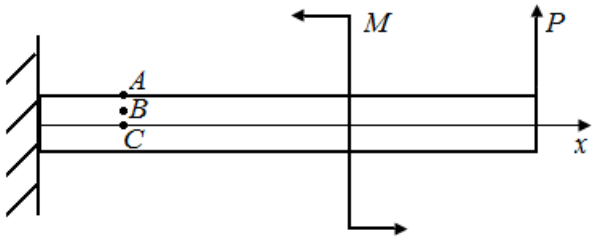


Рис. 14. Схема стержня, испытывающего плоский поперечный изгиб

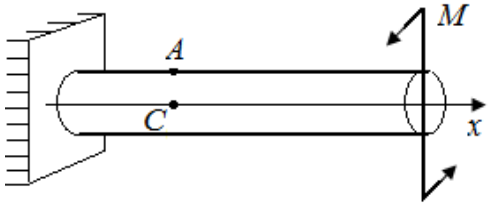


Рис. 15. Схема стержня, испытывающего кручение

4.8. На гранях элементарного параллелепипеда в форме кубика, вырезанного из деформированного тела, действуют напряжения в соответствии с рис. 16.

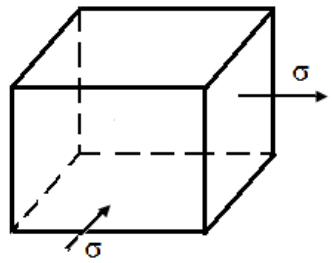


Рис. 16. Схема элементарного параллелепипеда, вырезанного из деформированного тела

Определить значение эквивалентного напряжения по критерию удельной потенциальной энергии формообразования (четвертая теория прочности).

4.9. На рис. 17 приведены элементарные параллелепипеды в форме кубиков, вырезанные в окрестности точек деформированных тел. На гранях кубиков заданы напряжения в соответствии с рис. 17. Определить в каком кубике напряженное состояние самое неблагоприятное: а) по четвертой теории прочности, б) по теории наибольших касательных напряжений.

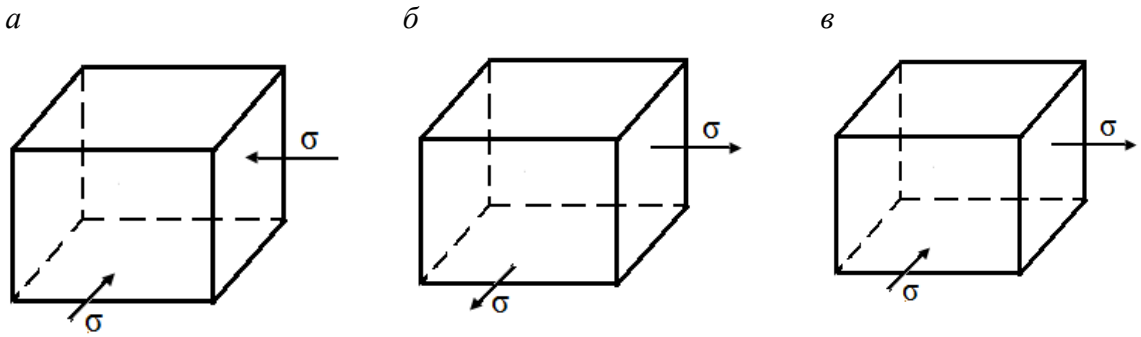


Рис. 17. Схемы элементарных параллелепипедов, вырезанных из деформированного тела

4.10. На рис. 18 приведены схемы элементарных параллелепипедов в

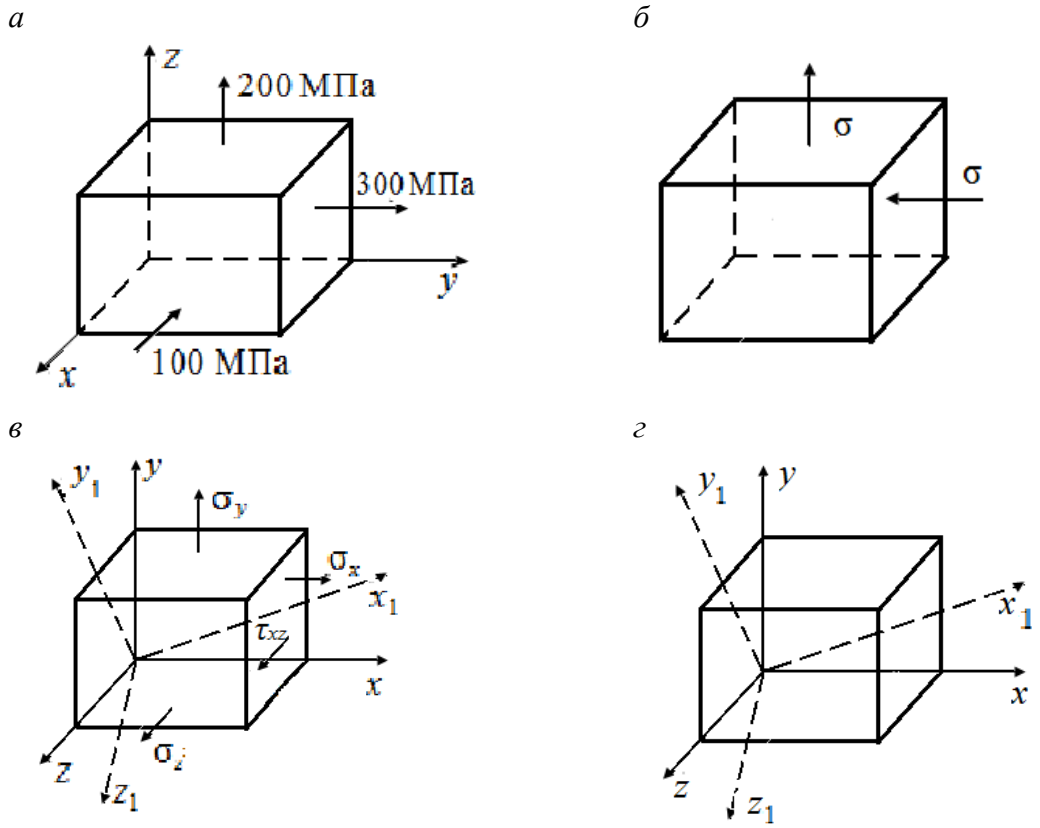


Рис. 18. Схемы элементарных параллелепипедов, вырезанных в окрестности точки деформированного тела

форме кубиков, вырезанных в окрестностях точек деформированного тела. На гранях кубиков заданы напряжения.

Для рис 18, *а* определить по теории наибольших касательных напряжений разрушится тело или нет при таком напряженном состоянии. Допускаемое напряжение материала [σ] = 250 МПа.

4.11. На рис. 18, *б* известны значения нормального напряжения σ, модуля нормальной упругости E и коэффициента Пуассона ν. Определить главные линейные деформации.

4.12. На рис. 18, *в* на гранях кубика в системе координат x, y, z заданы напряжения σ_x = 200 МПа, σ_y = 100 МПа, σ_z = 400 МПа, τ_{xz} = 50 МПа. В повернутой относительно системы координат x, y, z системе $x_1, y_1, z_1 \sigma_{x1}$ = = 150 МПа, σ_{y1} = 200 МПа, τ_{x1z1} = 50 МПа. Определить значение σ_{z1}.

4.13. На рис. 18, *г* грани ориентированы по нормали к осям системы координат x, y, z. Относительные удлинения в окрестности точки равны ε_x = = 0,005, ε_y = 0,012, ε_z = 0,013. Известны относительные удлинения ε_{x1} = 0,005, ε_{y1} = 0,012 для другой пространственной ориентации x_1, y_1, z_1. Определить значение линейной деформации ε_{z1}.

а *б*

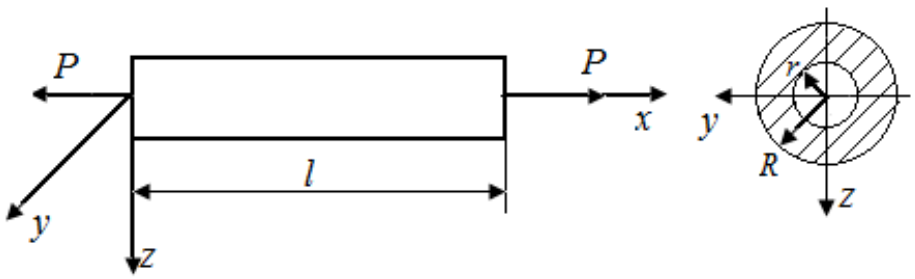


Рис. 19. Схема стержня испытывающего растяжение

4.14. Определить изменение радиуса r после деформации стержня, представленного на рис. 19, *а*.

Заданы: сила P, длина l, радиусы поперечного сечения r и $R = 2$, модуль нормальной упругости стержня E и коэффициент Пуассона ν (рис. 19).

4.15. В стержне круглого поперечного сечения радиуса r = 2 см и длиной l = 20 см, после растяжения длина увеличивается на 0,04 см, а радиус уменьшается на 0,0016 см. Определить коэффициент Пуассона материала стержня.

5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней

5.1. На рис. 20 (*а* - *в*) заданы стержни, нагруженные осевыми силами. На каких участках стержней возникают максимальные нормальные напряжения?

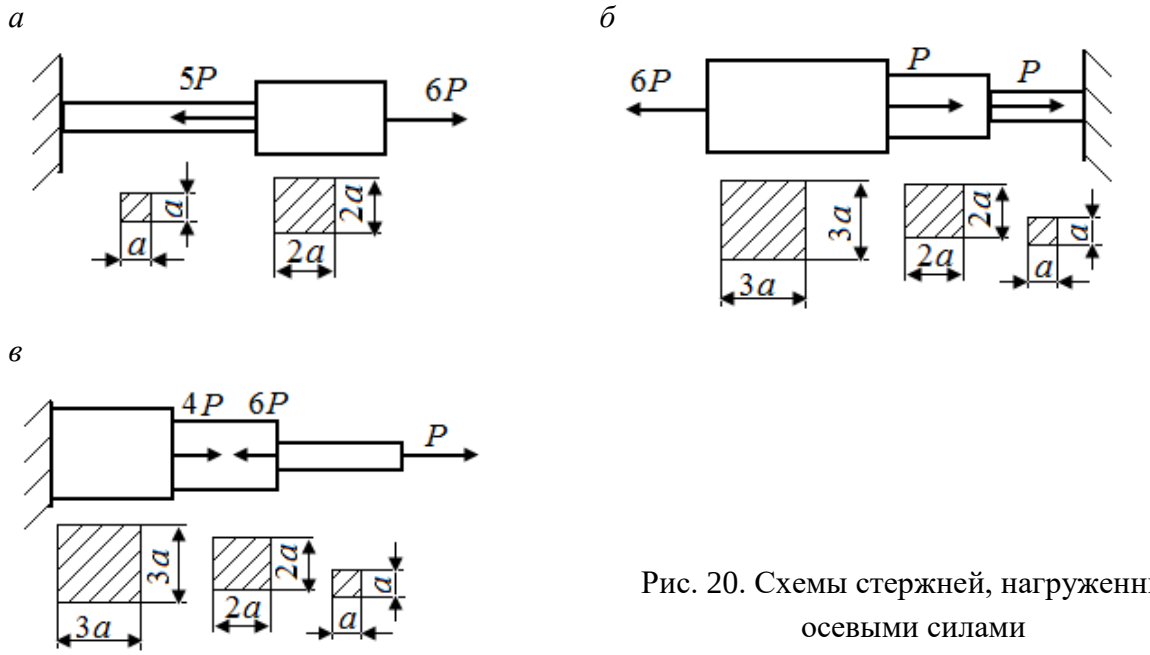


Рис. 20. Схемы стержней, нагруженных осевыми силами

5.2. Определить опасное сечение и величину экстремального значения напряжения в стержнях круглого поперечного сечения радиуса r, нагруженных в соответствии с рис. 21, *а – г*.

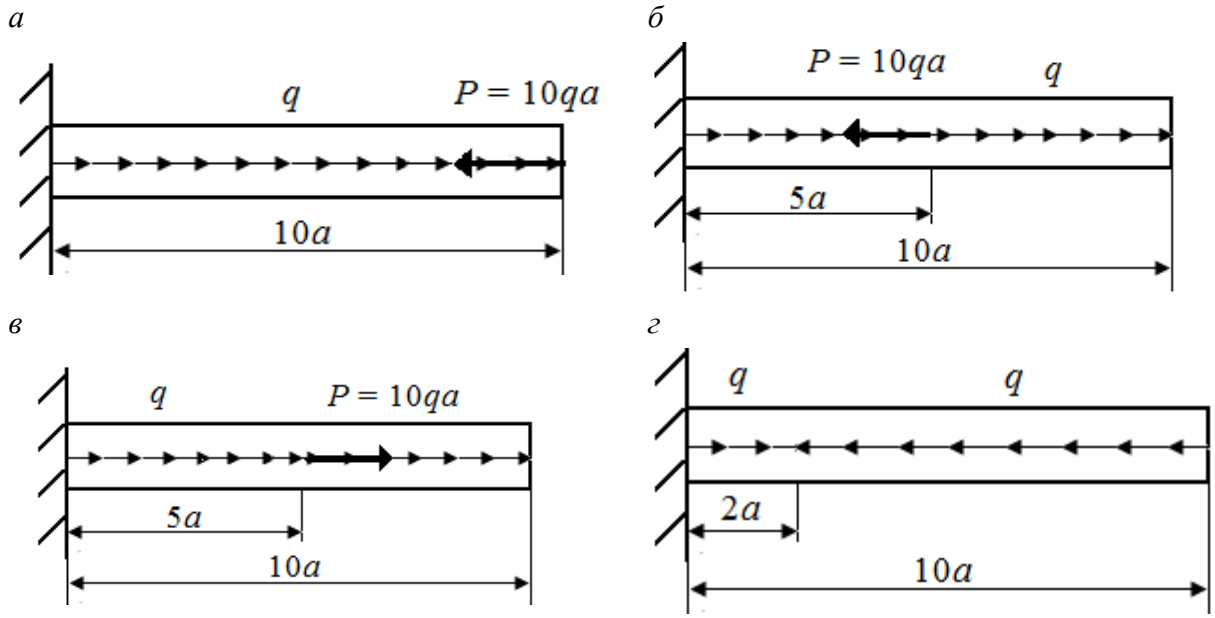


Рис. 21. Схемы стержней круглого поперечного сечения

5.3. Определить величины экстремальных значений напряжений в стержнях нагруженных в соответствии с рис. 22, *а* - *г*. На рис. 22, *а, б* стержни круглого поперечного сечения радиуса r.

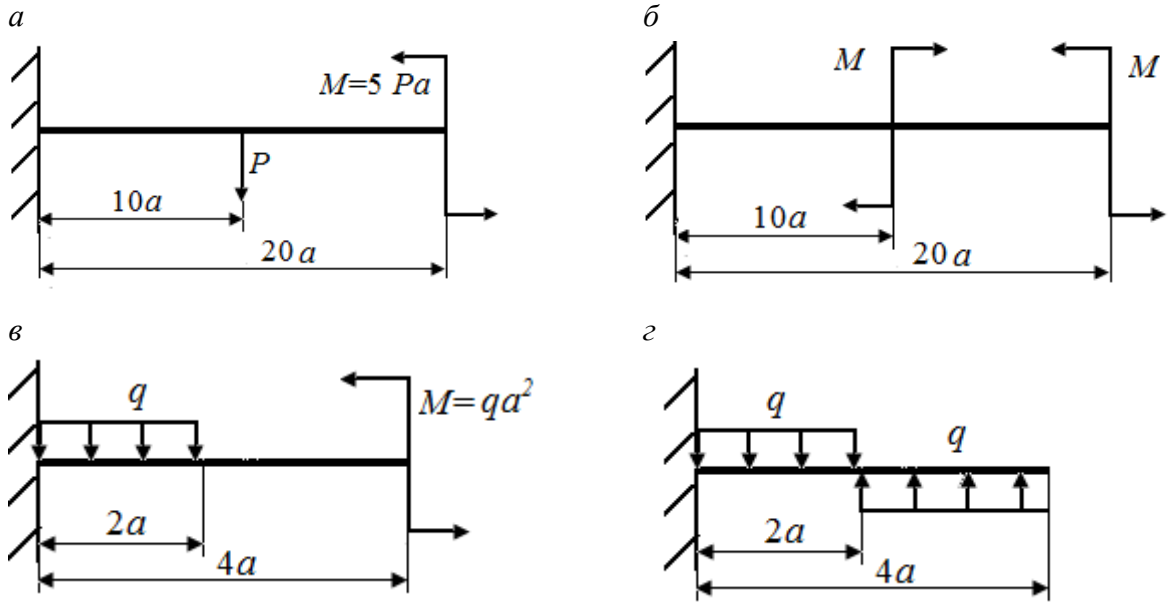


Рис. 22. Схемы стержней, испытывающих плоский поперечный изгиб

На рис. 22, *в, г* стержни прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b.

5.4. В стержнях круглого поперечного сечения радиуса r, нагруженных в соответствии с рис. 23, *а – г*, определить опасное сечение и величину экстремального значения напряжения.

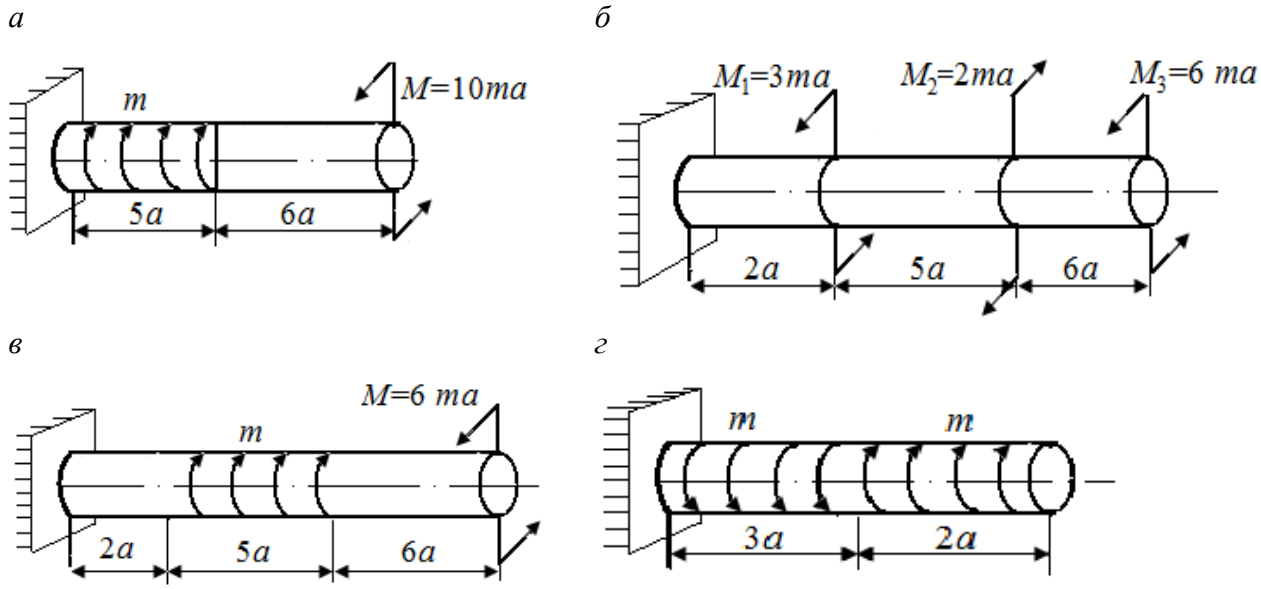


Рис. 23. Схемы стержней, испытывающих кручение

6. Расчет перемещений

6.1. Как изменятся величины перемещений точек С в стержнях, представленных на рис. 24, *а – г*, если их длину увеличить в два раза?

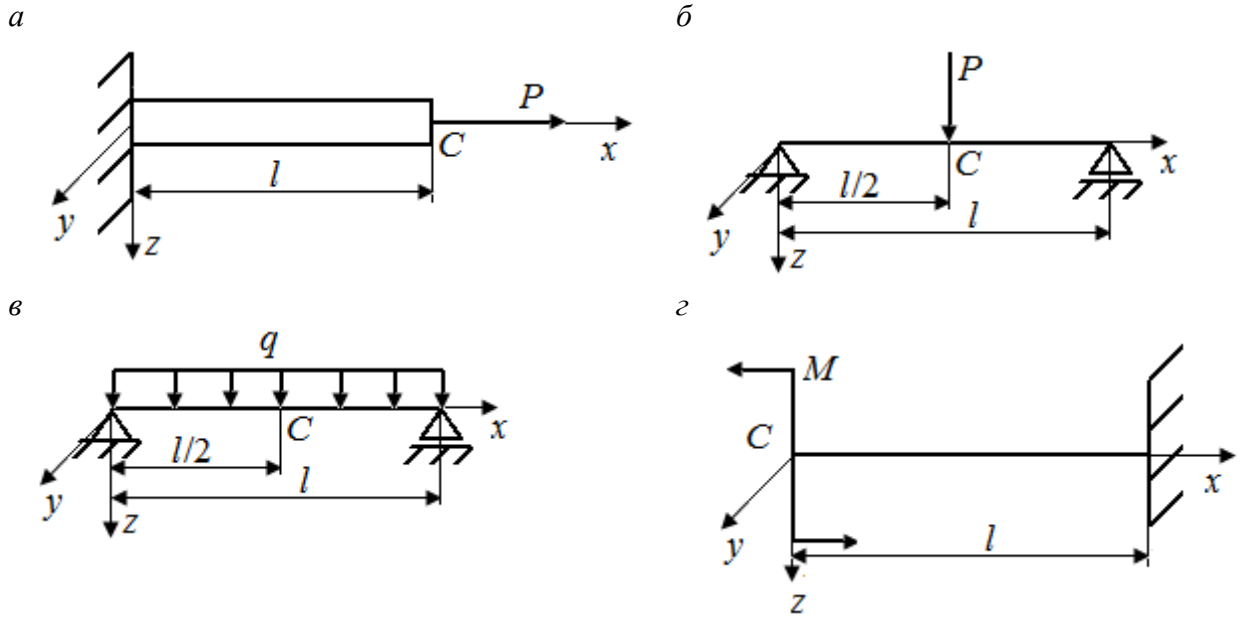


Рис. 24. Схемы стержней, испытывающих перемещения

6.2. Как изменятся величины перемещений точек С в стержнях круглого поперечного сечения, представленных на рис. 25, *а, б*, при увеличении в 2 раза: а) модуля нормальной упругости материала стержня; б) радиуса поперечного сечения?

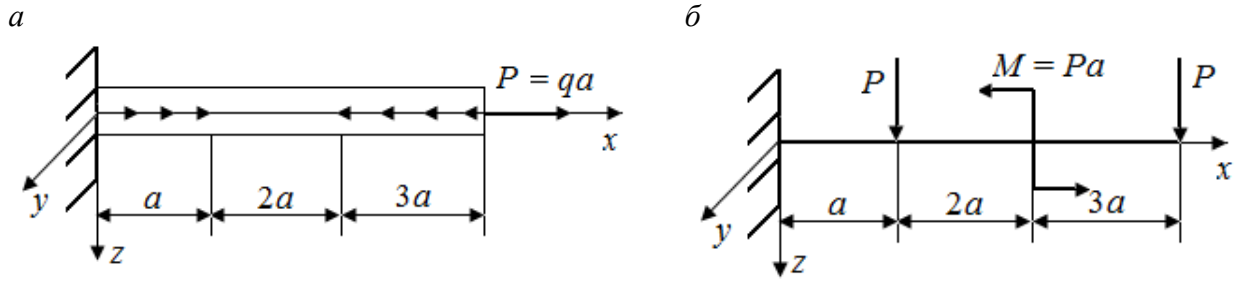


Рис. 25. Схемы стержней, испытывающих перемещения

6.3. Как изменится перемещение точки *C* в представленном на рис. 26, стержне прямоугольного поперечного сечения при увеличении: а) высоты *h* в два раза; б) ширины *b* в два раза?

6.4. Как изменится угол поворота стержня круглого поперечного сечения, представленного на рис. 27, при увеличении в два раза: а) модуля упругости при сдвиге *G*; б) радиуса поперечного сечения *r*?

а *б*

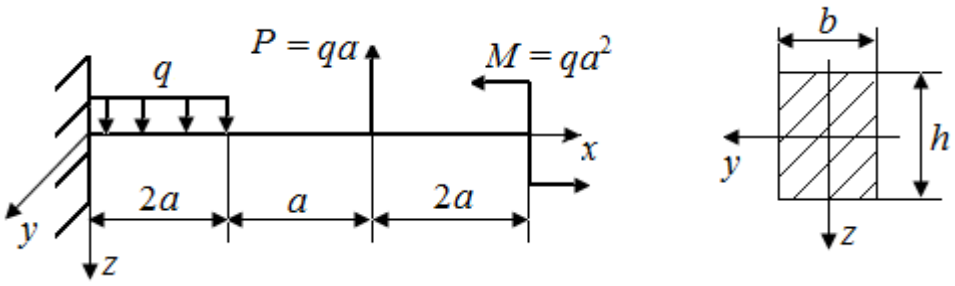


Рис. 26. Схемы стержня, испытывающего плоский поперечный изгиб (*а*) и его поперечного сечения (*б*)

6.5. Как изменится перемещение точки C стержня, представленного на рис. 28, при увеличении в 1,2 раза: а) внутреннего радиуса r, б) наружного радиуса R? Наружный радиус $R = 2r$.

а *б*

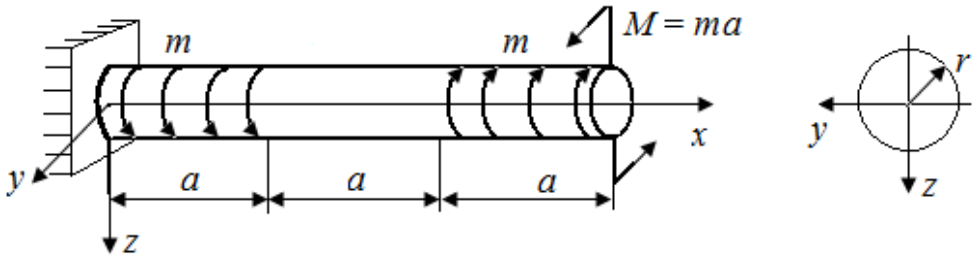


Рис. 27. Схемы стержня, испытывающего кручение (*а*) и его поперечного сечения (*б*)

6.6. Как изменится перемещение точки C стержня, представленного на рис. 29, при увеличении в два раза параметра: а) H; б) h; в) B; г) b? Исходное соотношение параметров $H = 2h, B = 2b$.

