МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

С. В. ВОРОБЬЕВ О. П. КОРМИЛИЦЫН

АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2017

УДК 539.3 (07)
ББК В251.62я7
В75

Воробьев С. В., Кормилицын О. П.
В75 Анализ статически неопределимых конструкций: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017. 32 с.

ISBN 00

Рассмотрены

УДК 539.3 (07)
ББК В251.62я7

Рецензент:

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 00
© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017

ВВЕДЕНИЕ

ТЕКСТ

4. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

4.1. Метод начальных параметров

При расчете элементов конструкции электронной техники следует также проводить анализ жесткости как конструкции в целом, так и ее отдельных элементов.

Для количественной оценки жесткости конструкции следует определить упругие перемещения элементов конструкции под воздействием внешних нагрузок. Определение перемещений необходимо также при исследовании вопросов колебаний упругих систем.

Для элементов конструкции электронной техники, которые могут быть представлены в виде стержневой расчетной схемы, наибольший интерес представляет определение перемещения оси стержня в плоскости нагружения при чистом или плоском поперечном изгибе.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$\frac{d^2 u_z}{dx^2} = \frac{M_y}{EJ_y}, \qquad (4.1)$$

где u_z – компонента вектора перемещения в направлении оси z (рис. 4.1).

Угол поворота сечений связывается с прогибом зависимостью

$$-