а *б*

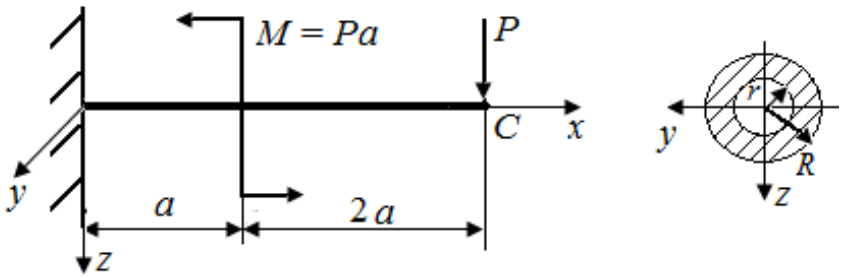


Рис. 28. Схемы стержня, испытывающего плоский поперечный изгиб (*а*) и его поперечного сечения (*б*)

6.7. Определить перемещение в точке и углы поворота в поперечных плоскостях, проходящих через точки A и B стержня, нагруженного в соответствии с рис. 30. Изгибная жесткость стержня $EI_{\text{y}} = \text{const}$.

а *б*

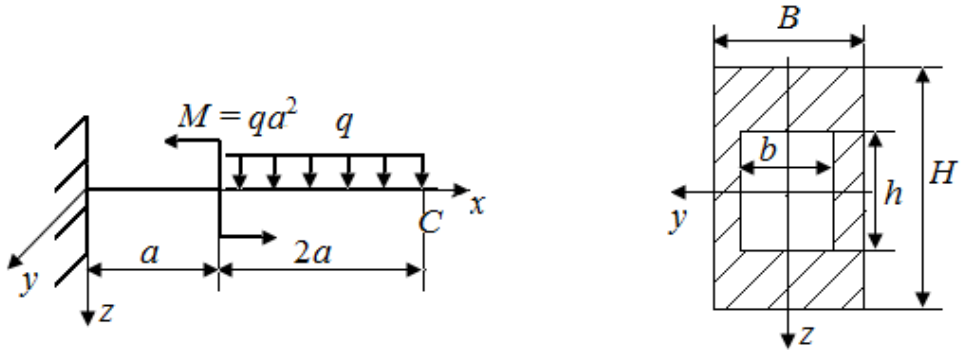


Рис. 29. Схемы стержня, испытывающего плоский поперечный изгиб (*а*) и его поперечного сечения (*б*)

6.8. Определить угол поворота поперечной плоскости, проходящей через точку *B* стержня, нагруженного в соответствии с рис. 31.

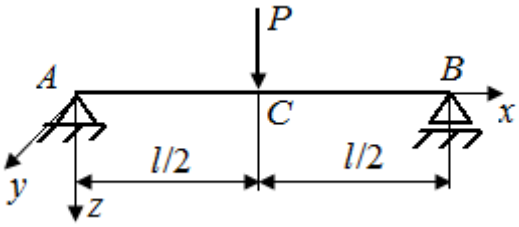


Рис. 30. Схемы стержня, нагруженного сосредоточенной силой

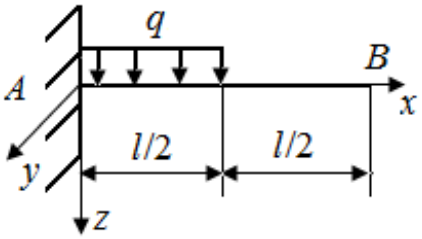


Рис. 31. Схемы стержня, находящегося под действием распределенной нагрузки

6.9. Определить перемещение в точке *A* стержня, нагруженного в соответствии с рис. 32.

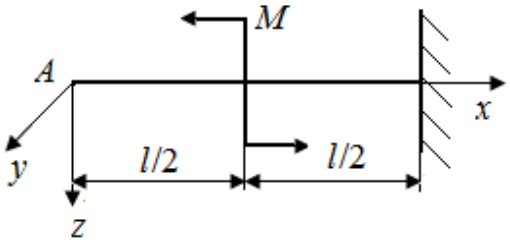


Рис. 32. Схемы стержня, нагруженного сосредоточенным моментом

6.10. Какие условия позволяют раскрыть статическую неопределенность в стержнях, закрепленным по схемам рис. 33 (*а, б*)?

а *б*

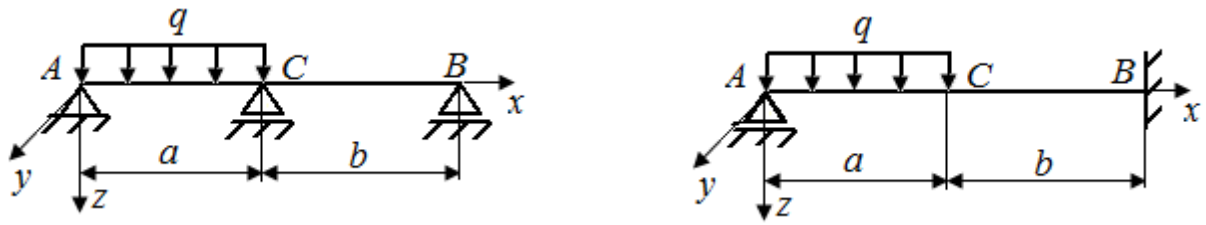


Рис. 33. Схемы стержней, испытывающих плоский поперечный изгиб

6.11. Раскрыть статическую неопределимость в стержне, представленном на рис. 34. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

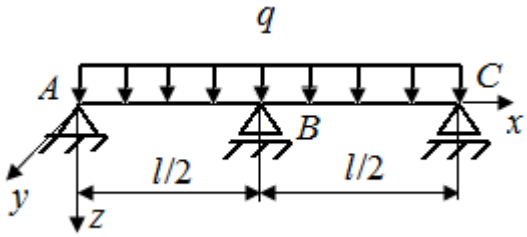
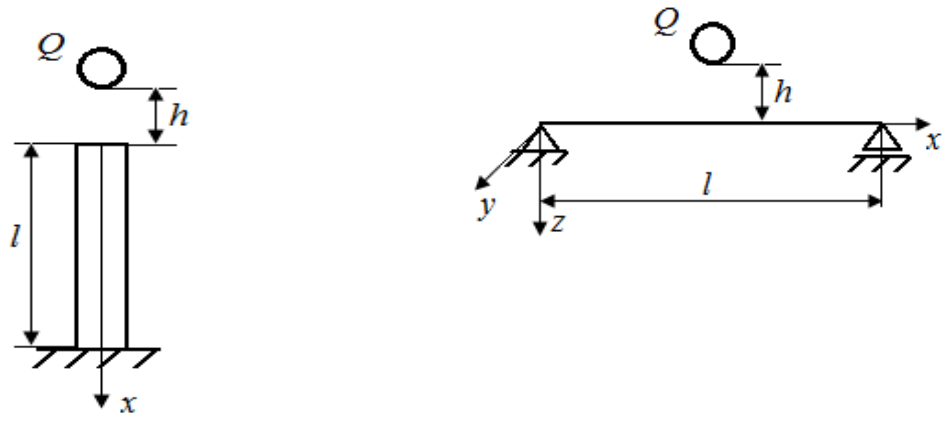


Рис. 34. Схемы стержней, испытывающих плоский поперечный изгиб

7. Определение динамических параметров при ударе

7.1. Как изменятся динамические напряжения в элементе конструкции: 1. Испытывающем растяжение - сжатие (рис. 35, *а*), если в 4 раза уменьшить

а *б*



в

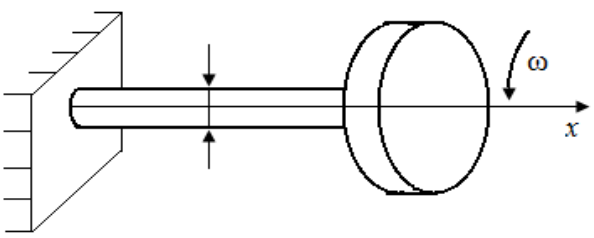


Рис. 35. Схема стержня, испытывающего динамические нагрузки при сжатии (*а*), изгибе (*б*) и при резкой остановке вращающегося вала (*в*)

его: а) площадь поперечного сечения; б) модуль нормальной упругости, в) объем; г) радиус круглого поперечного сечения; д) вес груза; 2. Испытывающем плоско поперечный изгиб (рис. 35, *б*), если в 4 раза увеличить его: а) модуль нормальной упругости; б) радиус круглого поперечного сечения; 3. При резкой остановке вращающегося вала (рис. 35, *в*), если в 4 раза увеличить: а) длину стержня; б) радиус; в) модуль сдвига; г) объем; д) площадь поперечного сечения?

7.2. Как изменятся нормальные динамические напряжения в стержне, нагруженном в соответствии с рис. 35, *а*, при увеличении высоты падения груза в 9 раз?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Основные понятия прикладной механики

Р.1.1. Принцип относительной жесткости позволяет при составлении уравнений равновесия рассматривать тело как недеформированное, обладающее теми же геометрическими размерами, которое оно имело до нагружения.

Применение принципа суперпозиции позволяет получить решение как результат наложения частных решений.

Применение принципа Сен-Венана позволяет считать, что если в пределах некоторой области упругого тела приложена система сил, то на расстояниях, существенно превышающих характерные размеры взятой области, напряжения и деформации практически одинаковы для всех статически эквивалентных систем сил.

Р.1.2. Допущение о сплошности материала элемента конструкции позволяет пользоваться методом анализа бесконечно малых (интегрировать, дифференцировать). Оно приемлемо лишь для тел, размеры которых существенно превышают межатомные расстояния.

Допущение однородности материала допускает, что его механические свойства неизменны в пределах рассматриваемой области.

Допущение анизотропности позволяет считать, что физические и механические свойства не зависят от угловой ориентации элемента конструкции.

Р.1.3. Для удобства вычислений главный вектор внутренних сил $\overline{Q}$ и

вектор главного момента $\overline{L}$ раскладывают на составляющие: а) главный вектор сил на нормальную силу N и поперечные силы Q_y, Q_z; б) вектор главного момента на три пары сил с крутящим моментом M_x и двумя изгибающими моментами M_y и M_z.

Р.1.4. Когда направление внешней нормали к сечению $\bar{n}$ совпадает с направлением оси координат x (левая отсеченная часть стержня), то составляющие внутренних сил N, Q_y, Q_z положительны, если они направлены в ту же сторону, что и соответствующие координатные оси. Когда внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x (правая отсеченная часть стержня), то составляющие внутренних сил N, Q_y, Q_z будут положительны, если они направлены в стороны, противоположные направлениям соответствующих координатных осей.

Р.1.5. Когда направление внешней нормали к сечению $\bar{n}$ совпадает с направлением оси x, моменты M_x, M_y, M_z считаются положительными, если они действуют против часовой стрелки при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей. Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x, то моменты M_x, M_y, M_zбудут положительны, если они создают вращение по часовой стрелке при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей.

Р.1.6. Углы сдвига в элементарном параллелепипеде – $\angle BAB_1, \angle CDC_1, \angle FEF_1, \angle GHG_1$; перемещения – BB_1, CC_1, FF_1, GG_1.

Р.1.7. На рис. 36, *а* приведена диаграмма растяжения образца из пластичного материала, а на рис. 36, *б* диаграмма условных напряжений для того же образца. После стадии текучести материала ($\sigma = \sigma_T$) на диаграмме точки *C* (рис. 36, *б*) деформация в каждый момент времени складывается из упругой и пластичной. При разгружении образца из точки *D* линия разгрузки *DL* параллельна первоначальному участку *OA*. На рис. 36, *а* отрезок *LM* – исчезающее удлинение образца, отрезок *OL* – остаточное удлинение образца.

На рис. 36, *б* отрезок $LM = \varepsilon_y$ – упругое относительное удлинение, отрезок $OL = \varepsilon_{пл}$ – пластическое относительное удлинение. Если нагружать образец снова, напряжение пойдет по прямой *LD*. Жесткость стержня не изменится, а предел пропорциональности возрастет.

Р.1.8. Внешние силы выражают меру взаимодействия стержня с другими телами, а внутренние силовые факторы Q_z и M_y – изменение сил межатомного взаимодействия при деформации стержня.

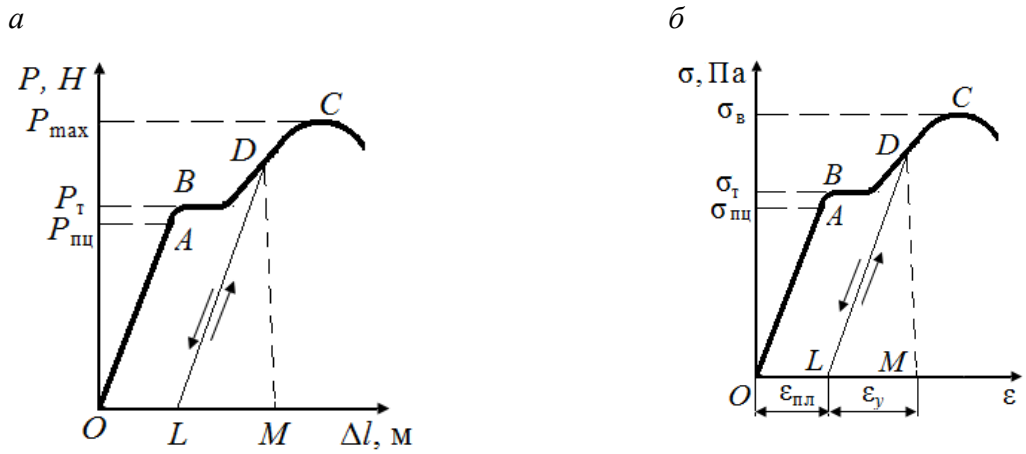


Рис. 36. Диаграммы растяжения (*а*) и условных напряжений (*б*) из пластичного материала

Р.1.9. Опорные реакции – мера взаимодействия между нагруженным стержнем и опорами. Это внешние силы.

Р.1.10. Условия статического равновесия устанавливают связь между проекциями сил X_i, Y_i, Z_i на оси *xyz* и связь между моментами $M_i^{(x,0)}, M_i^{(y,0)}, M_i^{(z,0)}$ относительно осей *xyz*.

Р.1.11. Стержни, представленные на рис. 5, нагружены в плоскости *xOz*. Условия статического равновесия определяются тремя уравнениями, которые позволяют определить три неизвестных опорных реакции. На стержень, приведенный на рис. 5, *а*, накладываются четыре связи. Система статически неопределима. На стержень, приведенный на рис. 5, *б*, накладываются три связи - система статически определима.

Р.1.12. Необходимо выполнить следующие закрепления стержня (рис. 6): 1) жесткое защемление в плоскости, проходящей через точку *A*; 2) неподвижная опора, запрещающая перемещение вдоль оси *x* и *z* в точке *A*, и подвижная опора, запрещающая перемещение вдоль оси *z* в точке *B*; 3) закрепление, аналогичное закреплению п.2).

Р.1.13. Материал стержня, приведенного на рис. 8: 1) упругий, 2) упруго-пластичный, 3) пластичный.

2. Закрепление стержней. Опорные реакции

Для определения опорных реакций в стержне (рис. 37, *а*), сначала определим внешние нагрузки на стержень от силы *P*, приложенной в точке *B*. Воспользуемся принципом Сен-Венана:

1. К точке *C* прикладываем две силы, коллинеарные *P*. Направление одной совпадает с исходной силой *P*, а другой - противоположное ей (рис. 37, *б*). Характер нагрузки на систему не изменился. Получаем пару сил с моментом $M_1 = Pa$, изгибающим стержень относительно оси *y* и силу *P* (рис. 37, *в*).

2. Силу, приложенную в точке *C*, приводим к оси стержня. Прикладываем в точке *O* две силы, коллинеарные силе *P* и взаимно противоположно направленные (рис. 37, *г*). Получаем пару сил с моментом $M_1 = Pa$,

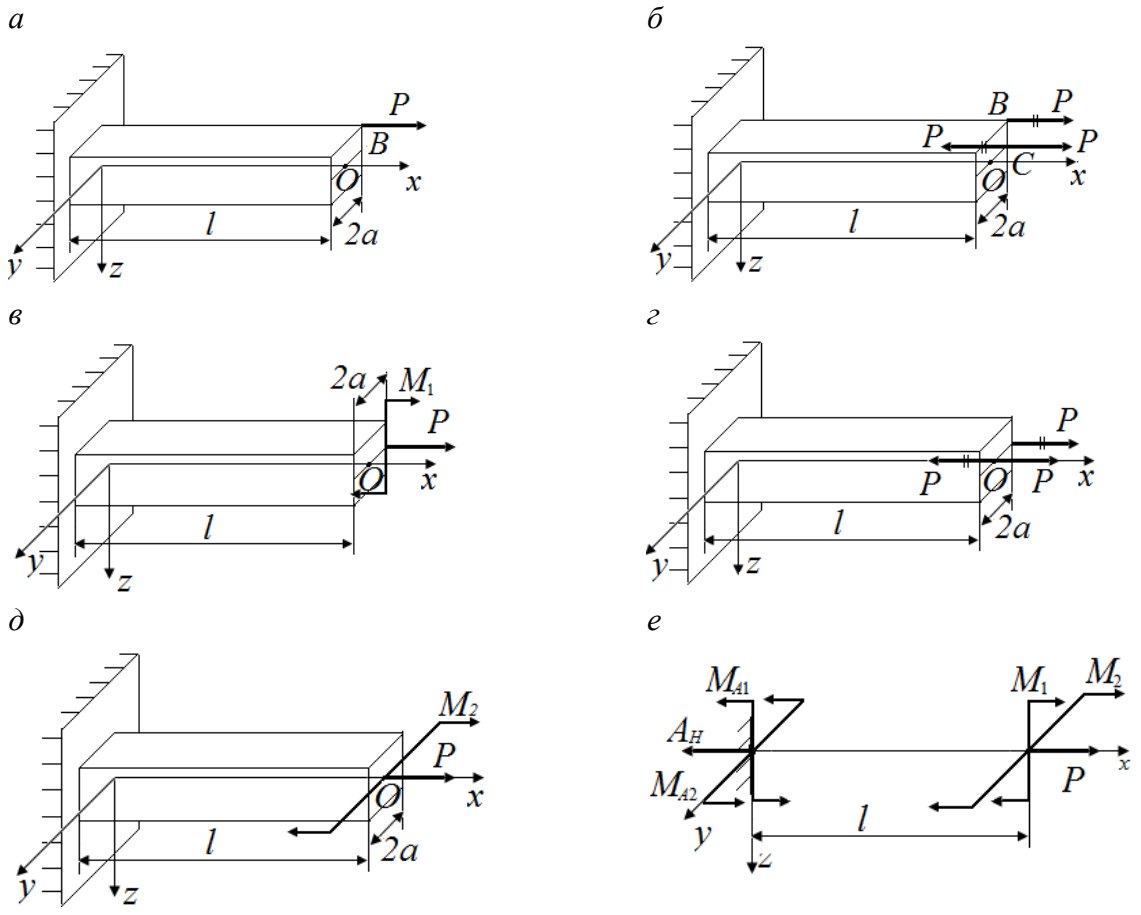


Рис. 37. Схемы приведения силы P к оси стержня

изгибающим стержень относительно оси *z* и силу *P* (рис. 37, *д*). Из условия равновесия определяем два опорных момента $M_{A1} = M_1$ и $M_{A2} = M_2$ и

опорную реакцию $A_н = P$ (рис. 37, *е*). Моменты можно переносить в параллельную плоскость, от этого характер нагрузки на твердое тело не меняется.

Для определения опорных реакций в стержне (рис. 38, *а*) определим сначала внешние силы, действующие на стержень при приложении нагрузки P в точке B. Воспользовавшись принципом Сен-Венана, приведем силу P в точку O (рис. 38, *б*). Получаем пару сил с моментом $M_c = Pa$, скручивающим стержень относительно оси *x*, и силу P, изгибающие стержень в плоскости *xOz* (рис. 38, *в*).

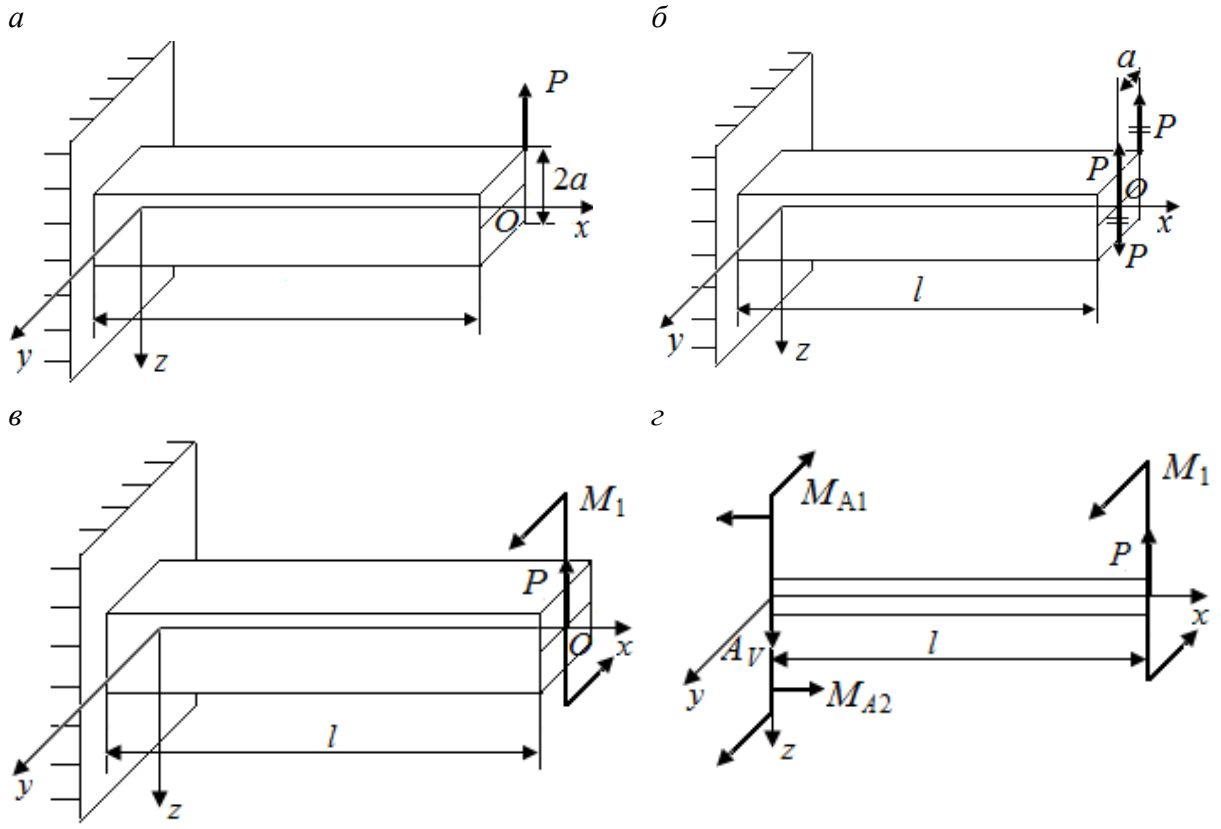


Рис. 38. Схемы приведения силы *P* к оси стержня

Из условий статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$ определяем опорные реакции $A_V = P, M_{A1} = Pa, M_{A2} = Pl$ (рис. 38, *г*).

Силу P, приложенную в точке B (рис. 39, *а*), можно перемещать по линии действия. От этого характер нагрузки на систему не изменится. Переместим эту силу P в точку O (рис. 39, *б*). Опорные реакции в стержне определим, используя условия статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$: $A_V = -P, M_A = Pl$.

Определим внешние силы, действующие на стержень при приложении силы P в точке B (рис. 40, *а*). Воспользовавшись принципом Сен-Венана, приведем силу P в точку O (рис. 40, *б*).

Получим пару сил с моментом $M = Pa$, изгибающим стержень в плоскости xOy относительно оси z, и силу P, растягивающую стержень (рис. 40, *в*).

а *б*

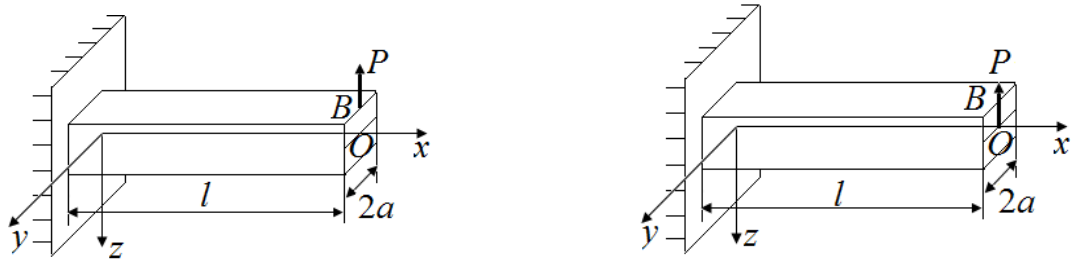


Рис. 39. Схемы приведения силы P к оси стержня

Из условий статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(z,0)} = 0$ получим $M_A = M = Pa, A_V = P$.

а *б*

в *г*

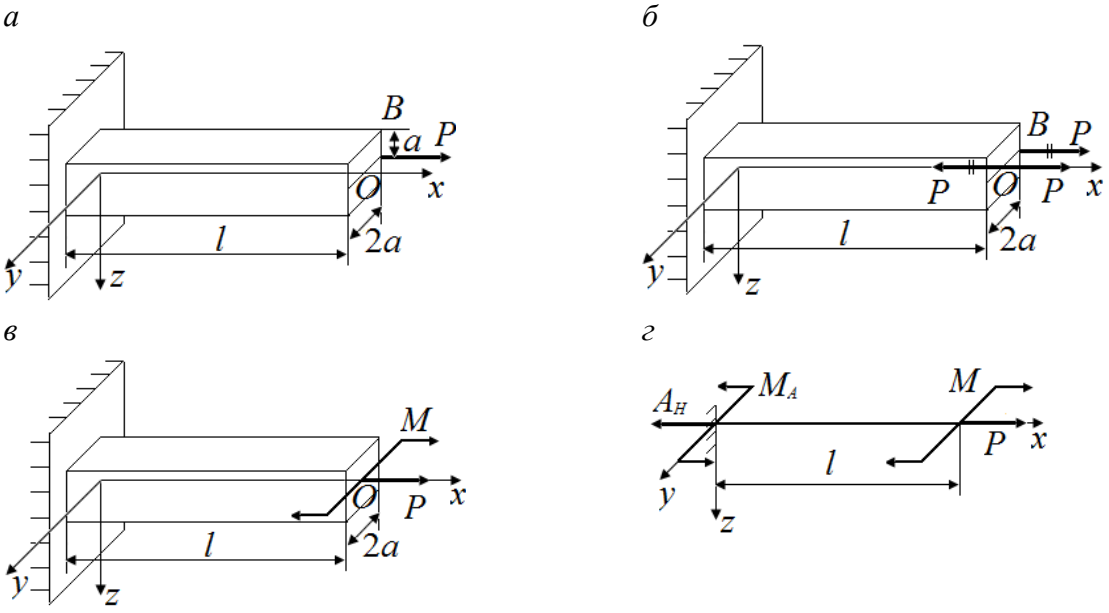


Рис. 40. Схемы приведения силы P к оси стержня (принцип Сен-Венана)

Используя принцип Сен-Венана, приведем силы P, приложенные в точках B, C к оси стержня. Приведение сил определяет нагружение стержня, приведенное на рис. 41.

Моменты пар сил равны по величине Pa, но скручивают стержень в разных направлениях. Из условия статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$,

$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$ опорные реакции $M_A = 0, A_V = 0$.

а *б*

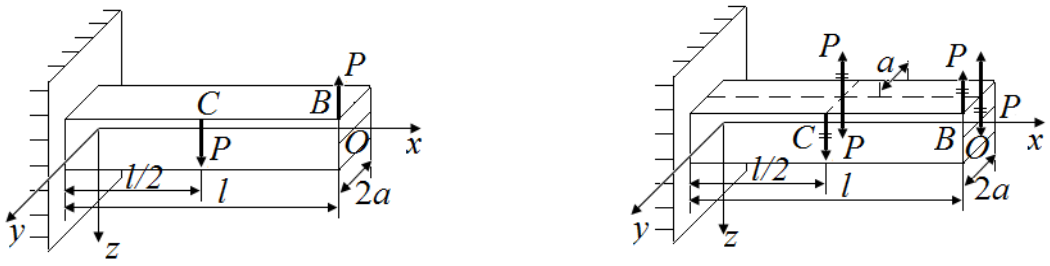


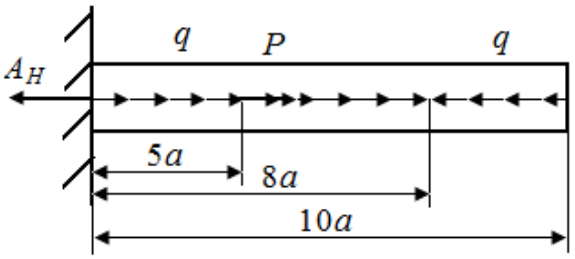
Рис. 41. Схемы приведения силы *P* к оси стержня

3. Определение внутренних усилий в стержнях

Р.3.1. 1. Из условия статического равновесия определим опорную реакцию A_H в стержне (рис. 42, *а*):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,;\ -A_H + q \cdot 10a + P - q \cdot 2a = 0, A_H = 13qa.$$

а



б

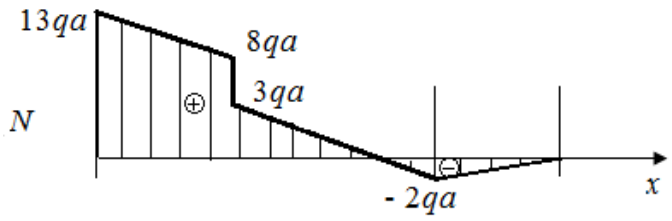


Рис. 42. Схема стержня и эпюра нормальных сил

2. Определяем число грузовых участков; 3. На каждом участке, не захватывая его границы, проводим сечение. 4. В сечении представляем внутренние силовые факторы в соответствии с правилами знаков. 5. Рассчитываем значения внутренних силовых факторов на границе участков. 6. В соответствии с проведенными расчетами строим эпюру внутренних сил (рис. 42, *б*).

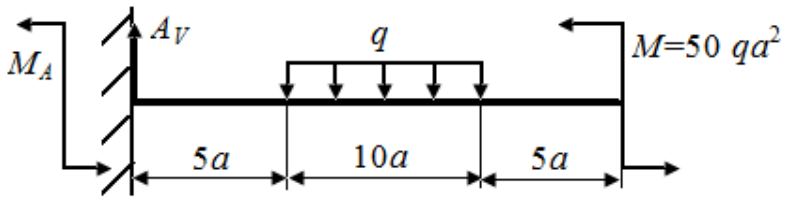
Р.3.2. Из условия статического равновесия определим опорные реакции A_H, M_A в стержне, представленном на рис. 43, *а*:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,;\ -A_V + q \cdot 10a = 0, A_V = 10qa,$$

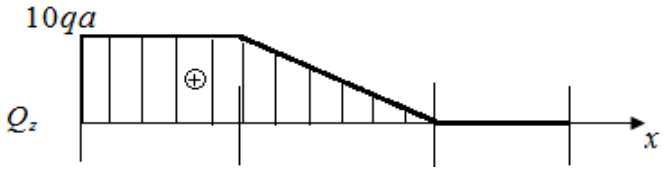
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0\,;\ M_A - q \cdot 10a \cdot 10a + M = 0, M_A = 50qa^2.$$

Далее выполняем работу в соответствии с пунктами 2 - 5 задачи Р.3.1. По результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков на рис. 43 построены эпюры поперечных сил Q_z (рис. 43, *а*) и изгибающих моментов M_y (рис. 43, *б*).

а



б



в

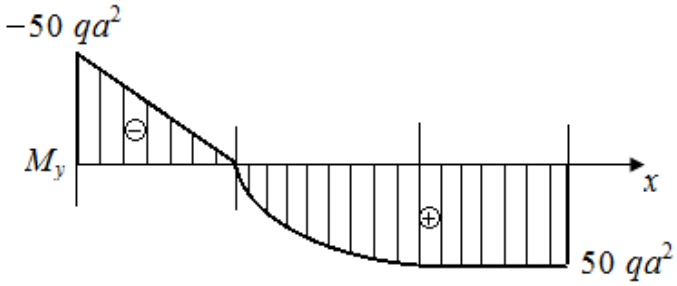


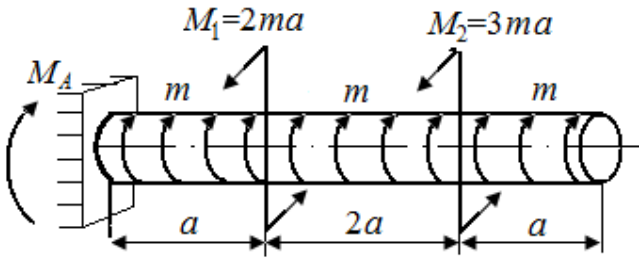
Рис. 43. Схема стержня и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Р.3.3. Из условия статического равновесия определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. 44, *а*:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0\,;\ M_A - m \cdot 3a + M_1 + M_2 = 0, M_A = 2ma.$$

Далее выполняем работу в соответствии с пунктами 2 - 5 задачи Р.3.1. По результатам вычислений M_x на границах грузовых участков строим эпюр крутящих моментов (рис. 44, *б*).

а



б

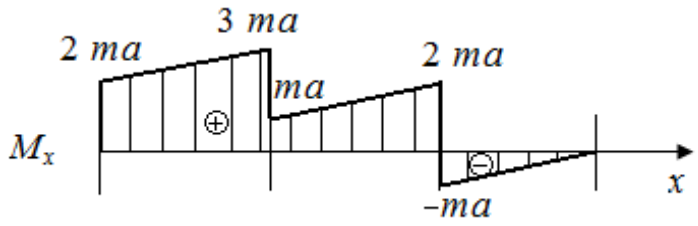


Рис. 44. Схема стержня и эпюра крутящих моментов

4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела

Р.4.1. Напряженное состояние в окрестности точки, а, следовательно, и главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, не могут меняться при изменении системы координат, кубическое уравнение должно быть инвариантно к преобразованию системы координат.

Р.4.2. Коэффициенты кубического уравнения $\Theta_{\mathrm{I}}, \Theta_{\mathrm{II}}, \Theta_{\mathrm{III}}$ называют инвариантами тензора напряжений, потому что из значения от выбранной системы координат.

Р.4.3. При плоском напряженном состоянии, нормальное σ_n и касательное τ_{nk} напряжения на площадке (рис. 45), нормаль к которой повернута на угол α по отношению к площадке, нормальной к оси *x* определяют выражения:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha\,, \tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha.$$

Значения главных напряжений и положения главных площадок определяют выражения:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}\right], tg\, 2\alpha = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}.$$

По условию, заданному на рис. 45 $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 50$ МПа. Напряжения на наклонной площадке, повернутой на угол $30°$ и $-30°$ определяют выражения:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 30° - \tau_{xz} \sin 60°;\ \tau_{nk} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 60° + \tau_{xz} \cos 60°$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(-30°) - \tau_{xz} \sin(-60°);$$

$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_x}{2} \sin(-60°) + \tau_{xz} \cos(-60°).$$

В первом случае $\sigma_n = 31{,}7$ МПа, $\tau_{nk} = 68{,}3$ МПа; а во втором случае $\sigma_n = 118{,}3$ МПа, $\tau_{nk} = -18{,}3$ МПа.

а *б*

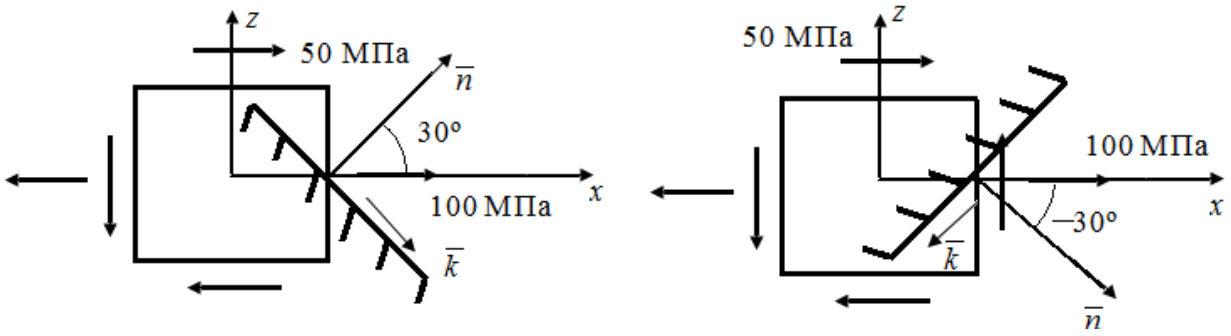


Рис. 45. Схема плоского элемента, выделенного в твердом деформированном теле

Значения главных напряжений и положения главных площадок определяют выражения $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x{}^2 + 4\tau_{xz}^2}\right]$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha_n = -2\tau_{xz}/\sigma_x$.

$\sigma_1 = 122$ МПа, $\sigma_3 = -22$ МПа, $\alpha_{n1} = -22{,}5°$, $\alpha_{n1} = 112{,}5°$.

Р.4.4. В примере, представленном на рис. 43 $\sigma_x = 10$ Мпа, $\sigma_z = 20$ МПа, $\tau_{xz} = 0$. Напряжения на площадках, нормаль к которым повернута относительно оси *x* на углы $60°$ и $-60°$, определим по формулам из Р.4.3: $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha$, $\tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha$.

При повороте на угол $60°$: $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 60° + \sigma_z \sin^2 60° = 17{,}5$ МПа;

$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 120° = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 30° \approx 13 \text{ МПа}.$$

При повороте на угол $-60°$: $\sigma_n = \sigma_x \cos^2(-60°) + \sigma_z \sin^2(-60°)$

$$\sigma_n = 7{,}5 \text{ МПа}; \tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin(-120°) = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 30° \approx -4{,}33 \text{ МПа}.$$

Р.4.5. Верхняя площадка (рис. 13, *а*) свободна от касательных напряжений. Главные напряжения на этой площадке равны нулю. Два других

главных напряжения определим по формулам $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \right.$ $\left. \pm\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}\right]$;т.к. $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = \sigma$; $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}[2\sigma \pm 2\sigma]$.

В соответствии с правилом обозначения главных напряжений: $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Напряженное состояние - линейное.

а *б*

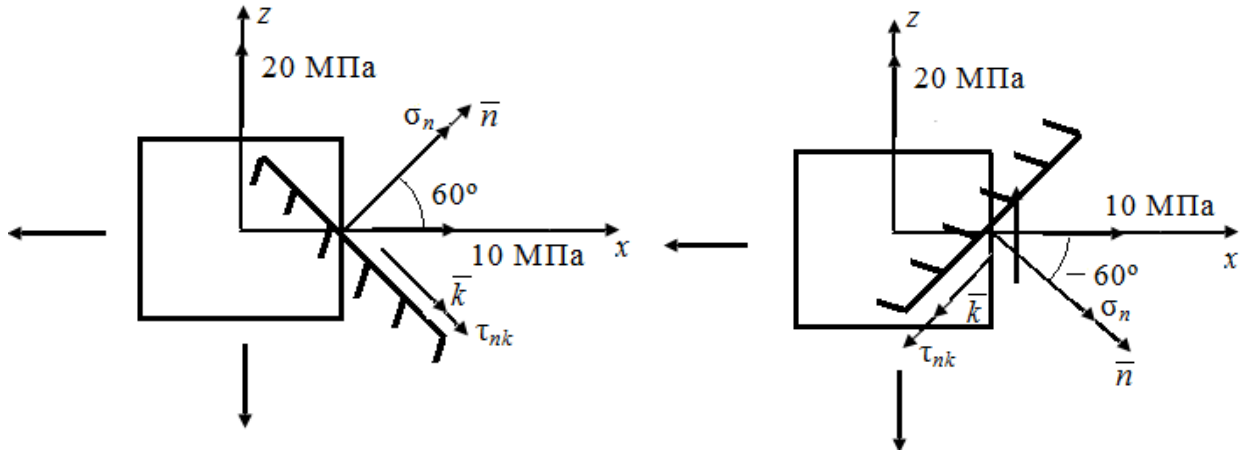


Рис. 46. Схема плоского элемента, выделенного в твердом деформированном теле

Боковая площадка (рис. 13, *б*) свободна от касательных напряжений. Главные напряжения на ней равны нулю. Два других главных напряжения определим по формулам: $\sigma_x = \sigma_z = 0, \sigma_{1,3} = \pm\tau_{xz} = \pm 100$ МПа. Напряженное состояние - плоское.

Боковая площадка (рис. 13, *в*) свободна от касательных напряжений. Это одна из главных площадок, напряжение на которой равно 100 МПа.

Два других главных напряжения определим при следующих значениях нормальных и касательных напряжений на площадках:$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} =$ $= 100$ МПа.

Одно из главных напряжений равно 200 Па, а другое равно нулю. В соответствии с правилом обозначения главных напряжений $\sigma_1 = 200$ МПа, $\sigma_2 = 100$ МПа, $\sigma_3 = 0$. Напряженное состояние - плоское.

Р.4.6. Эпюры напряжений в поперечном сечении стержня в окрестностях точек *A*, *B*, *C* имеют вид, представленный на рис. 47, *а*.

В окрестностях точек выделим элементарные параллелепипеды, на гранях которых представим напряжения в окрестностях точек *A* (рис. 47, *в*), *B* (рис. 47, *г*), *C* (рис. 47, *д*). Одна из граней каждого параллелепипеда совпадает с поперечным сечением.

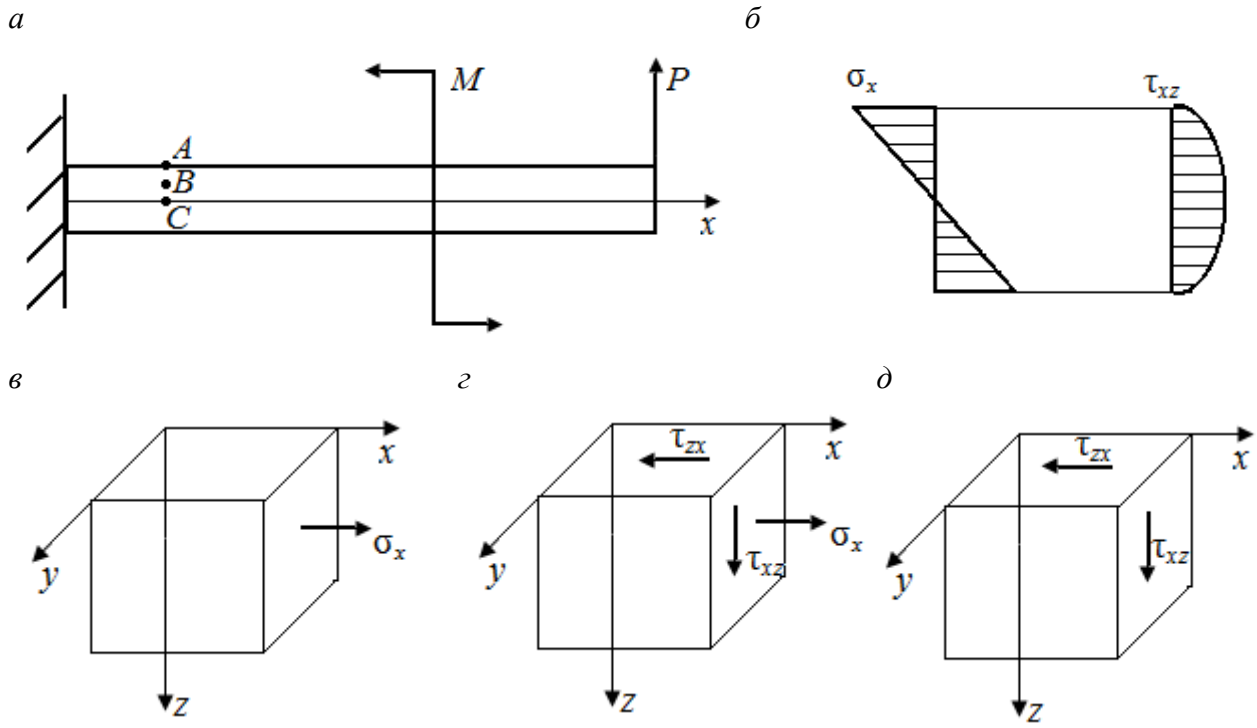


Рис. 47. Схема нагруженного стержня (*а*), эпюры нормального и касательного напряжений (*б*), схемы прямоугольных параллелепипедов, вырезанных из нагруженного стержня (*в-д*)

Точка *A* (рис. 47, *в*). Все три грани элементарного параллелепипеда являются главными площадками. На двух гранях напряжения равны нулю, на третьей не равно нулю: $\sigma_1 = [\sigma_x]_A, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Напряженное состояние - линейное. $[\sigma_x]_A$ – значение нормального напряжения в точке *A*.

Точка *B* (рис. 47, *г*). Напряжения на боковой грани равны нулю. Это одна главная площадка. Напряжения на двух других главных площадках

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[([\sigma_x]_B) + \sqrt{(\sigma_x)^2 + 4[\tau_{xz}^2]_B}\right]; \sigma_3 = -[\tau_{xz}]_B,$$

где $[\sigma_x]_B, [\tau_{xz}]_B$ – значения нормального и касательного напряжений в окрестности точки *B*.

Точка *C* (рис. 47, *д*). Напряжения на боковой грани равны нулю. Это одна главная площадка. Напряжения на двух других гранях равны

$$\sigma^{\max} = [\tau_{xz}]_C, \sigma^{\min} = -[\tau_{xz}]_C,$$

где $[\tau_{xz}]_C$ - значение касательного напряжений в окрестности точки *C* $\sigma_1 = [\tau_{xz}]_C, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -[\tau_{xz}]_C$. Напряженное состояние - плоское.

Р.4.7. В окрестности точек *A*, *C* (рис. 48) выделим элементарные параллелепипеды. Одна из граней каждого параллелепипеда совпадает с поперечным сечением. Точка *C*. Напряжения в окрестности точки *C* равны нулю. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Напряженное состояние – нулевое.

Точка *A*. Напряженное состояние в точке *A* определим при рассмотрении кубического уравнения. Учитывая, что $\Theta_{\text{I}} = \Theta_{\text{III}} = 0, \Theta_{\text{II}} = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau_x^2$ кубическое уравнение принимает вид $\sigma^3 - \tau_x^2\sigma = \sigma(\sigma^2 - \tau_x^2) = 0$, получаем $\sigma_2 = 0,\ \sigma_{1,3} = \pm[\tau_x]_A$, где $[\tau_x]_A$ – значение τ_x в окрестности точки *A*. Напряженное состояние – плоское.

а *б*

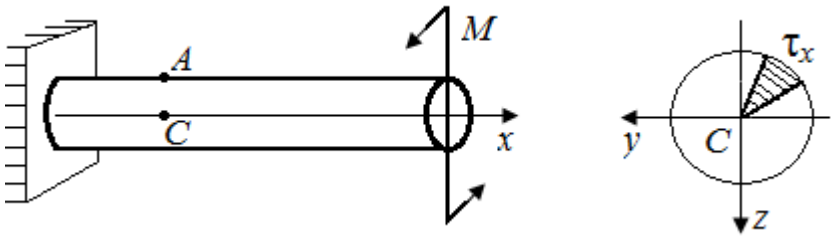


Рис. 48. Схемы нагруженного стержня (*а*) и эпюра касательных напряжений (*б*)

Р.4.8. На гранях представлены главные напряжения. Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ по четвертой теории прочности определяют по следующей формуле $\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$.

В окрестности точки (рис. 16) действуют главные напряжения $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$. По формуле $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{3}\sigma$.

Р.4.9. На гранях представлены главные напряжения. Эквивалентные напряжения по теории наибольших касательных напряжений определяются по формуле $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3$, а по четвертой теории прочности по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

На гранях действуют следующие главные напряжения: а) $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$, б) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \sigma_3 = 0$, в) $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$.

При расчете по четвертой теории прочности для напряженных состояний а), б), в) напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ соответственно равны $\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma, \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma, 2\sigma$. Самое неблагоприятное напряженное состояние "в".

При расчете по теории наибольших касательных напряжений, для напряженных состояний а), б), в) напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ соответственно равны $\sigma, \sigma, 2\sigma$. Самое неблагоприятное напряженное состояние "в".

Р.4.10. На гранях представлены главные напряжения $\sigma_1 = 300\text{Мпа}, \sigma_2 = 200$ Мпа, $\sigma_3 = -100$ Мпа. По теории наибольших касательных напряжений, эквивалентное напряжение, определяемое по формуле $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3$,

равно 400 МПа. Это напряжение превышает допускаемое напряжение $[\sigma] =$ $= 250$ МПа. Деформируемое тело не удовлетворяет условиям прочности.

Р.4.11. На гранях представлены главные напряжения $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0, \sigma_3 =$ $= -\sigma$. Главные деформации определяются по формулам$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 +$ $+\sigma_3)]; \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$.

Главные линейные деформации соответственно равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma + \nu\sigma];\ \varepsilon_2 = 0;\ \varepsilon_3 = -\frac{1}{E}[\sigma + \nu\sigma].$$

Р.4.12. Первый инвариант тензора напряжений $\Theta_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ не зависит от пространственной ориентации параллелепипеда. $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z =$ $= 700$ МПа, $\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = 350$ МПа, значит $\sigma_{z1} = 350$ МПа.

Р.4.13. Сумма относительных удлинений не зависит от пространственной ориентации элементарного параллелепипеда. Так как $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0{,}030$, а $\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} = 0{,}022$, то $\varepsilon_{z1} = 0{,}008$.

Р.4.14. Стержень, представленный на рис. 18, испытывает нормальное напряжение $\sigma = \frac{N}{F}$, $N = P$, $F = \pi((2r)^2 - r^2) = 3\pi r^2$, где N - нормальная сила, F - площадь поперечного сечения стержня. Относительное продольное удлинение стержня $\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{3E\pi r^2}$, где E - модуль нормальной упругости материала стержня. Относительное поперечное удлинение стержня $\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$, где ν - коэффициент Пуассона: $\varepsilon_2 = -\frac{\nu P}{3E\pi r^2}$. Изменение радиуса стержня $\Delta r =$ $= \varepsilon_2 r = -\frac{\nu P}{3E\pi r}$.

Р.4.15. Коэффициент Пуассона ν определяется по формуле$\nu = \left|-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right|$, где $\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}04}{20} = 0{,}002$ - относительное продольное удлинение стержня; $\varepsilon_2 =$ $= \frac{\Delta r}{r} = -\frac{0{,}0016}{2} = -0{,}0008$ - относительное поперечное сужение стержня. Коэффициент Пуассона равен $\nu = \frac{0{,}0008}{0{,}002} = 0{,}4$.

5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней

Р.5.1. На рис. 20 проведем нумерацию грузовых участков слева-направо.

Из условия статического равновесия стержня (рис. 20, *а*) нормальные силы на первом и втором участках соответственно равны $N_1 = P, N_2 = 5P$.

Нормальное напряжение $\sigma_{x1} = \frac{P}{a^2}$, $\sigma_{x2} = \frac{5}{4}\frac{P}{a^2}$. Максимальное напряжение на втором участке.

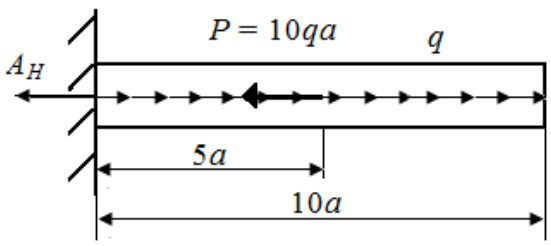
Нормальные силы и нормальное напряжение в стержне, представленном на рис. 20, *б*, равны $N_1 = 6P$, $N_2 = 5P$, $N_3 = 4P$; $\sigma_{x1} = \frac{6}{9}\frac{P}{a^2}$, $\sigma_{x2} = \frac{5}{4}\frac{P}{a^2}$, $\sigma_{x3} = 4\frac{P}{a^2}$. Максимальное напряжение на третьем участке.

Нормальные силы и нормальное напряжение в стержне, представленном на рис. 20, *б*, равны $N_1 = P$, $N_2 = 5P$, $N_3 = P$; $\sigma_{x1} = \frac{1}{9}\frac{P}{a^2}$, $\sigma_{x2} = \frac{5}{4}\frac{P}{a^2}$, $\sigma_{x3} = \frac{P}{a^2}$. Максимальное напряжение на втором участке.

Р.5.2. Определим величину опорной реакции в стержне (рис. 49, *а*). Из условия статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$; $-A_H + q \cdot 10a - P = 0, A_H = 0$. Определим значения нормальных сил на границах грузовых участков и построим эпюр нормальных сил в соответствии с законами изменения N на грузовых участках и значениями N на границе грузовых участков (рис. 49, *б*).

Величина экстремального напряжения равна $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{N}{F}\right|^{\max} = \frac{5qa}{\pi a^2} = \frac{5q}{\pi a}$.

а



б

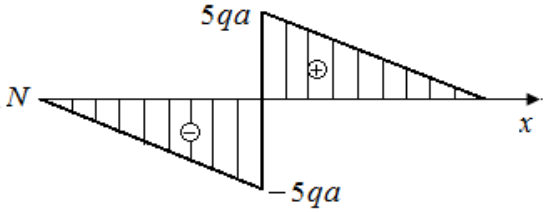


Рис. 49. Схемы нагруженного стержня и эпюра нормальных напряжений

Р.5.3. Определим величину опорной реакции в стержне (рис. 50, *а*). Из условия статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$; $-A_H + q \cdot 10a + P = 0, A_H = 15qa$. По результатам проведенных вычислений нормальных сил на грузовых участках строим эпюры нормальных (рис. 50, *б*). Величина экстремального напряжения равна $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{N}{F}\right|^{\max} = \frac{15q}{\pi a}$.

Р.5.4. Определим величину опорной реакции в стержне (рис. 51, *а*). Из условия статического равновесия $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$; $-A_H + q \cdot 2a - -q \cdot 8a = 0, A_H = -6qa$. По результатам проведенных вычислений нормальных сил на грузовых участках строим эпюр нормальных сил в соответствии с законами изменения N на грузовых участках

и значениями N на границе грузовых участков (рис. 51, *б*). Величина экстремального напряжения равна

$$\sigma_x^{\max} = \left|\frac{N}{F}\right|^{\max} = \frac{8q}{\pi a}.$$

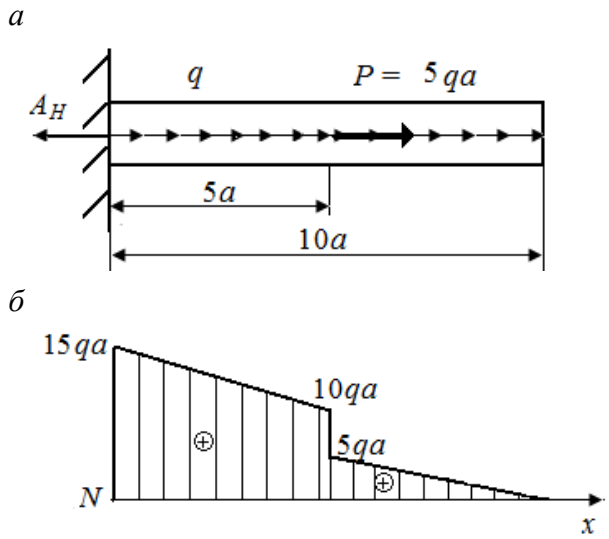


Рис. 50. Схемы нагруженного стержня и эпюра нормальных напряжений

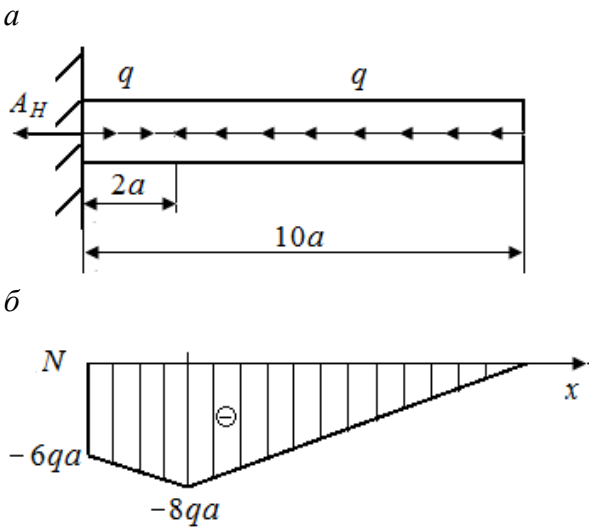


Рис. 51. Схемы нагруженного стержня и эпюра нормальных напряжений

Р.5.5. Опорные реакции при плоском поперечном изгибе стержня (рис. 52, *а*) A_V, M_A определим рассматривая два условия статического равновесия: $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$; $-A_V + P = 0$, $A_V = P$, $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$; $M_A - P \times$ $\times 10a + M = 0, M_A = 5Pa$.По результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков построены эпюры поперечных сил Q_z и изгибающих моментов M_y (рис. 52, *б*).

Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_y}\right|^{\max} = \frac{15Pa}{W_y}$; $W_y =$ $= \frac{\pi r^3}{4}$, (W_y – момент сопротивления круглого сечения при изгибе).

Р.5.6. Определим опорные реакции A_V, M_A в стержне (рис. 53, *а*): $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$; $A_V = 0$; $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$; $M_A - M + M = 0, M_A = 0$. По результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков на рис. 53, *в* приведена эпюра изгибающих моментов. Экстремальное значение нормального напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_y}\right|^{\max} = \frac{M}{W_y}$; $W_y = \frac{\pi r^3}{4}$ (W_y - момент

сопротивления круглого сечения при изгибе).

Р.5.7. Определим опорные реакции A_V, M_A в стержне (рис. 54, *а*): $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$; $-A_V + q \cdot 2a = 0, A_V = 2qa, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$; $M_A - q \cdot 2a \cdot a + +M = 0$, $M_A = qa^2$. По результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков на рис. 54, *в* приведена эпюра изгибающих моментов. Экстремальное значение нормального напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_y}\right|^{\max} = = \frac{M}{W_y}$; $W_y = \frac{\pi r^3}{4}$ (W_y - момент сопротивления круглого сечения при изгибе.

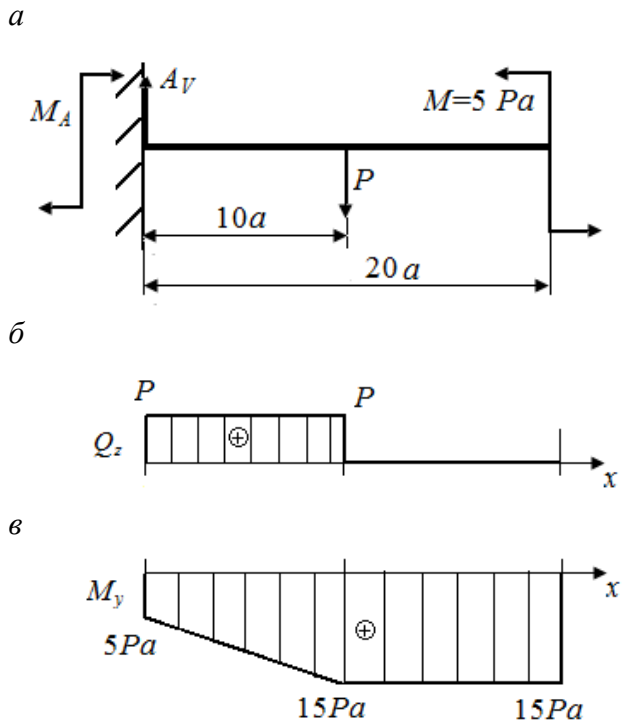


Рис. 52. Схема стержня и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

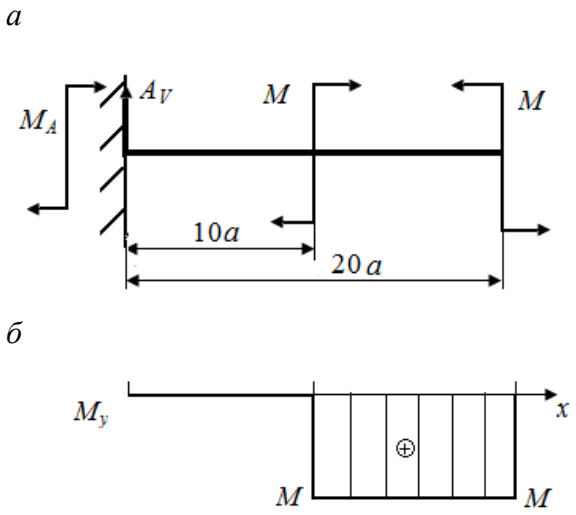


Рис. 53. Схема стержня и эпюра изгибающих моментов

Р.5.8. Определим опорные реакции A_V, M_A в стержне (рис. 55, *а*): $\sum_{i=1}^{n} Z_i == 0$; $-A_V + q \cdot 2a - q \cdot 2a = 0, A_V = 0, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$; $-M_A - q \times \times 2a \cdot a + q \cdot 2a \cdot 3a = 0, M_A = 4qa^2$. На рис. 55 по результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков приведены эпюры поперечных сил Q_z (рис. 55, *б*) и изгибающих моментов M_y (рис. 55, *в*). Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_y}\right|^{\max} = \frac{2qa^2}{W_y}; W_y = \frac{bh^2}{6}$ (W_y – момент сопротивления прямоугольного сечения при изгибе).

Р.5.9. Из условия статического равновесия стержня определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. 56, *а*: $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$; $-M_A - -m \cdot 5a + M = 0, M_A = 5ma$. На рис. 56, *б* приведена эпюра M_x, построенная по результатам вычислений значений крутящего момента M_x на границах грузовых участков. Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_к}\right|^{\max} = \frac{10ma}{W_к}$; $W_к = \frac{\pi r^3}{2}$ ($W_к$ – момент сопротивления при кручении).

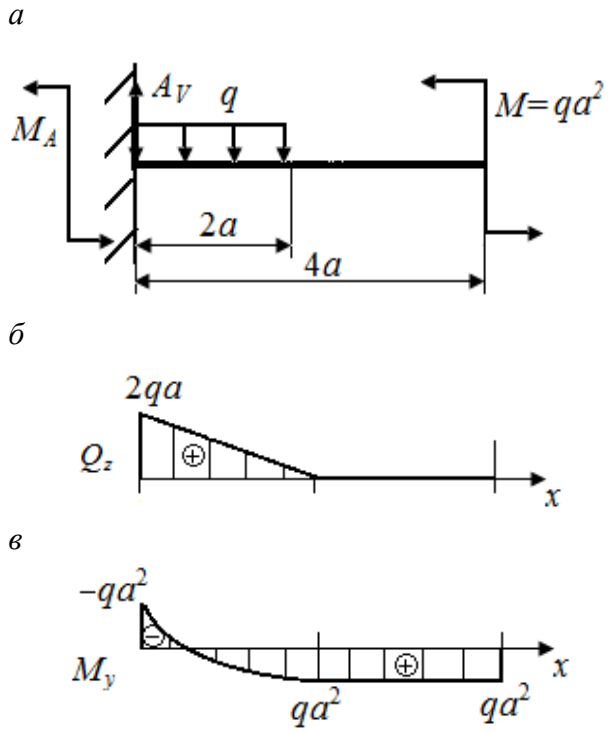


Рис. 54. Схема стержня и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

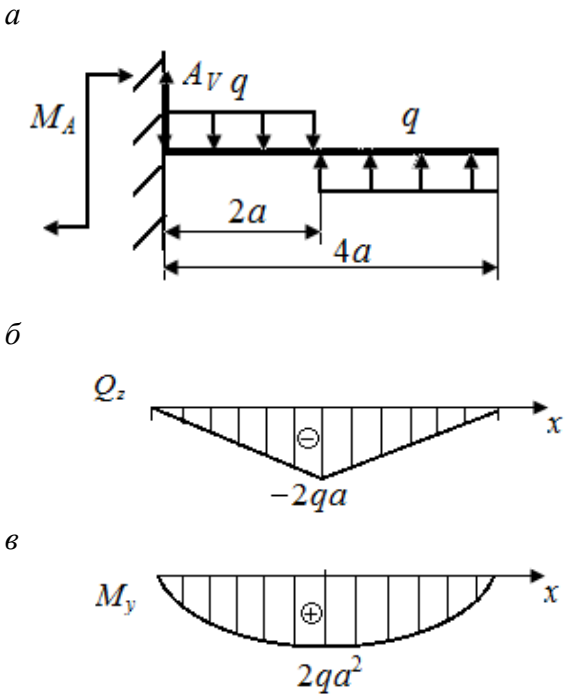


Рис. 55. Схема стержня и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Р.5.10. Из условия статического равновесия стержня определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. 57, *а*: $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$; $-M_A + + M_1 - M_2 + M_3 = 0, M_A = 7M$. На рис. 57, *б* приведена эпюра M_x, построенная по результатам вычислений значений крутящего момента M_x на границах грузовых участков. Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_к}\right|^{\max} = \frac{7M}{W_к}$; $W_к = \frac{\pi r^3}{2}$ ($W_к$ – момент сопротивления при кручении).

Р.5.11. Из условия статического равновесия стержня определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. 58, *а*: $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$; $-M_A + + m \cdot 5a + M = 0, M_A = ma$. На рис. 58, *в* приведена эпюра M_x, построенная

по результатам вычислений значений крутящего момента M_x на границах грузовых участков.

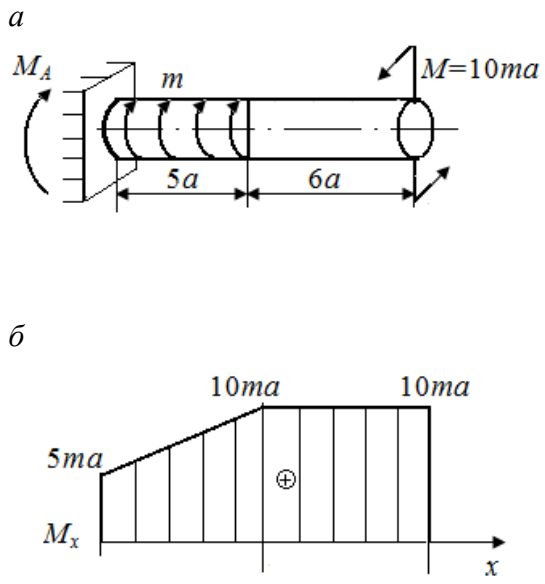


Рис. 56. Схема стержня и эпюра крутящих моментов

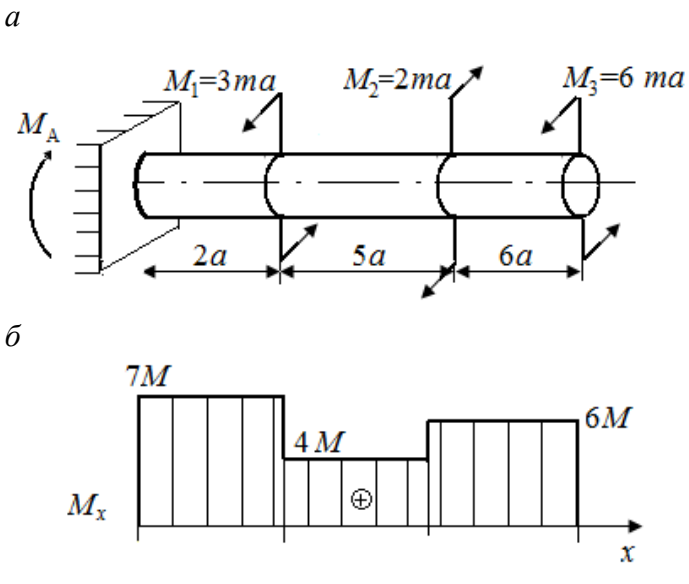


Рис. 57. Схема стержня и эпюра крутящих моментов

Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_к}\right|^{\max} = \frac{6ma}{W_к}$; $W_к = \frac{\pi r^3}{2}$ ($W_к$ – момент сопротивления при кручении).

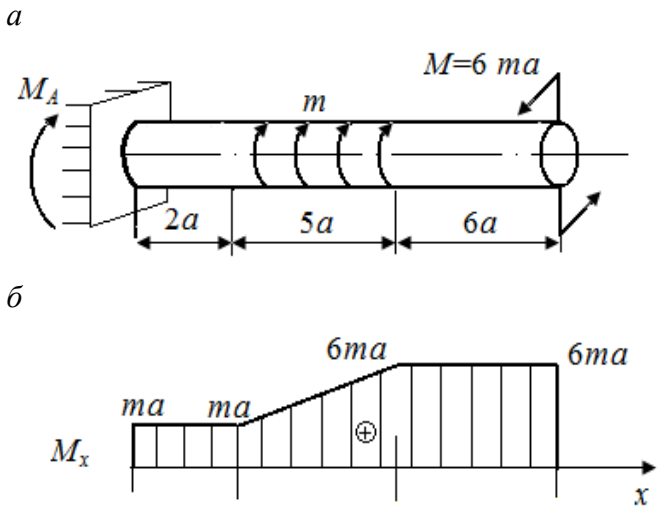


Рис. 58. Схема стержня и эпюра крутящих моментов

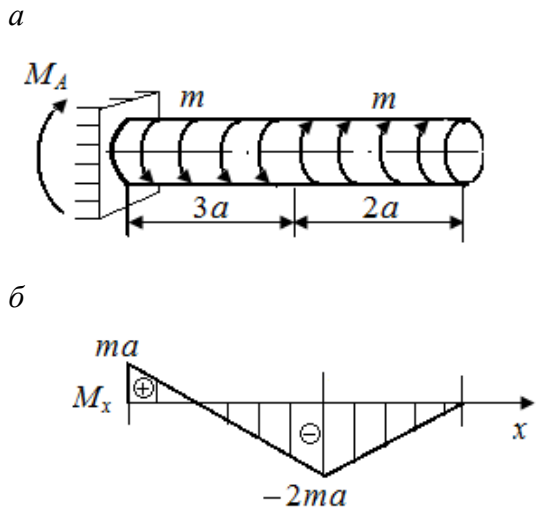


Рис. 59. Схема стержня и эпюра крутящих моментов

Р.5.12. Из условия статического равновесия стержня определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. 59, *а*: $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0$; $-M_A + +m \cdot 3a - m \cdot 2a = 0, M_A = ma$.

На рис. 59, *б* приведена эпюра M_x, построенная по результатам вычислений значений крутящего момента M_x на границах грузовых участков. Экстремальное значение напряжения равно $\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_к}\right|^{\max} = \frac{2ma}{W_к}$; $W_к = \frac{\pi r^3}{2}$ ($W_к$ – момент сопротивления при кручении).

6. Расчет перемещений

Р.6.1. В соответствии с формулами, определяющими перемещения при деформации стержней, представленных на рис. 24, при увеличении длины стержня в два раза перемещение u в точке C увеличится в:а) два раза, т. к. $u_{xc} = \frac{Nl}{EF}, N = P$;б) три раза, т. к. $u_{zc} = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_y}$;в) четыре раза, т. к. $u_{zc} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y}$; г) два раза, т. к. $u_{zc} = \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{EI_y}$.

Р.6.2. В соответствии с формулами, определяющими перемещения при деформации стержней, представленных на рис. 25: 1) при увеличении модуля нормальной упругости в два раза перемещение в точке C уменьшатся в два раза;2) при увеличении радиуса круглого поперечного сечения в два раза: а) перемещение u_{xc} уменьшится в 4 раза, т. к. $u_{xc} = \sum_i N^i \frac{\frac{\partial N^i}{\partial P}}{EF} dx, F = \pi r^2$; б) перемещение u_{xc} уменьшится в 16 раза, т. к. $u_{zc} = \sum_i M_y^i \frac{\frac{\partial M_y^i}{\partial P}}{EI_y} dx, I_y = \frac{\pi r^4}{4}$.

Р.6.3. Перемещение при плоском поперечном изгибе стержня (рис. 25), нагруженного в плоскости *xOz*, обратно пропорционально осевому моменту I_y поперечного сечения стержня. Осевой момент инерции I_y прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b равен $bh^3/12$. Увеличение высоты h сечения в два раза увеличивает I_y в восемь раз. Значит, в восемь раз уменьшается перемещение. Увеличение ширины поперечного сечения в два раза увеличивает I_y в два раза. Значит, в два раза уменьшится перемещение.

Р.6.4. В соответствии с формулой, определяющей угол поворота $\Delta\varphi$ при кручении стержня, представленного на рис. 26, $\Delta\varphi = \sum_i M_x^i \frac{\frac{\partial M_x^i}{\partial M}}{GI_p} dx, I_p = \frac{\pi r^4}{2}$ (M_x^i – выражение для крутящего момента на i–ом грузовом участке; M – внешний момент, приложенный в сечении, где определяется перемещение;

G – модуль нормальной упругости; I_p – полярный момент инерции; r – радиус поперечного сечения).

При увеличении модуля упругости при сдвиге G в два раза, угол поворота уменьшится в два раза. При увеличении радиуса поперечного сечения в два раза, полярный момент инерции I_p увеличивается в 16 раз. Значит угол поворота уменьшится в 16 раз.

Р.6.5. Перемещение при плоском поперечном изгибе стержня, нагруженного в плоскости *xOz*, обратно пропорционально осевому моменту инерции I_y. Осевой момент инерции I_y круглого поперечного сечения типа представленного на рис. 27 определяется по формуле $I_y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$. При увеличении внутреннего радиуса r в 1,2 раза, осевой момент инерции уменьшится в 1,07 раза. Значит, перемещение увеличится в 1,07 раза. При увеличении наружного радиуса R в 1,2 раза, осевой момент инерции увеличится в 2,15 раз. Значит, перемещение уменьшится в 2,15 раз.

Р.6.6. Выражение для осевого момента инерции I_y поперечного сечения стержня, представленного на рис. 28, принимает вид $I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$. При $H = 2h$ и $B = 2bI_y = \frac{2b(2h)^3 - bh^3}{12} = \frac{16bh^3 - bh^3}{12} = \frac{15}{12}bh^3$. При увеличении H в 1,2 раза $I_y = \frac{2b(1{,}2*2h)^3 - bh^3}{12} = \frac{27{,}7bh^3 - bh^3}{12} = \frac{26{,}7}{12}bh^3$. Осевой момент инерции увеличился в 1,8 раз. Значит, перемещение уменьшилось в 1,8 раз. При увеличении B в 1,2 раза $I_y = \frac{2*1{,}2(2h)^3 - bh^3}{12} = \frac{19{,}2bh^3 - bh^3}{12} = \frac{18{,}2}{12}bh^3$.

Осевой момент инерции увеличился в 1,21 раз. Значит, перемещение уменьшилось в 1,21 раз. При увеличении h в 1,2 раза $I_y = \frac{16bh^3 - 1{,}73bh^3}{12} = = \frac{14{,}27}{12}bh^3$. Перемещение увеличилось в 1,2 раза. При увеличении b в 1,2 раза $I_y = \frac{16bh^3 - 1{,}2bh^3}{12} = \frac{14{,}8}{12}bh^3$. Перемещение увеличилось в 1,01 раз.

Р.6.7. Из условия статического равновесия при симметричном нагружении стержня (рис. 60) $A_V = B_V = {}^{P}/_{2}$. Уравнение изогнутой линии стержня принимает вид $u_z(x) = u_{z0} + u'_{z0}x - \frac{Px^3}{12EI_y} + \frac{P\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6EI_y}$. Постоянные u_{z0} и u'_{z0} определим из граничных условий: При $x = 0$ перемещение $u_{z0} = 0$; При $x = l$ перемещение также равно нулю.

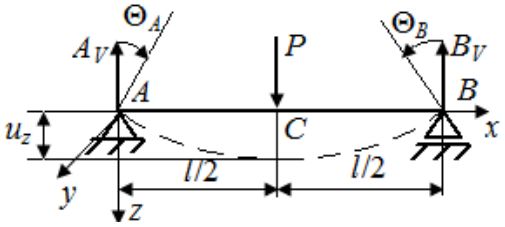


Рис. 60. Симметрично нагруженный стержень

Перемещение $u_z = u'_{z0}l - \frac{Pl^3}{12EI_y} + \frac{P\left(l-\frac{l}{2}\right)^3}{6EI_y} = 0$, и, следовательно, $u'_{z0} = \frac{Pl^2}{16EI_y}$. Угол поворота в точке A $\theta_A = -u'_{z0} = -\frac{Pl^2}{16EI_y}$.

Уравнение углов поворота принимает вид $u'_z = \frac{Pl^2}{16EI_y} - \frac{Px^2}{4EI_y} + \frac{P\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}{2EI_y}$. Перемещение в точке C при $x = \frac{l}{2}$ равно $u_z = \frac{Pl^2}{16EI_y}\frac{l}{2} - \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{12EI_y} = \frac{Pl^3}{48EI_y}$. Величина u'_z при $x = l$ равна $u'_z = \frac{Pl^2}{16EI_y} - \frac{Pl^2}{4EI_y} + \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI_y} = -\frac{Pl^2}{16EI_y}$.

Угол поворота поперечной плоскости, проходящей через точку B

$$\theta_B = -u'_z = \frac{Pl^2}{16EI_y}.$$

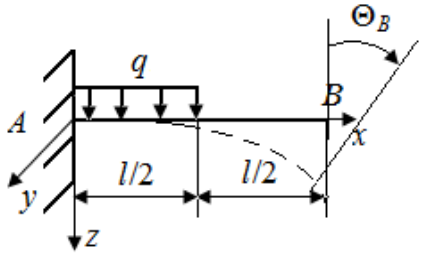


Рис. 61. Стержень, испытывающий плоско-поперечный изгиб

Р.6.8. Из условий равновесия возникающие в заделке стержня (рис. 61) опорная реакция и момент соответственно равны $A_V = q\frac{l}{2}, M_A = \frac{ql^2}{8}$.

В начале отсчета (точка A) в заделке запрещено перемещение и поворот: $u_{z0} = 0$; $u'_{z0} = 0$.

Уравнения упругой линии и углов поворота принимают вид:

$$u_z(x) = \frac{M_A(x-0)^2}{2EI_y} - \frac{A_V(x-0)^3}{6EI_y} + \frac{q(x-0)^4}{24EI_y} - \frac{q\left(x-\frac{l}{2}\right)^4}{24EI_y} =$$

$$= \frac{ql^2x^2}{16EI_y} - \frac{qlx^3}{12EI_y} + \frac{qx^4}{24EI_y} - \frac{q\left(x-\frac{l}{2}\right)^4}{24EI_y};$$

$$u'_z = \frac{ql^2x}{8EI_y} - \frac{qlx^2}{4EI_y} + \frac{qx^3}{6EI_y} - \frac{q\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}{6EI_y}.$$

Параметр $u'_z|_{x=l}$ при $x = l$ равен $u'_z|_{x=l} = \frac{ql^3}{8EI_y} - \frac{ql^3}{4EI_y} + \frac{ql^3}{6EI_y} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI_y} = \frac{ql^3}{48EI_y}$.
Угол поворота поперечной плоскости, проходящей через точку B

$$\theta_B = -u'_z = \frac{ql^3}{48EI_y}.$$

Р.6.9. Уравнения упругой линии и углов поворота для стержня, приведенного на рис. 62, принимает вид

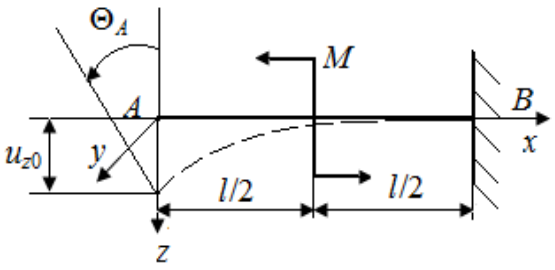


Рис. 62. Нагруженный стержень

$u_z(x) = u_{z0} + u'_{z0}x + \frac{M\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}{2EI_y}$; $u'_z = u'_{z0} + \frac{M\left(x-\frac{l}{2}\right)}{2EI_y}$.

Граничные условия: при $x = l$ в заделке перемещение и угол поворота запрещены: $u_z|_l = 0$; $u'_z|_{x=l} = 0$; $u'_{z0} + \frac{Ml}{2EI_y}$; $u'_{z0} = -\frac{Ml}{2EI_y}$; $\theta_A = -u'_{z0} = \frac{Ml}{2EI_y}$; $u_z|_l = u_{z0} - \frac{Ml^2}{2EI_y} + \frac{Ml^2}{8EI_y}$; $u_{z0} = u_{zA} = -\frac{3Ml^2}{8EI_y}$.

Р.6.10. В стержнях, представленных на рис. 30, на каждый стержень накладывается по четыре связи, а условий статического равновесия, при нагружении стержня в плоскости всего три. Статическую неопределимость можно раскрыть, задав по одному условию, запрещающему перемещение или угол поворота в точке опоры или заделке. Для стержня, представленного на рис. 30, перемещения в точке C или точке B, направленных по оси z, равны нулю: $u_{zC} = 0$ либо $u_{zB} = 0$. Перемещение по направлению оси z (рис. 30, *б*) в точке A $u_{zA} = 0$, либо угол поворота относительно оси y в плоскости, проходящей через точку B $\theta_B = 0$.

Р.6.11. Раскроем статическую неопределимость (рис. 63, *а*) методом уравнивания перемещений: 1. Выбираем основную систему (рис. 63, *б*), которую получаем из заданного стержня с нагрузкой, путем отбрасывания одной лишней связи (связи в точке B); 2. Нагружаем основную систему заданной нагрузкой (рис. 63, *в*) и определяем перемещение в сечении, где была лишняя связь $(u_{zB})_1 = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y}$; 3. Загружаем основную систему реакцией лишней связи (рис. 63, *г*) и определяем перемещение в том же сечении $(u_{zB})_2 = -\frac{1}{48}\frac{Bl^3}{EI_y}$;

4. Составляем уравнение совместности перемещений $(u_{zB})_1 + (u_{zB})_2 = 0$, $\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y} - \frac{1}{48}\frac{Bl^3}{EI_y} = 0, B = \frac{5}{8}ql$;

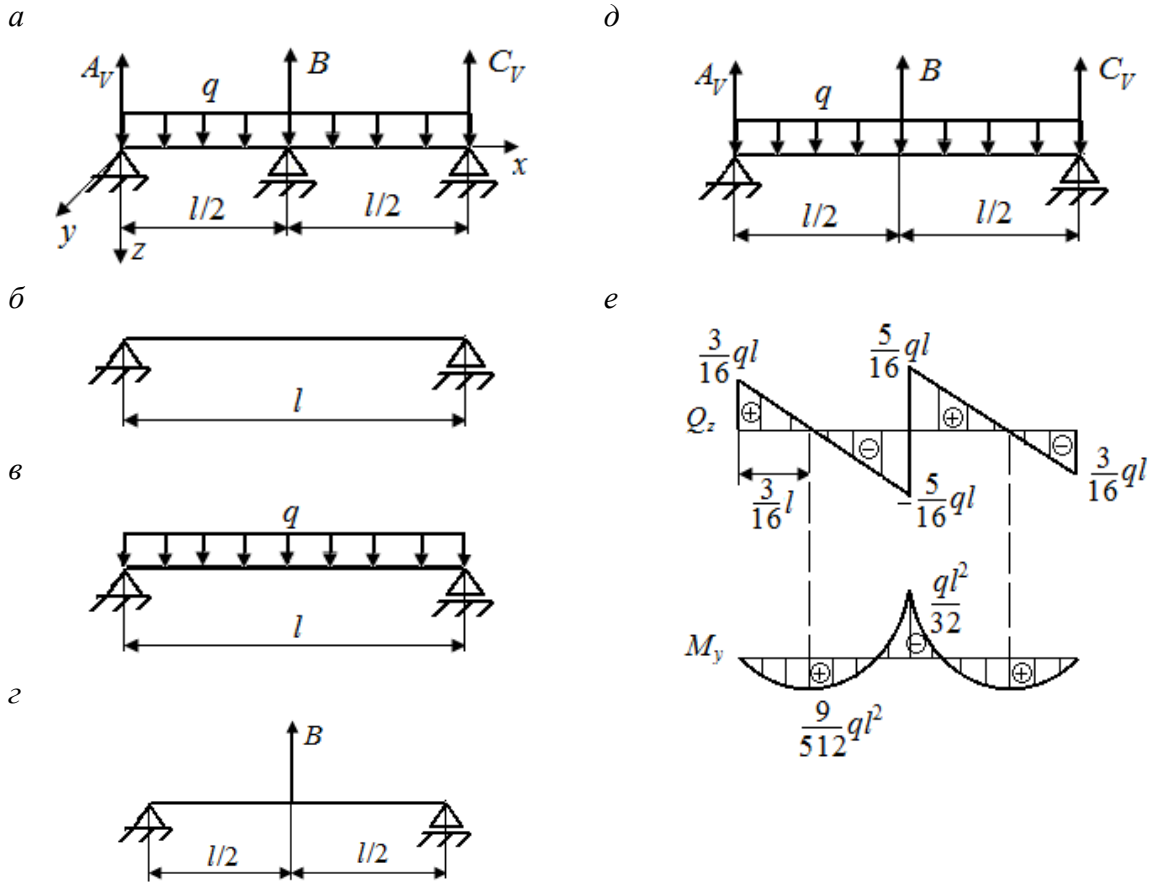


Рис. 63. Решение статически неопределимой задачи методом уравнения перемещений

5. Из условий статического равновесия в системе (рис. 63, *д*) $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0$ определяем опорные реакции $A_V = C_V = \frac{3}{16}ql$ и строим эпюры Q_z и M_y (рис. 63, *е*).

7. Определение динамических параметров при ударе

Р.7.1. Динамические напряжения $\sigma_д$ в элементе конструкции (рис. 32, *а*) определяются по формуле $\sigma_д = k_д\sigma_{ст}$, $\sigma_{ст} = \frac{N}{F}$; $N = Q$, (где $\sigma_{ст}$ – статическое напряжение, N – нормальная сила, F – площадь поперечного сечения, Q – сила тяжести груза, $k_д$ – коэффициент динамичности. Для анализа используем приближенную формулу коэффициента динамичности $k_д = \sqrt{\frac{2h}{u_{zст}}}, u_{zст} = \frac{Nl}{EF}$, (где – статическое перемещение в месте приложения нагрузки, l – длина элемента

конструкции, E – модуль нормальной упругости материала элемента. Динамические напряжения при растяжении стержня равны $\sigma_д = \frac{N}{F}\sqrt{\frac{2hEF}{Nl}} =$ $= \sqrt{\frac{2hNE}{Fl}} = \sqrt{\frac{2hNE}{V}}$. Уменьшение в 4 раза объема стержня или площади его поперечного сечения или длины приводит к увеличению динамического напряжения в два раза, а уменьшение радиуса поперечного сечения в четыре раза приводит к увеличению напряжения в 4 раза. Уменьшение в четыре раза высоты падения груза h, или веса падающего груза Q, или модуля нормальной упругости материала стержня приводит к уменьшению динамического напряжения в два раза.

Динамические напряжения $\sigma_д$ в стержне, представленном на рис. 32, *б*, определяются по формуле $\sigma_д = k_д\sigma_{ст}$, $k_д = \sqrt{\frac{2h}{u_{zст}}}$, ($h$ – высота падения груза Q, $u_{zст}$ – статическое перемещение в месте падения груза под действием силы Q. Статическое перемещение в стержне под действием силы Q (рис. 32, *б*) $u_{zст} = \frac{1}{48}\frac{Ql^3}{EI_y}, I_y = \frac{\pi r^4}{4}$($E$ – модуль нормальной упругости материала элемента, l – длина стержня, I_y – осевой момент инерции, r – радиус круглого поперечного сечения). Коэффициент динамичности равен $k_д = \sqrt{\frac{24hE\pi r^4}{Ql^3}}$. При увеличении параметров E и r в четыре раза динамические напряжения возрастают, соответственно, в два раза и в шестнадцать раз.

Максимальные касательные динамические напряжения на боковой поверхности вала (рис. 32, *в*) при резкой остановке определяются по формуле $\tau_д = 2\sqrt{\frac{TG}{V}}$, ($T$ – кинетическая энергия, G – модуль упругости при сдвиге, V – объем вала). При увеличении в четыре раза длины стержня, или площади поперечного сечения, или объема вала, касательные динамические напряжения $\tau_д$ уменьшатся в два раза. При увеличении модуля упругости при сдвиге G в четыре раза напряжение $\tau_д$ увеличивается в два раза.

Р.7.2. Динамические напряжения в стержне определяются формулой $\sigma_д = \sqrt{\frac{2hNE}{V}}$. При увеличении высоты падения груза в девять раз динамические напряжения вырастают в три раза.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Основные понятия прикладной механики

Внешняя сила – мера взаимодействия физических объектов. Если какое-либо тело рассматривают изолированно от окружающих его тел, то действие последних заменяют внешними силами.

Деформация – изменение формы и размеров тела в результате внешнего воздействия. Деформацию считают упругой, если она исчезает после устранения вызвавшей ее силы. В противном случае, деформацию называют остаточной.

Упругость – свойство тела проявлять упругую деформацию.

Пластичность – свойство тела проявлять остаточную деформацию.

Прочность – способность конструкции или отдельных ее элементов выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции сопротивляться образованию деформаций.

Устойчивость – способность конструкции противостоять воздействиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния равновесия.

По времени действия внешние силы разделяют на постоянные, действующие все время существования изделия, и временные, действующие лишь в течение некоторого промежутка времени.

По характеру действия внешние силы разделяют на статические и динамические. Статические силы сообщают телу малые ускорения, которыми можно пренебречь при исследовании. Динамические силы связаны с возникновением значительных ускорений, которыми пренебрегать нельзя.

Объемные силы распределены по всему объему, занятому телом. Единица объемной силы – ньютон на кубический метр (Н/м^3). Рассмотрим некоторое тело (рис. П1.1). Выделим в нем элементарный объем ΔV, на который действует объемная сила $\Delta\overline{G}$. Среднее значение этой силы находим по формуле

$$\overline{g_c} = \frac{\overline{\Delta G}}{\Delta V}.$$

Значение объемной силы в окрестности точки тела равно

$$\overline{g} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\overline{\Delta G}}{\Delta V}.$$

Объемную силу можно разложить по координатным осям *x*, *y*, *z* на составляющие g_x, g_y, g_z.

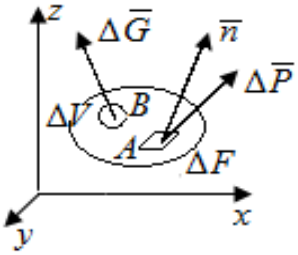


Рис. П1.1. Поверхностная $\Delta\overline{P}$ и объемная $\Delta\overline{G}$ силы, действующие на элементарных участках твердого тела

Поверхностные силы распределены по поверхности. Единица поверхностной силы – ньютон на квадратный метр (Н/м^2). Выделим в некотором теле на его поверхности элементарную площадку ΔF (рис. П1.1). Обозначим через $\Delta\overline{P}$ поверхностную силу, действующую на данной элементарной площадке. Среднее значение поверхностной силы определяется по формуле

$$\overline{p}_{\text{c}} = \frac{\Delta\overline{P}}{\Delta F}.$$

Значение поверхностной силы в окрестности точки тела определяет выражение

$$\overline{p} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta\overline{P}}{\Delta F}.$$

Поверхностную силу можно разложить по координатным осям *x*, *y*, *z* на составляющие p_x, p_y, p_z.

Если поверхность соприкосновения очень узкая, то можно считать, что сила распределена по линии – распределенная сила. Единица измерения распределенной силы – ньютон на метр (Н/м).

Если площадка, на которой действует поверхностная сила, мала по сравнению с поверхностью всего тела, то поверхностную силу можно считать сосредоточенной в точке тела. Единица сосредоточенной силы - ньютон (Н).

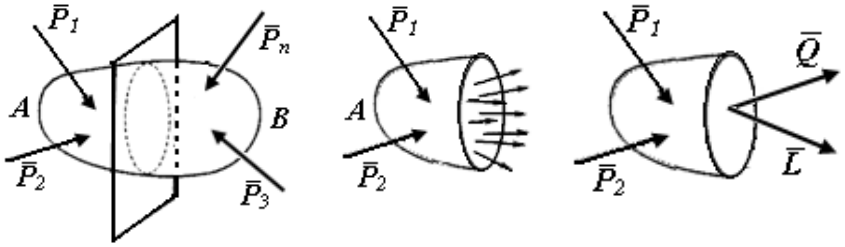


Рис. П1.2. Внутренние силы в сечении твердого тела

Изменение сил взаимодействия между частицами тела вследствие деформации называют внутренними силами, сопровождающими деформацию. В прикладной механике введено допущение, что тело обладает

сплошностью. Для выявления и вычисления внутренних сил применяют метод сечений.

Рассмотрим произвольное тело (рис. П1.2), нагруженное системой сил. Мысленно рассечем его некоторой плоскостью на две части *A* и *B*. В точке с обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия. В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних сил интенсивность внутренних сил в различных точках сечения может быть различна. В соответствии с третьим законом Ньютона силы, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *A*, равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *B*.

Внутренние силы, действующие в сечении, можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения), в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор внутренних сил $\overline{Q}$ и вектор главного момента внутренних сил $\overline{L}$. Для того чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается напряжение.

Рассмотрим сечение *A* некоторого тела (рис. П1.3). В окрестности точки *C* выделим элементарную площадку ΔF ($\overline{n}$ – нормаль к площади сечения). Пусть $\Delta\overline{R}$ – равнодействующая внутренних сил на площадке,

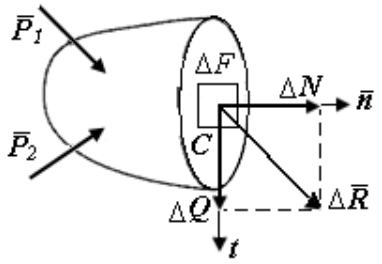


Рис. П1.3. Элементарная площадка в окрестности точки С

$$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta\overline{R}}{\Delta F}=\overline{\sigma}_n,$$

где $\overline{\sigma}_n$ – полное напряжение в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$, единица напряжения - Паскаль (Па).

Как равнодействующую внутренних сил ΔR, так и полное напряжение $\overline{\sigma}_n$ можно разложить на составляющие. Равнодействующую внутренних сил разложим на составляющие ΔN, направленную по нормали к площадке, и ΔQ, касательную к площадке. Полное напряжение разложим на нормальное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$,

$$\sigma_n=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta F}$$

и касательное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке

с нормалью $\overline{n}$ по направлению $\overline{t}$,

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F}.$$

Касательное напряжение имеет два индекса – нормали и касательной к площадке.

Рассмотрим площадку с нормалью $\overline{n}$, взятую в окрестности некоторой точки деформируемого тела (рис. П1.4). Полное напряжение в общем случае не совпадает с направлением нормали. Его проекции на направление нормали $\overline{n}$ и касательной обозначим соответственно σ_n и τ_{nt}, тогда

$$|\overline{\sigma}_n|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2.$$

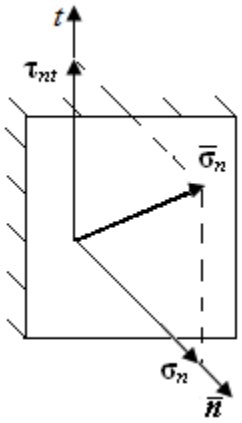


Рис. П1.4. Составляющие σ_n, τ_{nt} полного напряжения на элементарной площадке

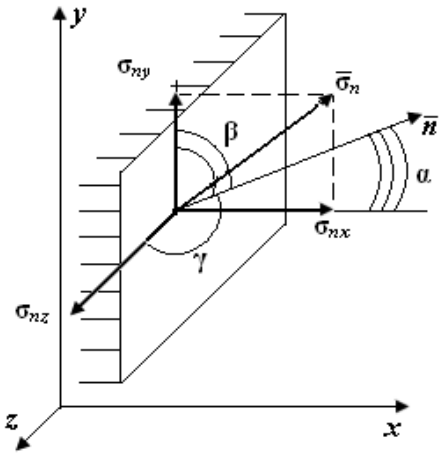


Рис. П1.5. Проекции полного напряжения $\overline{\sigma}_n$ на координатные оси x, y, z

Если нормаль к площадке составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ, то нормальную составляющую напряжений σ_n можно найти через проекции полного напряжения на координатные оси x, y, z (рис. П1.5)

$$\sigma_n = \sigma_{nx} \cos\alpha + \sigma_{ny} \cos\beta + \sigma_{nz} \cos\gamma.$$

При повороте площадки напряжение в окрестности точки деформированного тела изменяется.

Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через эту точку (рис. П1.6). Девять напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ – составляющие полных напряжений, действующих на трех ортогональных площадках в окрестности точки твердого деформированного тела.

Если внешняя нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси координат, то положительные составляющие напряжений направлены в положительную сторону осей координат. Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси координат, то положительные составляющие напряжений направлены в стороны, противоположные соответствующим направлениям осей координат.

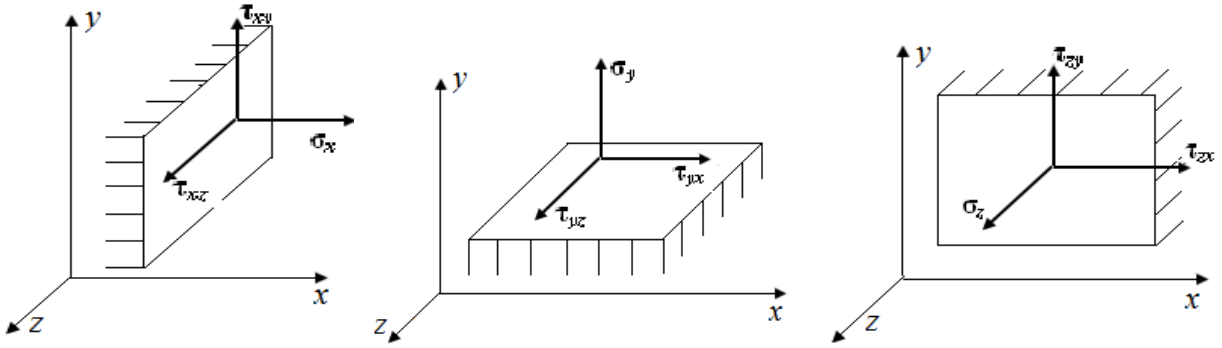


Рис. П1.6. Составляющие напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на трех взаимно перпендикулярных площадках

Напряженное состояние в окрестности тела характеризуется девятью составляющими напряжений, которые обычно записывают в виде тензора напряжений

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Выделим в твердом теле точку A (рис. П1.7). Пусть под действием внешних сил эта точка займет положение A_1. Отрезок AB называют вектором полного упругого перемещения $\overline{u}$. Проекции вектора полного упругого перемещения на оси декартовой системы координат x, y, z обозначают u_x, u_y, u_z и называют составляющими перемещений точки.

Различают два вида деформации тела: относительное удлинение в окрестности точки и относительный сдвиг.

Величина $\varepsilon_r = \left(d_{r_1} - d_r\right)/d_r$ (рис. П1.7) - относительное удлинение в окрестности точки A по направлению r. Относительное удлинение будем считать положительным, если бесконечно малые отрезки увеличиваются по длине.

Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками AB и AC (рис. П1.8). После нагружения тела внешними

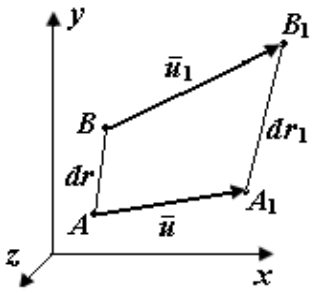


Рис. П1.7. Удлинения в окрестности точки А твердого тела в направлении r

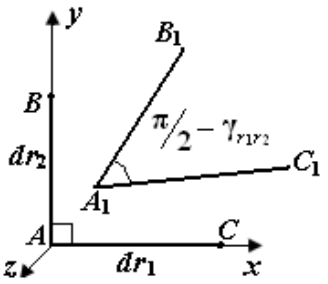


Рис. П1.8. Изменение прямого угла в окрестности точки A при деформации твердого тела

силами этот угол изменяется, принимая значение $\pi/2 - \gamma_{r_1 r_2}$. Величину, равную изменению прямого угла после нагружения между двумя взаимно перпендикулярными направлениями называют относительным сдвигом, углом сдвига или просто сдвигом. Относительный сдвиг считается положительным, если прямой угол уменьшается.

Относительные линейные и угловые деформации в направлении координатных осей x, y, z обозначают $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, а изменение углов между этими отрезками – $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{zy}$ называют составляющими деформации в окрестности точки деформируемого твердого тела. Составляющие деформаций принято записывать в виде тензора, деформации

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Перемещения и деформации зависят от координат точки тела, а напряжения – от координат точки, через которую проходит площадка (сечение), и от ориентации этой площадки. Составляющие напряжений и деформаций характеризуют напряженно-деформированное состояние точки твердого тела.

Три взаимно перпендикулярных нормальных напряжения, действующие в окрестности точки на площадке, на которых отсутствуют касательные

напряжения, называют главными напряжениями:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Три взаимно перпендикулярных направления, между которыми отсутствуют углы сдвига, называют главными осями деформации. Относительные удлинения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ вдоль этих осей называют главными относительными удлинениями.

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность между нормальным напряжением σ_r и относительным удлинением ε_r

$$\sigma_r = E\varepsilon_r.$$

Коэффициент пропорциональности E – модуль нормальной упругости – характеризует свойство материала элемента конструкции сопротивляться деформации растяжения.

Коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и относительным сдвигом – модуль упругости при сдвиге G – характеризует свойство материала элемента конструкции сопротивляться сдвигу одного слоя материала конструкции относительно другого.

Взятое по модулю отношение поперечного относительного сжатия тела к относительному удлинению в пределах соблюдения закона Гука называют коэффициентом Пуассона ν.

Величины E и G выражают в Паскалях (Па).

Модуль нормальной упругости E, модуль упругости при сдвиге G и коэффициент Пуассона ν определяют экспериментально.

Удлинение Δl твердого тела длиной l связано с воздействием температуры соотношением

$$\Delta l = \alpha\, l\, T,$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения.

Если относительное перемещение элементов изделия происходит без деформации, то такую конструкцию называют геометрически изменяемой; если оно происходит только при деформации элементов – геометрически неизменяемой.

При определении механических свойств конструкционных материалов проводят испытания на растяжение, сжатие, кручение и изгиб образцов, форма и размеры которых стандартизированы (рис. П1.9).

Испытания на растяжения выполняют на разрывной машине при нагружении вдоль продольной оси стандартного образца диаметром d_0 и рабочей частью l_0. На рис. П1.10 приведены диаграммы растяжения для пластичного и хрупкого образцов:

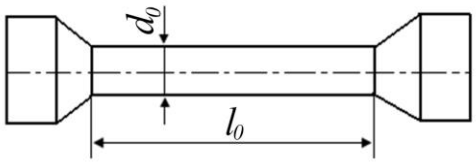


Рис. П1.9. Схема стандартизованного стержня

$P_{пц}$ – максимальная нагрузка до которой зависимость между нагрузкой P и удлинением образца линейна;

а *б*

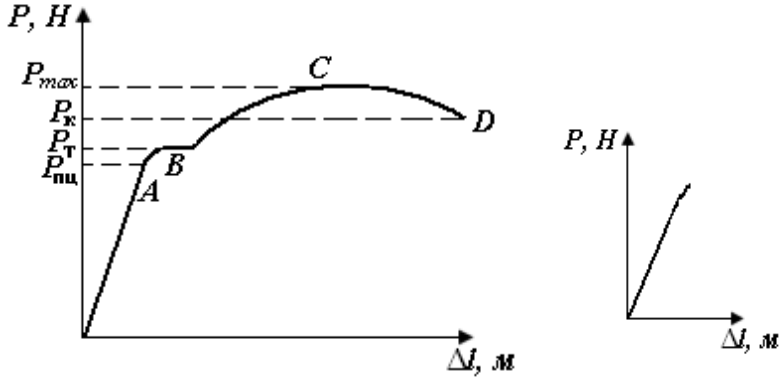


Рис. П1.10. Диаграммы растяжения для пластичного (*а*) и хрупкого (*б*) образцов

$P_т$ – нагрузка, при которой деформация образца происходит без ее увеличения (стадия текучести материала). После стадии текучести наступает стадия упругости материала. На диаграмме участок до точки *C*.

P_{max} – максимальная нагрузка, которую испытывает образец, по достижении которой, деформация локализуется в ослабленном сечении образца.

$P_к$ – нагрузка в момент разрушения образца.

Для суждения о свойствах материала образца строят диаграмму условных напряжений (рис. П1.11) в системе координат $\sigma - \varepsilon$ $(\sigma = \frac{P}{F_0}, \varepsilon = \frac{\Delta l}{l})$, F_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца.

Вычисляют значения механических характеристик материала: характеристик прочности, определяющих способность материала сопротивляться нагрузкам, и характеристик пластичности, определяющих способность материала сопротивляться деформации. Характеристики

прочности: предел пропорциональности $\sigma_{пц} = P_{пц}/F_0$ – напряжение, для которого справедлив закон Гука; предел текучести $\sigma_т = P_т/F_0$ – напряжение, при котором деформации растут без заметного увеличения нагрузки (или составляют 0,2% от длины рабочей части образца); временное сопротивление $\sigma_в = P_{max}/F_0$ – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, предшествующей разрушению образца; истинное напряжение в момент разрыва $\sigma_к = P_к/F_к$. Характеристики пластичности: относительное удлинение после разрыва, %:

$$\delta = \frac{l_к - l_0}{l_0} 100\%,$$

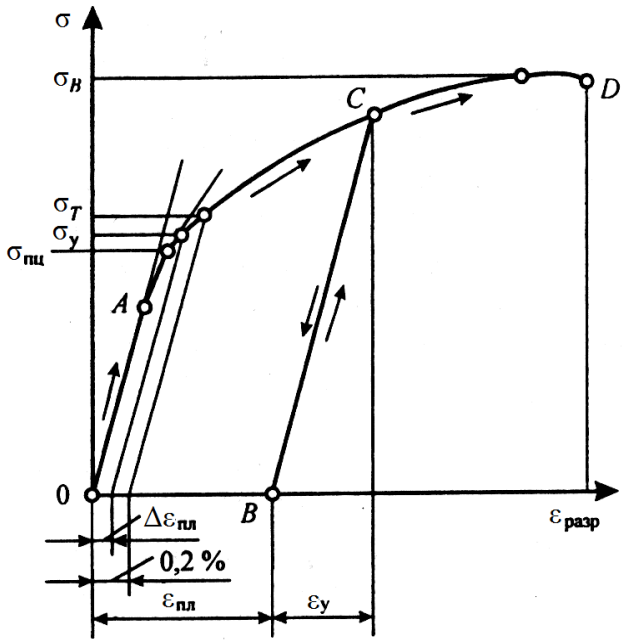


Рис. П1.11. Диаграмма условных нагружений

относительное сужение поперечного сечения образца после разрыва

$$\Psi = \frac{F_к - F_0}{F_0} 100\%.$$

Относительное удлинение ε произвольной точки *C* представляет сумму упругой ε_y и пластической $\varepsilon_{пл}$ деформации. После разгрузки образца упругая деформация ε_y исчезает, а пластическая $\varepsilon_{пл}$ остается.

Для избежания образования в элементах конструкций заметных остаточных напряжений, за величину опасного напряжения $\sigma_{оп}$ для пластичных материалов принимается обычно предел текучести $\sigma_т$.

Для хрупких, а в некоторых случаях и умеренно пластичных материалов за $\sigma_{оп}$ принимают временное сопротивление $\sigma_в$.

Расчет напряжений ведется по наибольшему напряжению σ_{max}, возникающему в некоторой точке нагруженного тела.

Искомые размеры элемента конструкции получают из условия

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], [\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{n}$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, n – коэффициент запаса.

Пример П1.1. Какие возможности при решении задач дает введение допущений сплошности, однородности и изотропности материала конструкций?

Допущение о сплошности материала элемента конструкции позволяет пользоваться методом анализа бесконечно малых (интегрировать, дифференцировать). Оно приемлемо лишь для тел, размеры которых существенно превышают межатомные расстояния.

Допущение однородности материала допускает, что его свойства (физические и механические) неизменны в пределах рассматриваемой области.

Допущение анизотропности позволяет считать, что физические и механические свойства не зависят от угловой ориентации элемента конструкции.

Пример П1.2. На какие составляющие раскладываются приведенные к центру тяжести сечения главный вектор внутренних сил и вектор главного момента внутренних сил (рис. П.1.12). Как их называют?

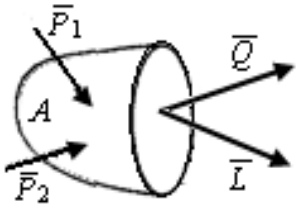


Рис. П1.12. Главный вектор внутренних сил и вектор главного момента внутренних сил на схеме поперечного сечения стержня

При деформации твердого тела нарушается взаимодействие между его частицами. Это приводит к появлению внутренних сил. Для определения этих сил используют метод сечений. При этом внутренние силы можно представить главным вектором внутренних сил $\overline{Q}$ и вектором главного момента $\overline{L}$ (рис. П1.13, *а*).

Для удобства вычислений эти векторы раскладывают на составляющие:

а) главный вектор сил на нормальную силу N и поперечные силы Q_y, Q_z (рис. П1.13, *а*);

б) вектор главного момента на три пары сил с крутящим моментом M_x и

двумя изгибающими моментами M_y и M_z (рис. П1.13, *б*).

а *б*



Рис. П1.13. Составляющие главного вектора внутренних сил (*а*) и вектора главного момента внутренних сил (*б*)

П2. Закрепление стержней. Опорные реакции

Независимые параметры, однозначно определяющие положение абсолютно твердого тела в плоскости и пространстве называют степенями свободы. В плоскости тело имеет три степени свободы (рис. П2.1, *а*), в пространстве – шесть (рис. П2.1, *б*).

а *б*

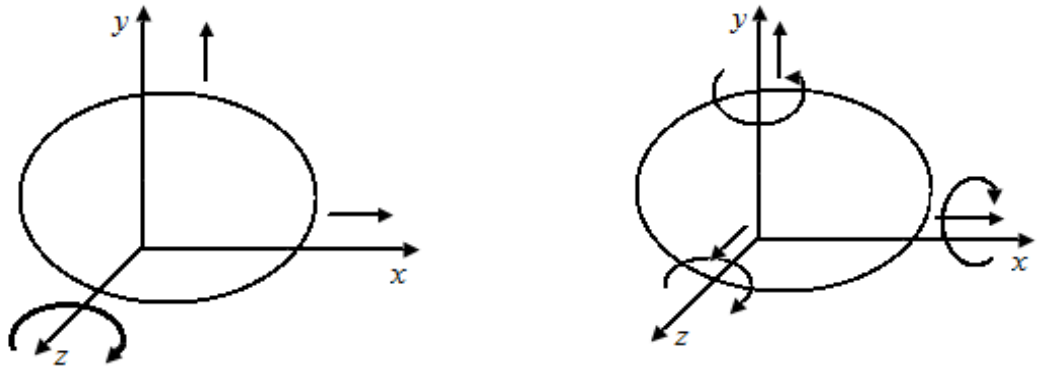


Рис. П2.1. Схема твердого тела с указанием возможных перемещений в плоскости (*а*) и пространстве (*б*)

Для превращения тела в элемент конструкции, способный воспринимать нагрузку, у него нужно устранить хотя бы одну степень свободы. Фактор, устраняющий одну степень свободы называют связью.

Для получения геометрически неизменяемого элемента конструкции, на него необходимо накладывать число связей, равное числу степеней свободы (рис. П2.2).

В геометрически неизменяемых конструкциях на стержни, нагруженные в плоскости, накладываются три связи (рис. П2.2, *а, б*). На расчетных схемах рис. П2.2 приняты условные обозначения для случаев наложения: 1) одной

связи в точке *B* на рис. П2.2, *б*; 2) двух связей в точке *A* на рис. П2.2, *б*; 3) трех связей в точке *A* на рис. П2.2, *г*.

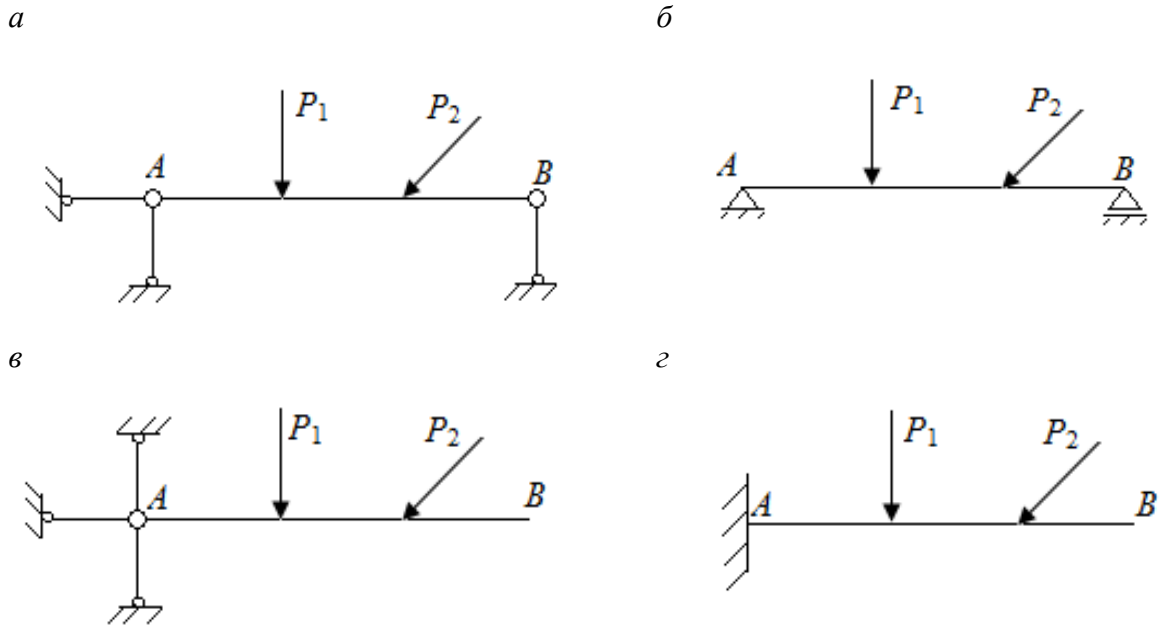


Рис. П2.2. Схемы стержней с различными условиями накладываемых связей

Таким образом, все многообразие опорных устройств конструкций сводят к трем основным видам:

Шарнирно – подвижная опора (рис. П2.3, *а*) – по линии накладываемой связи может возникнуть одна опорная реакция *Ra*.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. П2.3, *б*) – по линиям накладываемых связей могут возникнуть две опорные реакции R_A и H_A.

Защемление (жесткое защемление, заделка (рис. П2.3, *в*) – возникают три составляющие: вертикальная R_A, горизонтальная H_A и опорный момент M_A.

Все реакции и момент считаются приложенными в точке *A* – центре тяжести опорного сечения.

Консолью называют стержень, который не имеет других опор, кроме защемленного конца, или часть стержня, выступающую за опоры (рис. П2.3, *г*).

Введем еще ряд понятий.

Жесткий узел – конструктивный узел, в котором концы всех стержней соединены между собой жестко (рис. П2.3, *е*).

Рама – стержневая система, стержни которой во всех или некоторых узлах жестко соединены между собой (рис. П2.3, *ж*).

Пространственная система – система, способная воспринимать приложенную к ней пространственную систему сил.

Плоская система – система, способная воспринимать нагрузки, которые действуют в одной плоскости (рис. П2.3, *д*).

На схеме стержень принято заменять его осью (рис. П2.3, *г, д*). При этом все внешние силы должны быть приведены к оси стержня.

При анализе расчетной схемы применяют три основных принципа.

Принцип относительной жесткости основан на том, что в большинстве случаев форма тела под действием внешних сил изменяется несущественно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия рассматривать тело как недеформированное, обладающее теми же геометрическими размерами, которое оно имело до нагружения.

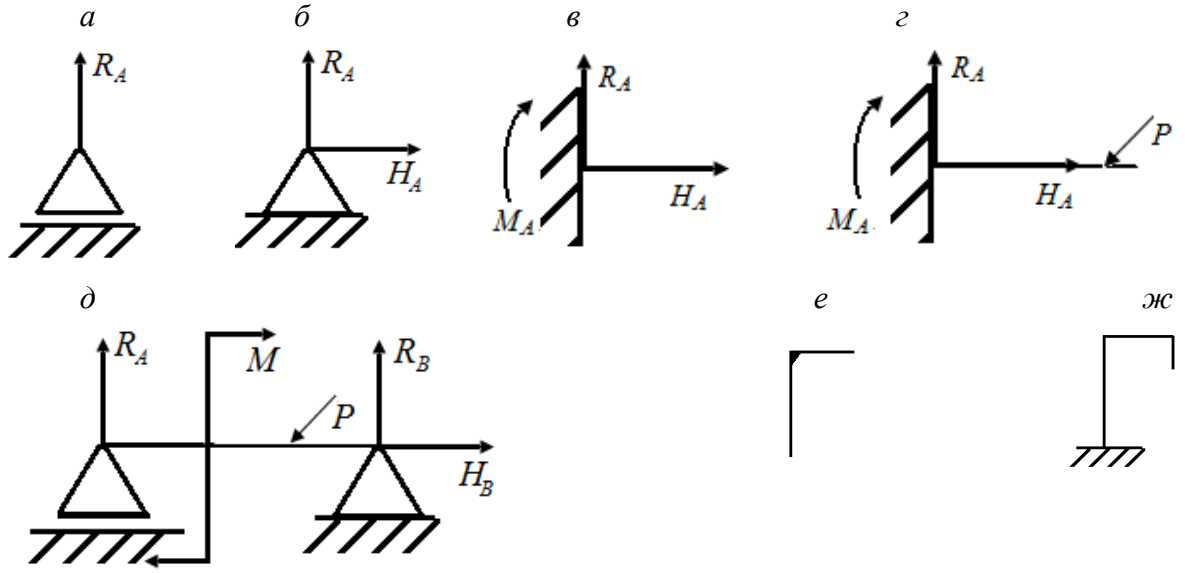


Рис. П2.3. Схемы опорных устройств стержней

Применение принципа суперпозиции при большом числе внешних сил позволяет получить решение как результат наложения частных решений.

Применение принципа Сен-Венана позволяет считать, что если в пределах некоторой области упругого тела приложена система сил, то на расстояниях, существенно превышающих характерные размеры взятой области, напряжения и деформации практически одинаковы для всех статически эквивалентных систем сил.

По линии действия связей при нагружении стержня возникают опорные реакции: усилия по линии накладываемых связей в шарнирных подвижной и неподвижной опорах и две опорные реакции и момент в заделке (рис. П2.4) в

плоскости, проходящей через точку *A* (рис. П2.5)

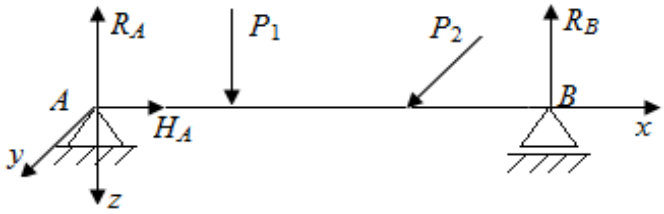


Рис. П2.4. Усилия по линиям накладываемых связей в шарнирных опорах

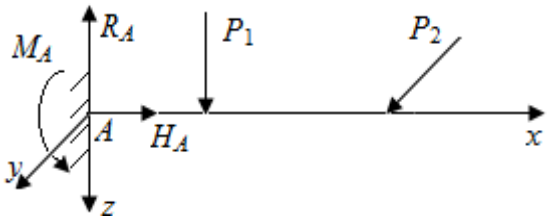


Рис. П2.5. Усилия по линиям накладываемых связей в заделке

В статически определимых системах опорные реакции определяются при раскрытии условий статического равновесия:

а) для плоской системы

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,0)} = 0\,;$$

б) для пространственной системы

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,0)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,0)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,, \sum_{i=1}^{n} M_i^{(z,0)} = 0.$$

Пример П2.1. Достаточно ли условий статического равновесия для определения опорных реакций в стержне, приведенном на рис. П2.6, *а*, *б*?

а *б*

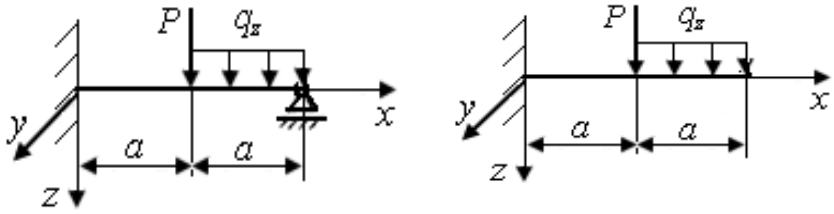


Рис. П2.6. Схемы стержней, нагруженных в плоскости xOz

Стержни, представленные на рис. П2.6, нагружены в плоскости *xOz*. Условия статического равновесия определяются тремя уравнениями, которые позволяют определить три неизвестных опорных реакции.

На стержень, приведенный на рис. П2.6, *а*, накладываются четыре связи.

Система статически неопределима. На стержень, приведенный на рис. П2.6, *б*, накладываются три связи – система статически определима.

П3. Внутренние усилия в сечении стержней

При деформации твердого тела происходит изменение расстояний между его частицами. Это приводит к нарушению взаимодействия между ними и появлению внутренних сил. Для определения этих сил используют метод сечений.

На рис. П3.1, *а* представлен стержень, находящийся под действием внешних сил в состоянии равновесия. Мысленно рассечем стержень плоскостью, перпендикулярной к оси, на две части и рассмотрим внутренние силы, действующие в плоскости его сечения: главный вектором сил $\overline{Q}$ и вектором главного момента $\overline{L}$ (рис. П3.1, *б*).

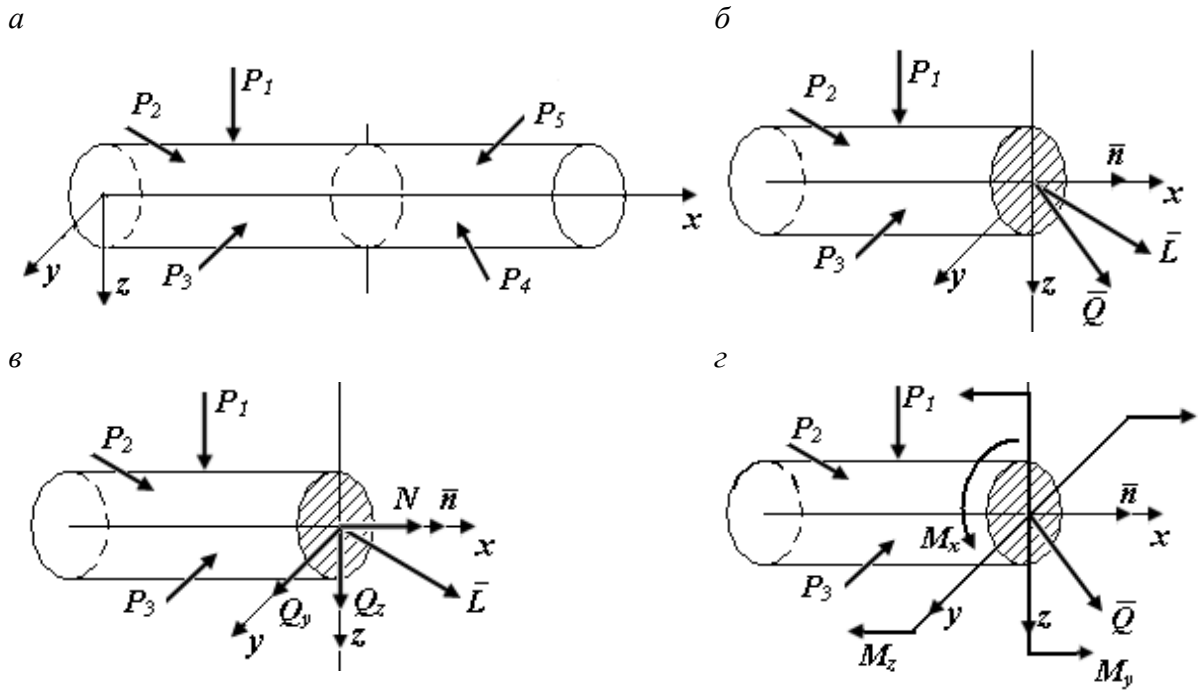


Рис. П3.1. Внутренние усилия в поперечном сечении стержня

Спроецируем силу $\overline{Q}$ и момент $\overline{L}$ на координатные оси x, y, z - $Q_x, Q_y, Q_z, L_x, L_y, L_z$ (рис. П3.1, *в, г*). Силе Q_x присвоим индекс N (нормальная сила), она вызывает растяжение-сжатие стержня. Силы Q_y и Q_z действуют в плоскости поперечного сечения – поперечные силы.

Проекции L_x соответствует пара сил с моментом M_x, действующим в плоскости поперечного сечения. Крутящий момент M_x приводит к деформации кручения.

Проекциям L_y и L_z соответствуют пары сил с моментом M_y и M_z, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных к этим проекциям. Моменты M_y и M_z – изгибающие моменты.

Для составляющих внутренних сил вводят следующее правило знаков:

Если внешняя нормаль к сечению $\overline{n}$ совпадает с направлением оси координат x, то составляющие внутренних сил N, Q_y и Q_z положительны, если они направлены в ту же сторону, что и соответствующие координатные оси. Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x, то составляющие внутренних сил N, Q_y и Q_z будут положительны, если они направлены в стороны, противоположные направлениям соответствующих координатных осей.

Если внешняя нормаль к сечению совпадает с направлением оси x, моменты M_x, M_y, M_z считаются положительными, если они действуют против часовой стрелки при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей. Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x, то моменты M_x, M_y, M_z будут положительны, если они создают вращение по часовой стрелке при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей.

Выделим простейшие виды деформации стержня: осевое растяжение – сжатие ($N \neq 0$); чистый изгиб (в плоскости xOz $M_y \neq 0$, в плоскости xOy $M_z \neq 0$); плоский поперечный изгиб (в плоскости xOz $M_y \neq 0$, $Q_z \neq 0$, в плоскости xOy $M_z \neq 0$, $Q_y \neq 0$).

Пусть стержень нагружен в соответствии с рис. П3.2, *а*.

Выделим из стержня элементарный участок длиной $\mathrm{d}x$ и рассмотрим условия его равновесия (вследствие малости длины элемента силы и моменты можно считать равномерно распределенными).

По рис. П3.2, *б*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,;\ -N + q_x\mathrm{d}x + N + \mathrm{d}N = 0;\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -q_x.$$

По рис. П3.2, *в*

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x)} = 0\,;\ -M_x + m_x\mathrm{d}x + M_x + \mathrm{d}M_x = 0;\ \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = -m_x.$$

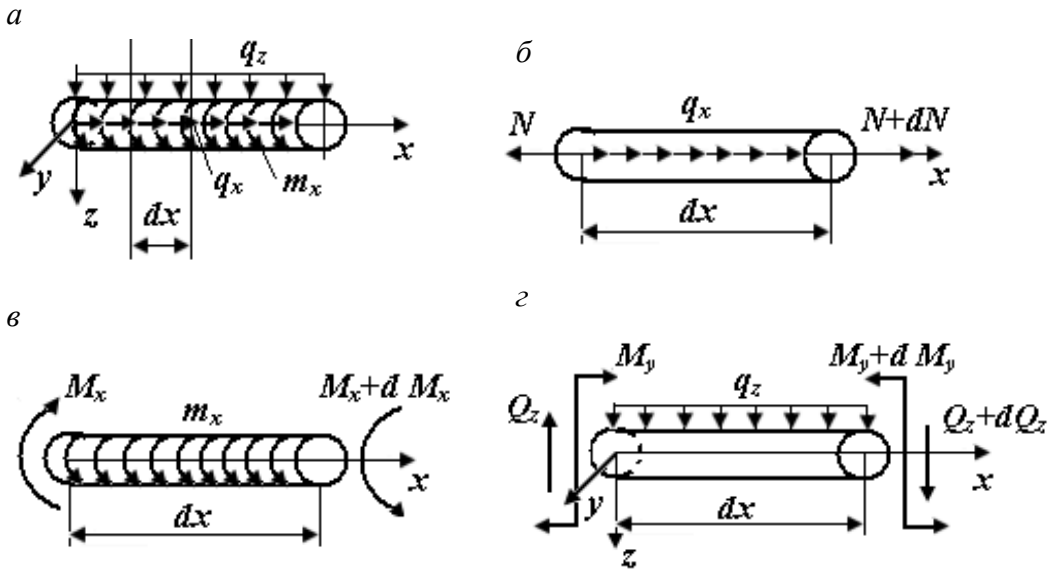


Рис. П3.2. Внутренние силы в сечениях элементарного участка стержня

По рис. П3.2, *г*

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,;\; -Q_z + q_z \mathrm{d}x + Q_z + \mathrm{d}Q_z = 0;\; \frac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}x} = -q_z.$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0\,;\; -M_y - Q_z \mathrm{d}x + q_z \frac{\mathrm{d}x^2}{2} + M_y + \mathrm{d}M_y = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = Q_z;\; \frac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 M_y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Эпюра внутренних сил отражает распределение их по длине стержня. Участок стержня, на границах которого изменяется характер внешних воздействий, называют грузовым. Определив из условия статического равновесия опорные реакции записывают выражения для внутренних сил на каждом грузовом участке, вычисляют значения внутренних сил на границах участков и строят эпюры внутренних сил.

Пример П3.1. Какое правило знаков вводят для составляющих главного вектора внутренних сил?

Когда направление внешней нормали к сечению n совпадает с направлением оси координат x (левая отсеченная часть стержня), то составляющие внутренних сил N, Q_y, Q_z положительны, если они направлены в ту же сторону, что и соответствующие координатные оси (рис. П3.3, *а*).

Когда внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x (правая отсеченная часть стержня), то

составляющие внутренних сил N, Q_y, Q_z будут положительны, если они направлены в стороны, противоположные направлениям соответствующих координатных осей (рис. П3.3, *б*).

а *б*

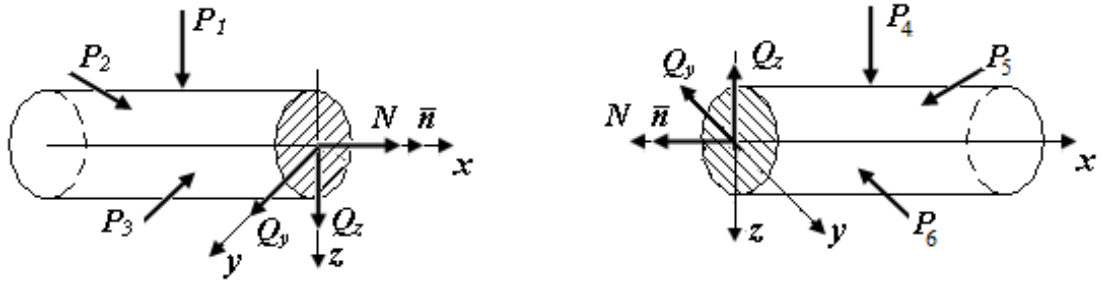


Рис.П3.3. Составляющие главного вектора на схемах левой (*а*) и правой (*б*) отсеченных стержней стержня

Пример П3.2. Какое правило знаков вводят для составляющих вектора главного момента внутренних сил.

а *б*

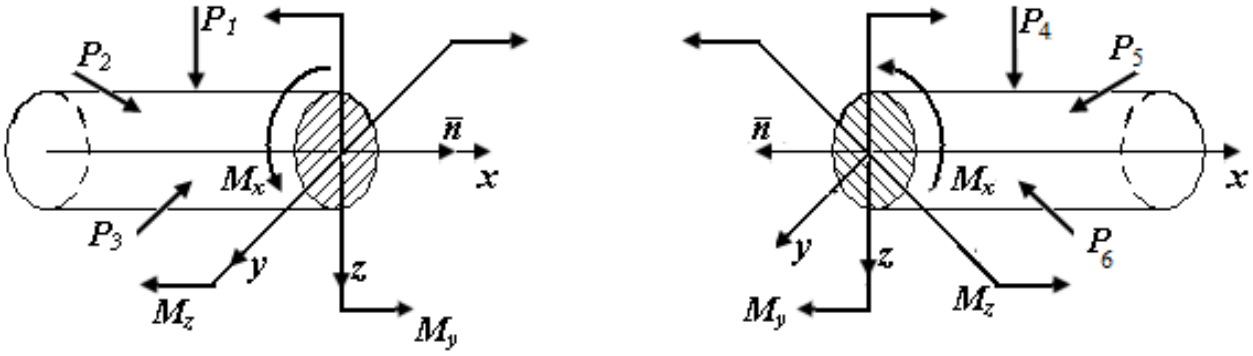


Рис. П3.4. Составляющие вектора главного момента на схемах левой (*а*) и правой (*б*) отсеченных частей стержня

Когда направление внешней нормали к сечению n совпадает с направлением оси x, моменты M_x, M_y, M_z считаются положительными, если они действуют против часовой стрелки при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей (рис. П3.4, *а*).

Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную направлению оси x, то моменты M_x, M_y, M_z будут положительны, если они создают вращение по часовой стрелке при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей (рис. П3.4, *б*).

Пример П3.3. Какая разница между силовыми факторами P, M (рис. П3.5) и внутренними силовыми факторами Q_z и M_y?

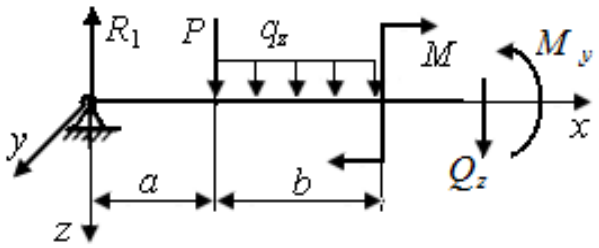


Рис. П3.5. Внешние и внутренние силовые факторы на выделенной части стержня, нагруженного в плоскости *xOz*

Внешние силы выражают меру взаимодействия стержня с другими телами, а внутренние силовые факторы Q_z и M_y – изменение сил межатомного взаимодействия при деформации стержня.

П4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела

Напряжения на наклонной площадке (формулы Коши). Допустим, что известны все составляющие тензора напряжений в точке A деформируемого тела и положение нормали к площадке относительно координатных осей x, y, z задано соответственно углами α, β, γ (рис. П4.1).

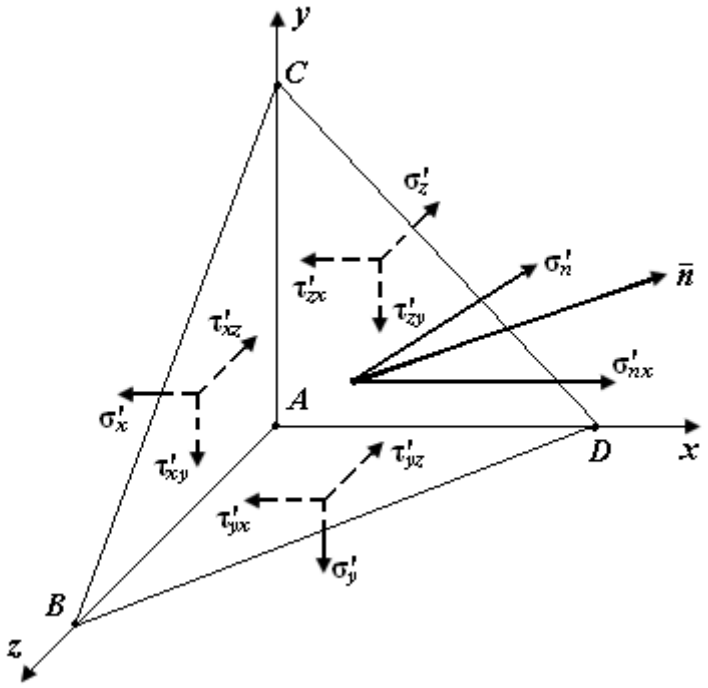


Рис. П4.1. Элементарный тетраэдр в окрестности точки A деформированного тела

Проекции полного напряжения на площадке с нормалью $\overline{n}$ имеют следующий вид (формулы Коши):

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma; \\ \sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma; \\ \sigma_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

С помощью уравнения Коши можно вычислить напряжения на любой известной площадке, проведенной через точку, если известны компоненты тензора напряжений в этой точке.

Дифференциальные уравнения равновесия. Свойство парности касательных напряжений. Из условий статического равновесия элементарного объема в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. П4.2).

Составив уравнение проекций сил, действующих на гранях элементарного параллелепипеда (рис. П4.2), на оси x, y, z:

$$\sum_i X_i = 0, \sum_i Y_i = 0, \sum_i Z_i = 0,$$

получаем систему дифференциальных уравнений, устанавливающих зависимость между составляющими тензора напряжений и проекциями объемных сил на направления осей x, y, z.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Составив уравнение моментов всех сил, действующих на гранях параллелепипеда, относительно координатных осей:

$$\sum_i M_i^{(x,0)} = 0, \sum_i M_i^{(y,0)} = 0, \sum_i M_i^{(z,0)} = 0,$$

получим равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (4.3)$$

отражающие свойство парности касательных напряжений. На двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательного напряжения, перпендикулярное к линии пересечения этих площадок, равны между собой по модулю (рис. П4.3)

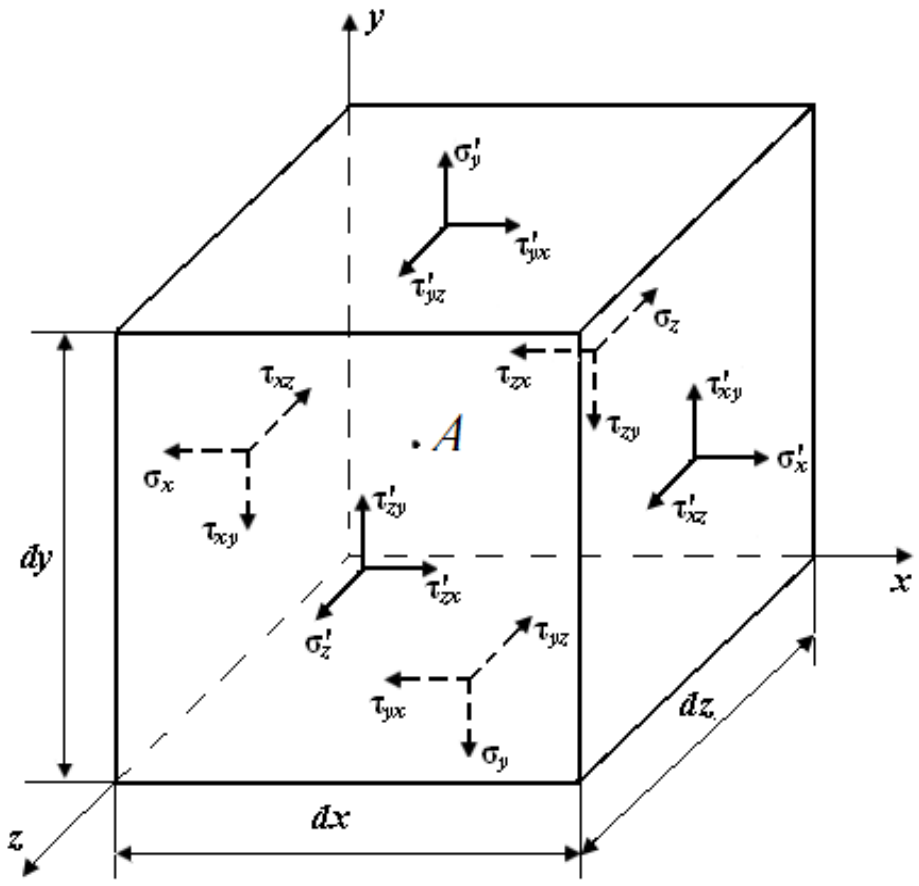


Рис. П4.2. Элементарный прямоугольный параллелепипед в окрестности точки *A* деформированного тела

Число компонент тензора напряжений сокращается с девяти до шести и становится симметричным относительно главной диагонали

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

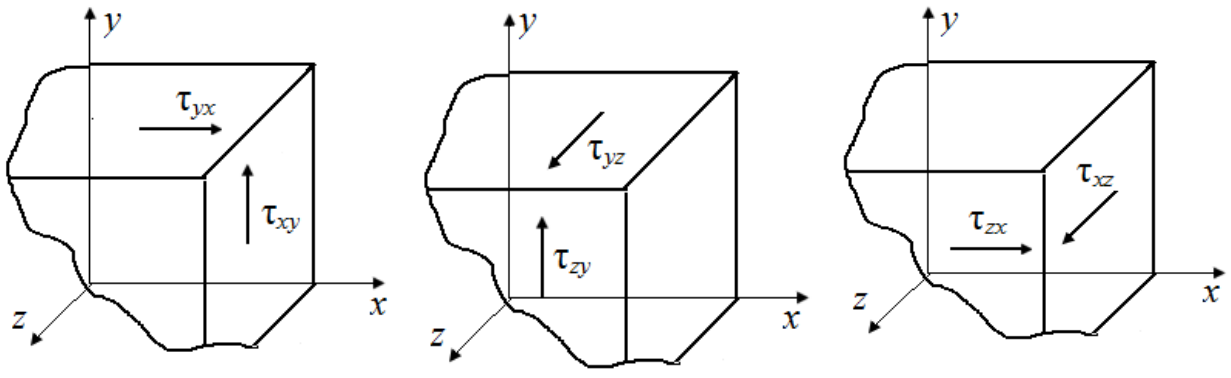


Рис. П4.3. Касательные напряжения на схемах взаимно перпендикулярных площадок прямоугольного параллелепипеда, вырезанного из деформированного тела

Нормальные и касательные напряжения на произвольно ориентированных площадках. Для определения нормальных σ_n или касательных τ_{nk} напряжений на площадке, нормаль $\overline{n}$ к которой составляет углы α, β, γ, а касательная k углы α_1 β_1 γ_1 с осями координат x, y, z в окрестности точки A достаточно спроецировать полное напряжение, действующее на этой площадке, на направления нормали или касательной. Для этого следует напряжения $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ определенные по (4.1) умножить соответственно на косинусы углов α_1, β_1, γ_1.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma +$$
$$+2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha;$$
$$\tau_{nk} = \sigma_x \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sigma_y \cos\beta\cos\beta_1 + \sigma_z \cos\gamma\cos\gamma_1 +$$
$$+\tau_{xy}(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) + \tau_{yz}(\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) +$$
$$+\tau_{zx}(\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1).$$

Если направления n и k лежат в одной плоскости, например, в плоскости xOz (рис. П4.4): $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\gamma_1=\alpha$; $\cos\gamma=-\sin\alpha$; $\cos\alpha_1=\sin\alpha$; $\cos\gamma_1=\cos\alpha$.

Уравнения для σ_n и τ_{nk} принимают следующий вид:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zx}\sin 2\alpha; \qquad (4.4)$$
$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha.$$

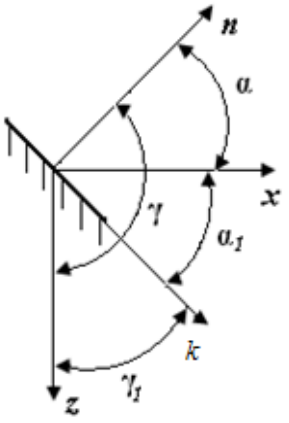


Рис. П4.4. Схема направлений n и k в одной плоскости

Главные площадки и главные напряжения. Экстремальные значения нормальных напряжений. Кубическое уравнение. Площадки, на которых

отсутствуют касательные напряжения называются главными, а нормальные напряжения, действующие на них – главными напряжениями.

Предположим, что одна из таких площадок известна. Полное напряжение на ней σ_n направлено по нормали, которая составляет с координатными осями *x*, *y*, *z* углы α, β, γ (рис. П4.5).

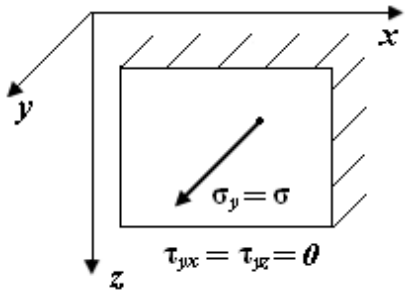


Рис. П4.5. Схема положения главной площадки

Система уравнений определяющая положение главных площадок (если известны главные напряжения), или главных напряжений (если известны главные площадки) имеет вид:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = 0; \\ \tau_{xy}\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma = 0; \\ \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Положение главной площадки определяется углами α, β, γ. На главных площадках реализуются экстремальные значения нормальных напряжений.

Система уравнений (4.5) имеет ненулевое решение, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных косинусах, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - \Theta_I\sigma^2 + \Theta_{II}\sigma - \Theta_{III} = 0. \quad (4.6)$$

Все корни кубического уравнения являются вещественными и определяют нормальные напряжения, действующие на главных площадках. Их обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Принято считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Коэффициенты $\Theta_I, \Theta_{II}, \Theta_{III}$ – инварианты тензора напряжений.

В окрестности точки деформированного тела различают напряженное состояние трех видов: линейное ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), плоское ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = = 0, \sigma_3 \neq 0$), объемное ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$).

Пусть в некоторой точке тела известно положение одной из главных площадок (рис. П4.5, *б*). Ось *x* перпендикулярна к этой площадке. Нормальное (главное) напряжение на ней σ.

Тензор напряжений принимает следующую форму:

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Система уравнений (4.5) имеет вид:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_{zx}\cos\gamma = 0; \\ (\sigma_y - \sigma)\cos\beta = 0; \\ \tau_{zx}\cos\alpha + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0, \end{cases} , \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_y - \sigma & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Возможны два решения системы

1) $\sigma_y - \sigma = 0, \sigma_y = \sigma$ – по условию задачи;

2) $(\sigma_x - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{zx}^2 = 0,\ \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = 0,$

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}\right]. \qquad (4.7)$$

На главных площадках касательные напряжения равны нулю. По (4.5) положение главных площадок определяет выражение:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z}. \qquad (4.8)$$

Касательное напряжение принимает экстремальные значения на площадках, составляющих угол 45^0 с главными площадками. При этом

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}. \qquad (4.9)$$

Связь между деформациями и перемещениями в окрестности точки. Шесть дифференциальных зависимостей, связывают составляющие деформаций с составляющими напряжений (впервые получены Коши и носят его имя):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (4.10)$$

где: u_x, u_y, u_z – проекции перемещений в окрестности точки деформированного тела; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные удлинения по направлению осей *x*, *y*, *z* в окрестности точки; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – углы сдвига в окрестности этой точки между направлениями *xy*, *yz* и *zx*.

Составляющие деформаций зависят друг от друга, так как они являются производными трех произвольных функций. Функции u_x, u_y, u_z – непрерывные, а значит, и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ должны быть такими, чтобы обеспечить эту непрерывность. Условия сплошности тела в процессе деформации можно рассматривать как условия совместности деформаций.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x^2}.$$

Выражения для определения линейной ε_r и угловой $\gamma_{r_1 r_2}$ деформаций в произвольном направлении r и между двумя произвольными взаимно перпендикулярными направлениями $r_1 r_2$ по заданным составляющим тензора деформаций имеют следующий вид:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \\ + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha;$$

$$\gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_x \cos \alpha \cos \alpha_1 + 2\varepsilon_y \cos \beta \cos \beta_1 + 2\varepsilon_z \cos \gamma \cos \gamma_1 + \\ + \gamma_{xy}(\cos \alpha \cos \beta_1 + \cos \beta \cos \alpha_1) + \gamma_{yz}(\cos \beta \cos \gamma_1 + \cos \gamma \cos \beta_1) + \\ + \gamma_{zx}(\cos \gamma \cos \alpha_1 + \cos \alpha \cos \gamma_1).$$

Закон Гука в обобщенном виде. Допустим, что деформируемое твердое тело однородно и изотропно. Тогда в силу однородности связи между напряжениями и деформациями во *всех* точках тела будут одинаковыми, а в силу изотропности при любом нагружении главные оси деформации совпадут с главными осями напряжений. Отсюда можно считать, что главные деформации являются функциями только главных напряжений, а главные напряжения – только главных деформаций:

$$\varepsilon_1 = f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3);\ \varepsilon_2 = f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3);\ \varepsilon_3 = f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \qquad (4.12)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Относительные удлинения по направлению *x*, *y*, *z* и относительные сдвиги между направлениями xy, yz, zx определяет следующие соотношения:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\big[\sigma_x - \nu\big(\sigma_y + \sigma_z\big)\big];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\big[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\big];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\big[\sigma_z - \nu\big(\sigma_x + \sigma_y\big)\big],$$

где $G = E/(2(1+\nu)^2)$ – модуль нормальной упругости при сдвиге.

П5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней

Рассмотрим поперечное сечение стержня, находящегося в состоянии равновесия.

Выделим на нем элементарную площадку и покажем действующие напряжения и внутренние силы (рис. П5.1).

Связь между напряжениями и внутренними силами в сечениях стержней характеризуют следующие интегралы:

$$\int_F \sigma_x\, dF = N;\ \int_F \big(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\big) dF = M_x;\ \int_F \tau_{xy}\, dF = Q_y;$$

$$\int_F \sigma_x\, z\, dF = M_y;\ \int_F \tau_{xz}\, dF = Q_z;\ \int_F \sigma_x\, y\, dF = -M_z.$$

Выражения для напряжений, возникающих в поперечном сечении стержня, нагруженном по торцам, имеют следующий вид:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y;\ I_y = \int_F z^2 dF\,;\ I_z = \int_F y^2 dF\,;$$

$$\sigma_x = 0;\ \sigma_z = 0;\ \tau_{yz} = 0; \qquad (5.1)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} z;\ \ \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_p} y,$$

где F – площадь поперечного сечения, I_y, I_z – осевые моменты инерции сечения относительно осей *y* и *z*.

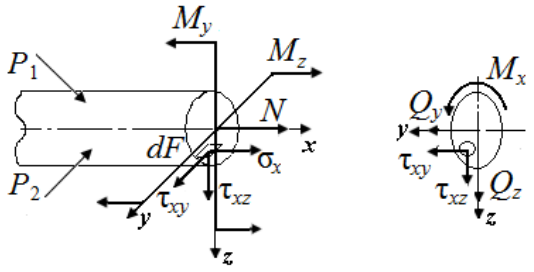


Рис. П5.1. Внутренние силы в поперечном сечении стержня и напряжения на элементарных площадках

Полное касательное напряжение в круглом поперечном сечении в окрестности точки на площадке с нормалью x

$$\tau_x = \sqrt{\tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{xz}} = \frac{M_x}{I_p}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{M_x}{I_p}\rho;\ I_p = \int_F \rho^2 dF, \quad (5.2)$$

где ρ – текущий радиус, I_p – полярный момент инерции.

При осевом растяжении (сжатии) стержня нормальное напряжение

$$\sigma_x = \frac{N}{F}. \quad (5.3)$$

В стержне линейное напряженное состояние. В поперечном сечении напряжения распределены равномерно, если по торцам приложена равномерно распределенная нагрузка и нет резкого изменения сечения тела.

Наличие местных ослаблений (отверстий, выточек) существенно сказывается на напряженно-деформированном состоянии тела. Распределение напряжений в сечениях, близких к месту расположения ослаблений, становится **неравномерным** (рис. П5.2).

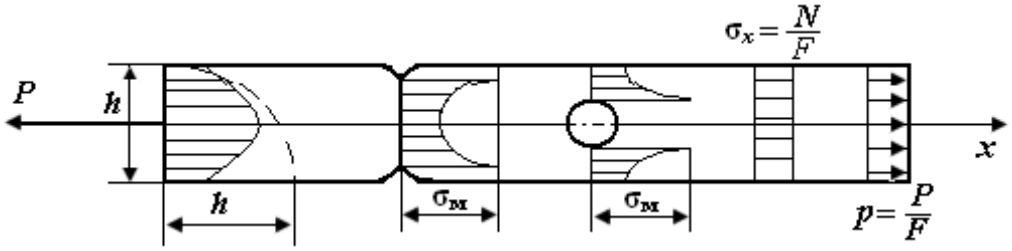


Рис. П5.2. Нормальные напряжения при растяжении стержня с концентрациями напряжений

По мере удаления от сечений, проходящих через центр отверстия и выточек, эта неравномерность постепенно сглаживается (в пределах расстояния, примерно равного наибольшему поперечному размеру стержня). Около отверстия и выточек имеет место концентрация напряжений. Эти местные напряжения можно вычислить так:

$$\sigma_м = \alpha_\Sigma \sigma_x,$$

где $\sigma_м$ – местные напряжения; α_Σ – коэффициент концентрации напряжений.

Чтобы стержень под действием нагрузок не разрушается, необходимо соблюдать условие

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \leq [\sigma];\ [\sigma] = \sigma_{оп}/n\,, n > 1.$$

Значение $[\sigma]$ – допустимого нормального напряжения для данного материала – устанавливают в каждом конкретном случае на основании опытных данных о прочности материала с учетом условий работы объекта. Опасное напряжение $\sigma_{оп}$ зависит от состояния материала: для пластичного состояния за $\sigma_{оп}$ принимают $\sigma_т$, для хрупкого состояния – временное сопротивление $\sigma_в$. Эти механические характеристики материала определяют по диаграмме условных напряжений материала, полученной в результате испытаний.

Рассмотрим кручение призматического стержня с круглым поперечным сечением. При таком характере деформации $M_x \neq 0$. В поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} z;\ \ \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_p} y.$$

Кубическое уравнение принимает вид

$$\sigma(\sigma^2 - \tau_x^2) = 0,$$

и главные напряжения равны $\sigma_{1,3} = \pm\tau_x$, $\sigma_2 = 0$. При кручении в окрестности точек поперечного сечения возникает плоское напряженное состояние – чистый сдвиг.

Полное касательное напряжение возникающее в окрестности точки поперечного сечения

$$\tau_x = -\frac{M_x}{I_p} \rho. \qquad (5.4)$$

Для круглого поперечного сечения выражение для полярного момента инерции принимает вид

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2},$$

где R – наружный радиус поперечного сечения.

Касательное напряжение τ_x изменяется по линейному закону и принимает экстремальное значение в точках наружного контура.

При кручении принимают следующее условие прочности:

$$\tau_x^{\max} = \frac{|M_x|^{\max}}{W_к} \le [\tau]; \quad W_к = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2}, \tag{5.5}$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

При чистом изгибе (рис. П5.3) $M_y \neq 0$, и напряжение

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z.$$

В плоскости *xOy* напряжение равно 0. Такую плоскость называют нейтральной. След нейтральной плоскости на чертеже – нейтральная линия. В окрестности точек поперечного сечения стержня реализуется линейное напряженное состояние, так как $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ниже нейтральной линии и $\sigma_3 = -\sigma_x, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ выше нейтральной линии. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_x^{\max} = \frac{|M_y|^{\max}}{W_y} \le [\sigma]; \quad W_y = \frac{I_y}{z^{\max}}, \tag{5.6}$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, W_y – момент сопротивления при изгибе относительно оси *y* для круглого поперечного сечения

$$W_y = \frac{\pi R^3}{4} \tag{5.7}$$

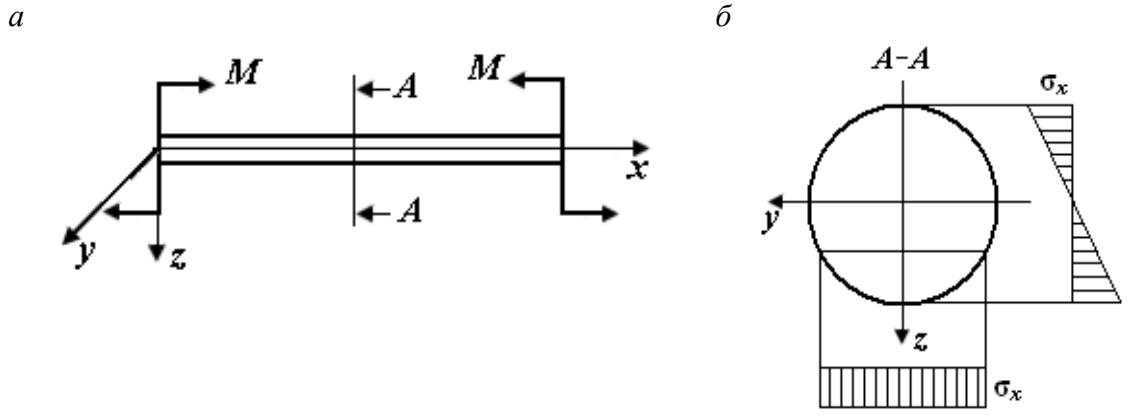


Рис. П5.3. Чистый изгиб стержня: *а* – схема стержня, *б* – распределение нормального напряжения σ_x в поперечном сечении стержня

для прямоугольного

$$W_y = \frac{bh^2}{6}. \tag{5.8}$$

При плоском поперечном изгибе стержня $M_y \neq 0, Q_z \neq 0$. В инженерной практике для расчета нормальных напряжений σ_x используют выражение полученное при чистом изгибе $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$ и вводят допущения, что касательные напряжения τ_{xz} вдоль любой прямой, параллельной оси y распределение равномерно.

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b(z)},$$

где $S_y^* = \int_{F^*} z dF$ – статический момент площадки F^* относительно оси y; $b(z)$ – ширина стержня на расстоянии z от его оси.

Для круглого и прямоугольного сечения формула для τ_{xz} принимает вид: для прямоугольного сечения высотой h и шириной b

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right];\ F = bh;\ \text{при } z = 0\ \tau_{xz}^{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}; \qquad (5.9)$$

для круглого сечения наружного радиуса R

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2\right];\ F = \pi R^2;\ \text{при } z = 0\ \tau_{xz}^{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{F}. \qquad (5.10)$$

При расчете на прочность при растяжении-сжатии стержней можно связать их разрушение, или возникающие пластические деформации с экстремальными значениями единственного, отличного от нуля главного напряжения (σ_1 или σ_3)

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$
$$\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0;$$
$$|\sigma_x|_{\max} \leq [\sigma];\ [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n}.$$

При растяжении, на опасном участке $|\sigma_x|_{\max} = \sigma_1$, а при сжатии $|\sigma_x|_{\max} = \sigma_3$. Для хрупкого напряженного состояния $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{в}}$, для пластичного напряженного состояния $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{т}}$.

В случае плоского и объемного напряженного состояний необходимо учитывать два или три главных напряжений. На возникающие пластические деформации и на разрушение влияют не только эти главные напряжения, но и соотношение между ними.

Высказано несколько предположений о причинах разрушения материала или возникающих пластических деформациях в элементах конструкций:

1. В гипотезе наибольших нормальных напряжений предполагают, что разрушение хрупкого материала происходит в результате того, что самое большое нормальное напряжение в элементе конструкции превышает предельное значение:

$$\sigma_1 \le [\sigma]_{\text{раст}}, \sigma_3 \le [\sigma]_{\text{сж}}.$$

2. В гипотезе наибольших касательных напряжений предполагают, что недопустимые пластические деформации наступают при условии, что $\sigma_1 - -\sigma_3 \le [\sigma]$.

3. В последнее время в инженерной практике для оценки пластического состояния материала наибольшее применение находит теория энергоформообразования:

$$\sigma^{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma].$$

Пример П5.1. Определить опасное сечение и величину экстремального значения напряжения в стержнях круглого поперечного сечения радиуса a, нагруженных в соответствии с рис. П5.4.

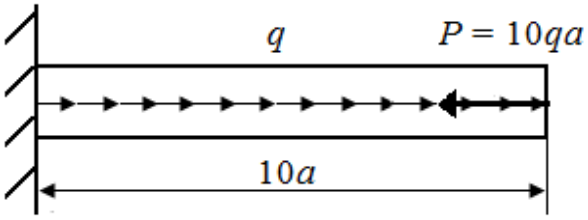


Рис. П.5.4. Схема стержня, нагруженного вдоль его оси

Решение:

1. Определим опорную реакцию в стержне (рис. П5.5, *а*). Из условия статического равновесия.

2. Закон изменения нормальной силы определим из условия статического равновесия (рис. П5.5, *б*)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,;\ -A_H + q \cdot x + N = 0; N = \begin{cases} 0, x = 0 \\ -10qa, x = 10a \end{cases}.$$

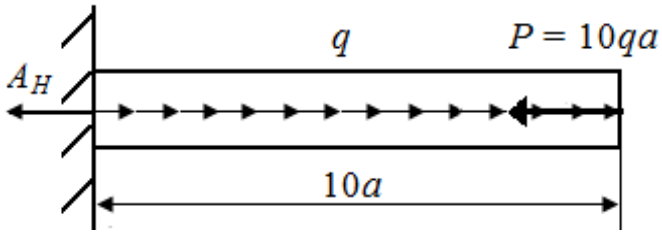
3. Строим эпюр нормальных сил в соответствии с значениями N на границе грузовых участков (рис. П5.5, *в*).

Экстремальное значение

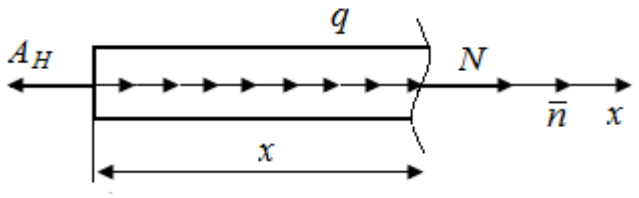
$$\sigma_x^{\max} = \left|\frac{N}{F}\right|^{\max} = \frac{10qa}{\pi a^2} = \frac{10q}{\pi a}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,;\ -A_H + q \cdot 10a - P = 0, A_H = 0.$$

а



б



в

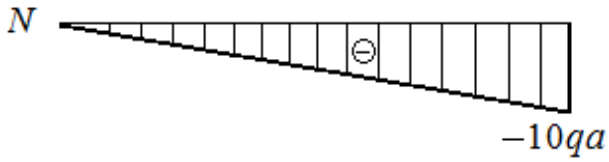


Рис. П5.5. Опорная реакция $A_н$ (*а*), нормальная сила N (*б*) и эпюра нормальной силы в стержне (*в*) (рис. П.5.4.)

Пример П5.2. Определить величину экстремального значения напряжения в стержне круглого поперечного сечения радиуса r, представленного на рис. П5.6.

Решение:

1. Опорные реакции при плоском поперечном изгибе A_V, M_A определим рассматривая два условия статического равновесия (рис. П5.6, *а*):

2. На каждом из грузовых участков для определения закона изменения поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y также рассматриваем два условия статического равновесия (рис. П5.6, *б*).

2.1. $0 \le x \le 10a$

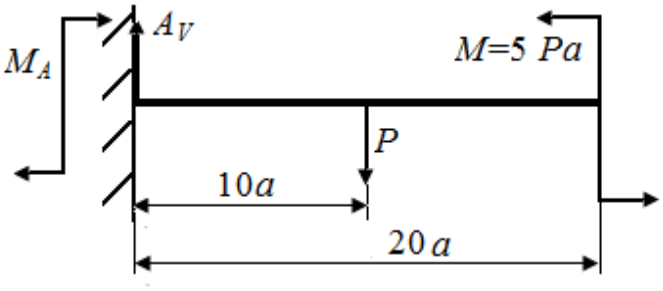
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,;\ -A_V + Q_z = 0; Q_z = \begin{cases} P, x = 0 \\ P, x = 10a \end{cases};$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,0)} = 0\,;\ -M_A - A_V \cdot x + M_y = 0;\ M_y = \begin{cases} -5Pa, x = 0 \\ 5Pa, x = 10a \end{cases}.$$

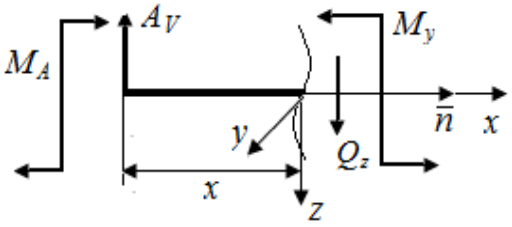
2.2. $0 \le x < 10a$

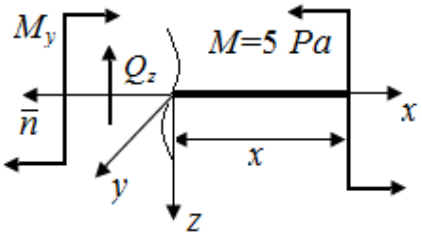
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,;\; Q_z = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 0, x = 10a \end{cases};$$

а



б





в

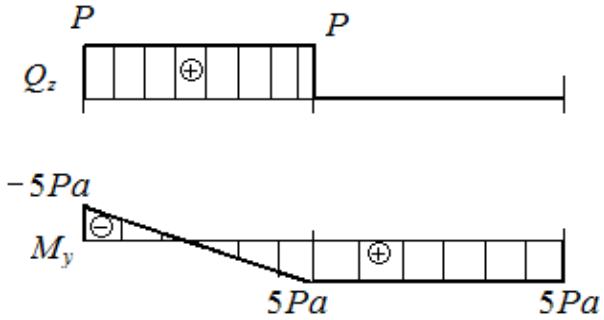


Рис. П5.6. Опорные реакции A_V, M_A (*а*), поперечные силы и изгибающие моменты Q_z, M_y (*б*) на грузовых участках и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (*в*) в стержне, испытывающем плоский поперечный изгиб

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0\,;\; -A_V + P = 0, A_V = P,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,A)} = 0\,;\ -M_A - P \cdot 10a + M = 0, M_A = -5Pa.$$

3. По результатам вычислений Q_z и M_y на границах грузовых участков построены эпюры поперечных сил Q_z и изгибающих моментов M_y (рис. П5.6, *в*). Экстремальное значение напряжения равно

$$\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_y}\right|^{\max} = \frac{15Pa}{W_y};\ W_y = \frac{\pi r^3}{4},$$

где W_y – момент сопротивления круглого сечения при изгибе.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,0)} = 0\,;\ -M_y + M = 0;\ M_y = \begin{cases} 5Pa, x = 0 \\ 5Pa, x = 10a \end{cases}.$$

Пример П5.3. Определить опасное сечение и величину экстремального значения напряжения в стержне круглого поперечного сечения радиуса *r*, нагруженного в соответствии с рис. П5.7

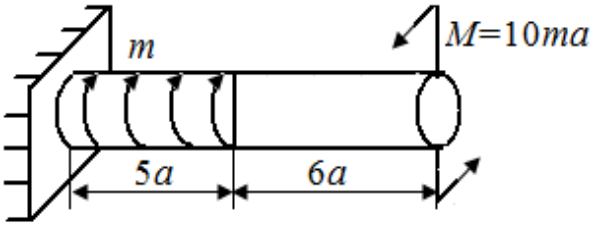


Рис. П5.7. Схема стержня, испытывающего кручение

Решение:

1. Из условия статического равновесия стержня определим опорный момент M_A в стержне, представленном на рис. П5.8, *а*:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,A)} = 0\,;\ -M_A - m \cdot 5a + M = 0, M_A = 5ma.$$

2. Определим значения крутящего момента M_x на границах грузовых участков (рис. П5.8, *б*).

2.1. $0 \le x \le 5a$

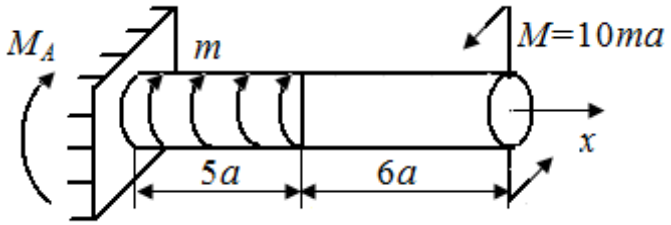
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,0)} = 0\,;\ -M_A - m \cdot x + M_x = 0;\ M_x = \begin{cases} 5ma, x = 0 \\ 10ma, x = 5a \end{cases}.$$

2.2. $0 \le x \le 6a$

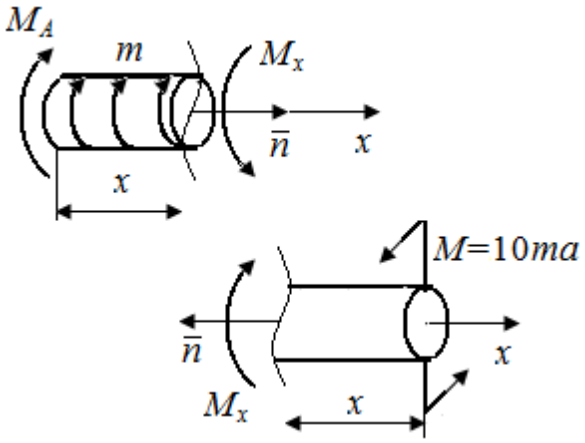
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(x,0)} = 0\,; -M_x + M = 0; M_x = \begin{cases} 10ma, x = a \\ 10ma, x = 6a \end{cases}.$$

3. На рис. П5.8, *в* приведена эпюра M_x, построенная по результатам вычислений значений крутящего момента M_x на границах грузовых участков.

а



б



в

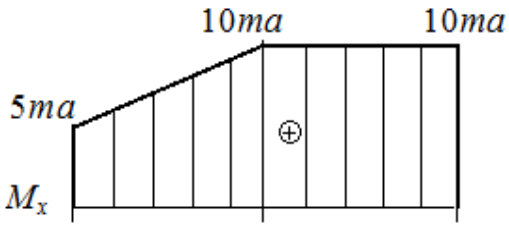


Рис. П5.8. Опорный момент M_A (*а*), крутящие моменты M_x (*б*) на грузовых участках и эпюра крутящих моментов (*в*) в стержне, испытывающем кручение

Экстремальное значение напряжения равно

$$\sigma_x^{\max} = \left|\frac{M_y}{W_к}\right|^{\max} = \frac{10ma}{W_к};\ W_к = \frac{\pi r^3}{2},$$

где $W_к$ – момент сопротивления при кручении.

П6. Расчет перемещений

При инженерных расчетах перемещений в стержне с постоянной изгибной жесткостью EI_y и одним грузовым участком используют полученное при чистом изгибе ($M_y \neq 0, Q_z = 0$) приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \tag{6.1}$$

где u_z – перемещение по направлению оси z в окрестности точки, через которую проходит поперечное сечение, нагруженное изгибающим моментом M_y.

При кручении стержня с постоянной жесткостью GI_p (G – модуль упругости при сдвиге, I_p – полярный момент инерции), угол поворота определяют используя дифференциальное уравнение угла закручивания поперечного сечения стержня

$$\frac{du}{dx} = \frac{M_x}{GI_p}. \tag{6.2}$$

Формула угла закручивания φ_Σ для стержня, имеющего n участков с различными механическими характеристиками материала на каждом i-м участке, при постоянных, в пределах каждого участка, значениях момента M_x, имеет следующий вид:

$$\varphi_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{pi}}$$

Условие жесткости при кручении стержня характеризуется выражением

$$\varphi^{\max} = \frac{|M_x|^{\max} l_p}{GI_p} \leq [\varphi]. \tag{6.3}$$

где $|M_x|^{\max}$ – наибольший по модулю на эпюре M_x крутящий момент; l_p – расчетная длина, на которой определяют угол закручивания; $[\varphi]$ – допустимый на данной длине угол закручивания.

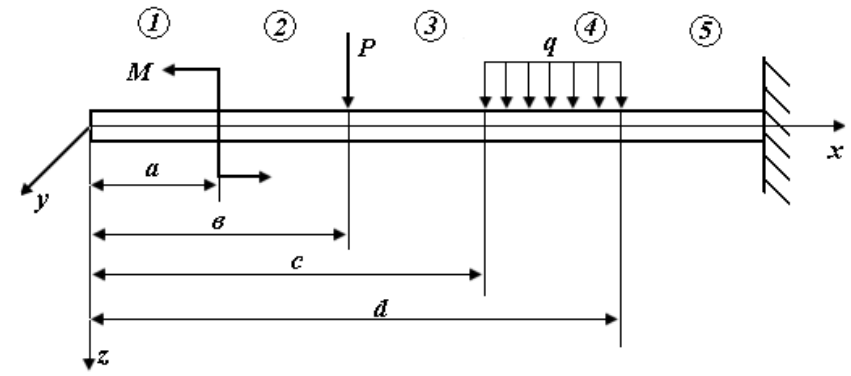
Для упрощения вычислений перемещений разработано несколько методов.

1. Метод начальных параметров.

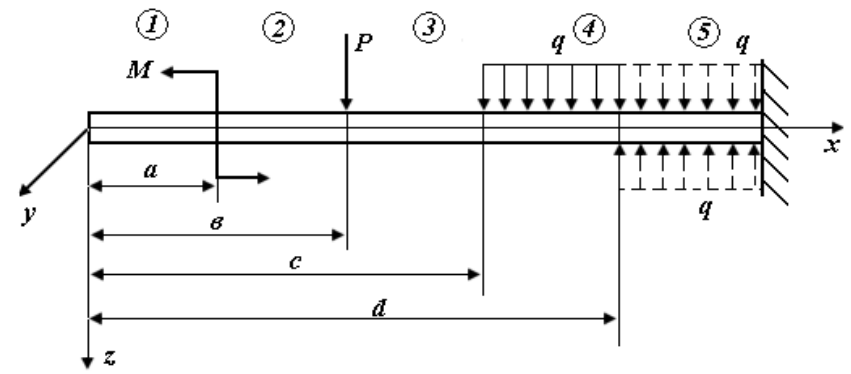
Предположим, стержень (рис. П6.1, *а*) нагружен сосредоточенным моментом *M*, приложенным на расстоянии *a* от левого конца стержня, силой *P*

на расстоянии b и распределенной нагрузкой q на расстоянии c от начала отсчета. Чтобы обеспечить равенство всех постоянных интегрирования на границах грузовых участков, при составлении дифференциальных уравнений упругой линии и их интегрировании соблюдают следующие правила:

а



б



в

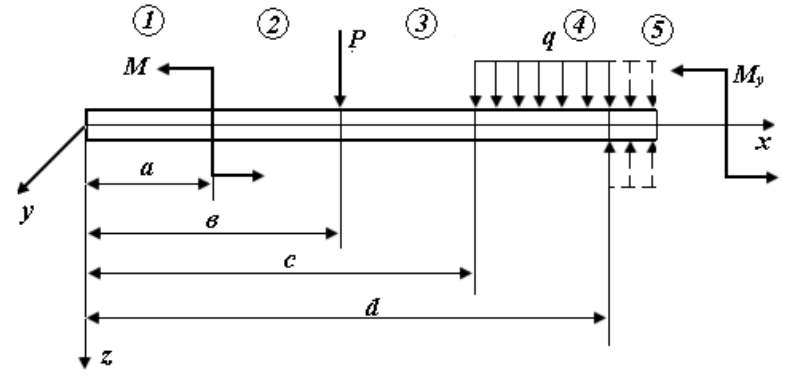


Рис. П6.1. Схема стержня, нагруженного в плоскости *xOz*

1) начало координат выбирают в крайней левой точке стержня;

2) выражение для изгибающего момента M_y составляют применительно к левой отсеченной части стержня;

3) сосредоточенный момент M домножают на $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^0$, что равно единице;

4) распределенную нагрузку продлевают до конца рассматриваемого сечения, а чтобы общий характер внешнего воздействия не изменился, прикладывают «компенсирующую» нагрузку обратного направления (рис. П6.1, *б*);

5) уравнения для всех участков интегрируют, не раскрывая скобок.

Если на стержень действуют несколько сосредоточенных моментов, сил и распределенных нагрузок, выражения для перемещений и углов поворота в произвольном сечении можно представить в следующем виде:

$$u_z(x) = u_{z0} + u'_{z0}x + \sum_k \frac{M_k(x-a_k)^2}{2EI_y} + \sum_j \frac{P_j\left(x-b_j\right)^3}{6EI_y} + \\ + \sum_i \frac{q_i(x-c_i)^4}{24EI_y} - \sum_m \frac{q_m(x-d_m)^4}{24EI_y}; \qquad (6.4)$$

Эти выражения называют универсальными уравнениями упругой линии стержня.

$$u'_z(x) = u'_{z0} + \sum_k \frac{M_k(x-a_k)}{2EI_y} + \sum_j \frac{P_j\left(x-b_j\right)^2}{2EI_y} + \\ + \sum_i \frac{q_i(x-c_i)^3}{6EI_y} - \sum_m \frac{q_m(x-d_m)^3}{6EI_y}. \qquad (6.5)$$

2. Определение перемещений по теореме Кастильяно.

Рассмотрим общий случай нагружения упругого тела. Пусть оно закреплено так, что при нагружении невозможно его смещение как жесткого целого. Тело испытывает деформацию под действием обобщенных сил $P_1, P_2, \dots, P_n$. Энергию упругой деформации выразим функцией этой группы сил:

$$\Pi = \Pi(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Если одной из внешних сил, например P_n, придать небольшое приращение dP_n, то энергия упругой деформации возрастает:

$$\Pi_1 = \Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} dP_n.$$

Возьмем другой случай. Допустим, что сначала была приложена бесконечно малая сила dP_n, вызывающая бесконечно малое перемещение. Работой силы dP_n можно пренебречь, как бесконечно малой величиной второго порядка по сравнению с работой приложенных затем сил $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Потенциальная энергия упругой деформации, вызванной этими силами, по-прежнему равна П. Кроме того, в точке приложения силы P_n произойдет конечное перемещение δ_n, при котором малая сила dP_n, приложенная вначале, совершит работу $\delta_n dP$. В итоге накопленная потенциальная энергия деформации будет равна $\Pi_1^* = \Pi + \delta_n dP_n$.

Потенциальная энергия деформации не зависит от порядка, в котором прикладываются силы, поэтому $\Pi_1 = \Pi_1^*$ и, следовательно,

$$\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} dP_n = \Pi + \delta_n dP_n,$$

откуда

$$\delta_n = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n}.$$

Частная производная от потенциальной энергии упругой деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению точки приложения силы по направлению силы (теорема Кастильяно). Перемещение точки приложения силы по направлению силы – это проекция на направление силы полного перемещения этой точки.

Выделим из стержня элементарный участок длиной dx. В общем случае нагружения в поперечных сечениях стержня возникают шесть составляющих внутренних сил: $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$. По отношению к элементарному участку рассмотрим эти внутренние силы как внешние. Определим работу, совершаемую ими при деформировании элемента. Она равна потенциальной энергии, накопленной в элементарном участке стержня. Допустим, что левое сечение элемента неподвижно. Точка приведения сил в правом сечении перемещается. При этом совершается работа. Полная потенциальная энергия элемента стержня может рассматриваться как сумма независимых работ каждого из шести силовых факторов:

$$d\Pi = d\Pi(N) + d\Pi\big(Q_y\big) + d\Pi(Q_z) + d\Pi(M_x) + d\Pi\big(M_y\big) + d\Pi(M_z);$$

$$d\Pi(M_x) = \frac{M_x^2 dx}{2GI_p};\ d\Pi\big(M_y\big) = \frac{M_y^2 dx}{2EI_y};\ d\Pi(M_z) = \frac{M_z^2 dx}{2EI_z};$$

$$d\Pi(N) = \frac{1}{2}\frac{N^2 dx}{EF};\ d\Pi(Q_y) = k_y \frac{Q_y^2 dx}{2GF};\ d\Pi(Q_z) = k_z \frac{Q_z^2 dx}{2GF},$$

где k_y и k_z – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения.

Потенциальную энергию всего стержня найдем, проинтегрировав выражение:

$$\Pi = \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \int_l \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dx}{2GF} + \int_l \frac{k_z Q_z^2 dx}{2GF}.$$

Пример П6.1. Определить перемещение в точке *C* (рис. П6.2).

Перемещение u_z в точке *C* равно

$$u_z = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_y}{EI_y}\frac{\partial M_y}{\partial P} dx.$$

а *б*

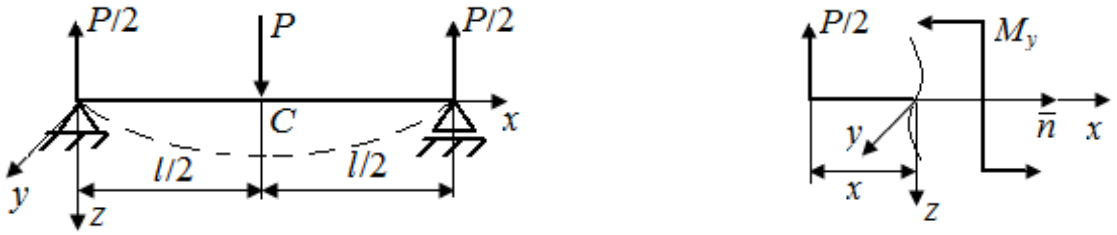


Рис. П6.2. Схема стержня, нагруженного сосредоточенной силой *P* (*а*), и грузового участка с изгибающим моментом *My* (*б*)

$$1.\ M_y = \frac{P}{2}x;\ 2.\ \frac{\partial M_y}{\partial P} = \frac{1}{2};\ 3.\ u_z = \frac{2}{EI_y}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2}x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_y}.$$

Пример П6.2. Определить перемещение в точке *C* (рис. П6.3).

а *б*

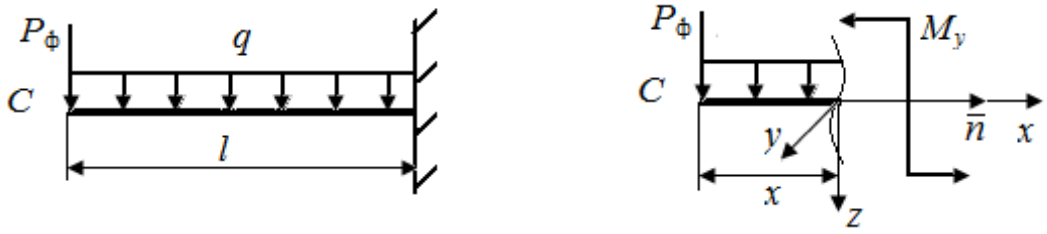


Рис. П6.3. Схемы стержней с распределенной нагрузкой *q* и фиктивной силой $P_ф$ (*а*) и грузового участка с изгибающим моментом M_y (*б*)

При расчете приложим в месте определения перемещения u_z фиктивную силу $P_ф = P$.

$$1.\, M_y = -Px - \frac{qx^2}{2};\ 2.\ \frac{\partial M_y}{\partial P} = -x;\ 3.\, u_z = \frac{1}{EI_y}\int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)\,dx = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI_y}.$$

П7. Определение динамических параметров при ударе

Возникающие при ударе внутренние силы $N_д$, $M_д$, напряжения $\sigma_д$ и удлинения $\Delta l_д$ называют динамическими.

Связь между соответствующими величинами при динамическом и статическом нагружении устанавливают с помощью коэффициентов динамичности $k_д$. Если при ударе напряжения не превосходят $\sigma_{пц}$, то

$$k_д = \frac{\sigma_д}{\sigma_{ст}} = \frac{N_д}{N_{ст}} = \frac{\Delta l_д}{\Delta l_{ст}}.$$

Значение коэффициента динамичности определяют из энергетических соотношений.

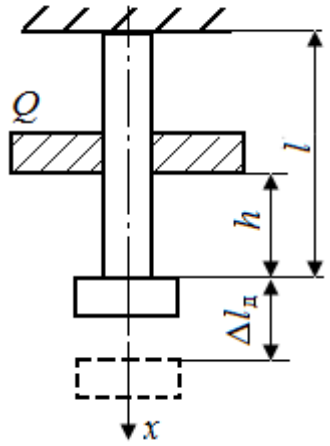


Рис. П7.1. Схема продольной деформации стержня при ударе

При ударе кинетическая энергия $T = Q(h + {+}\Delta l_д)$ ударяющегося тела весом Q, падающего с высоты h (рис. П7.1), к концу удара переходит в потенциальную упругую деформацию стержня $П = {}^1\!/_2\, N_д \Delta l_д$. Если пренебречь рассеиванием энергии, то

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}.$$

Если $2h/\Delta l_{ст} > 10$, то пренебрежение единицей в подкоренном выражении не превышает 5 %, и если $2h/\Delta l_{ст} > 110$, то пренебрежение единицей перед корнем дает погрешность меньше 1 %. Тогда $k_д = \sqrt{2h/\Delta l_{ст}}$, а динамическое напряжение

$$\sigma_д = k_д \sigma_{ст} = \sigma_{ст}\sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{ст}}} = \sqrt{\sigma_{ст}^2 \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}, \quad \Delta l_{ст} = \frac{Ql}{EF}, \qquad \sigma_{ст} = \frac{Q}{F},$$

$$\sigma_{д} = \sqrt{\frac{QE}{V}2h}, \qquad (7.2)$$

где V – объем стержня.

Динамическое напряжение при ударе зависит не только от силы и площади поперечного сечения, но и от свойств материала и от его объема.



Рис. П7.2. Схемы стержней: *а* – переменного поперечного сечения, *б* – постоянного поперечного сечения

На коэффициент динамичности влияние оказывает и форма деформируемого стержня. Рассмотрим стержень, у которого площадь поперечного сечения на разных участках неодинакова (рис. П7.2, *а*), и сравним напряжения в нем с напряжениями в стержне постоянного поперечного сечения при одинаковых ударных нагрузках (рис. П7.2, *б*).

$$\frac{k_{д}^{(a)}}{k_{д}^{(b)}} = \frac{1+\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta l_{ст}^{(a)}}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta l_{ст}^{(b)}}}} \approx \frac{\sqrt{\Delta l_{ст}^{(b)}}}{\sqrt{\Delta l_{ст}^{(a)}}}; \quad \Delta l_{ст}^{(b)} = \frac{Ql}{EF}; \; \Delta l_{ст}^{(a)} = \frac{Q}{E}\left(\frac{2a}{F_1}+\frac{b}{F}\right);$$

$$\frac{k_{д}^{(a)}}{k_{д}^{(b)}} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\dfrac{\beta}{\alpha}}}.$$

Условие прочности стержневого элемента можно выполнить перераспределив $\Delta l_{ст}$ между стержнем ($\Delta l_{с}$) и последовательно включенным в конструкцию значительно более податливым демпфирующим элементом

$$\Delta l_{ст} = \Delta l_{с} + \Delta l_{n},$$

где Δl_{n}, $\Delta l_{с}$ – статические перемещения демпфера и стержня соответственно.

Вычисление динамических напряжений при плоском поперечном изгибе с точностью достаточной для инженерного расчета проводят по аналогичным формулам

$$\sigma_{д} = k_{д}\sigma_{ст}, \quad k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta u_{zст}}}\ ; \quad k_{д} \approx \sqrt{\frac{2h}{u_{zст}}}. \qquad (7.3)$$

При этом, как и при продольном ударе, не учитывают часть энергии, затрачиваемую на сообщение скорости элементам стержня.



Рис. П7.3. Схема вала, испытывающего кручение

Ударные напряжения при кручении обычно возникают в результате быстрой остановки вращающихся элементов конструкции. Допустим, что кинетическая энергия вращающихся элементов конструкции T полностью переходит в энергию упругой деформации П:

$$T = \text{П}.$$

Потенциальная энергия вала радиуса r (рис. П7.3), испытывающего кручения,

$$\text{П} = \frac{1}{2} M_{д} \Delta\varphi_{д} = \frac{1}{2} \frac{M_{д}^{2} l}{G I_{p}}, \qquad (7.4)$$

где $M_{д}$ – динамический крутящий момент; $\Delta\varphi_{д}$ – угол закручивания вала; G – модуль упругости при сдвиге; $I_{p} = \pi r^{4}/2$ – полярный момент инерции. Максимальные динамические касательные напряжения, возникающие на валу определяет выражение

$$\tau_{д}^{\max} = \frac{M_{д}}{W_{к}} = 2\sqrt{\frac{TG}{V}},$$

где $W_{к} = \pi r^{3}/2$ – момент сопротивления вала при кручении; V – объем вала.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…… 3
ЗАДАЧИ……. 3
1. Основные понятия прикладной механики……. 3
2. Закрепление стержней. Опорные реакции…….. 5
3. Определение внутренних усилий в стержнях……. 6
4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела….. 7
5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней……. 10
6. Расчет перемещений……. 13
7. Определение динамических параметров при ударе…….. 16
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ……... 17
1. Основные понятия прикладной механики…….. 17
2. Закрепление стержней. Опорные реакции…….. 20
3. Определение внутренних усилий в стержнях……. 23
4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела….. 25
5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней……. 30
6. Расчет перемещений……. 36
7. Определение динамических параметров при ударе…….. 40
ПРИЛОЖЕНИЕ……. 42
П1. Основные понятия прикладной механики…….. 42
П2. Закрепление стержней. Опорные реакции……... 52
П3. Определение внутренних усилий в стержнях……. 56
П4. Основные уравнения механики твердого деформированного тела.. 60
П5. Расчет напряжений и анализ прочности стержней……. 67
П6. Расчет перемещений…….. 77
П7. Определение динамических параметров при ударе…….. 81

Бегун Петр Иосифович
Лебедева Елена Александровна
Лобачева Дарья Александровна

Задачи прикладной механики

Электронное учебное пособие

Редактор

Подписано в печать. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 3
Гарнитура «TimesNewRoman».Тираж 100 экз. Заказ.....

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5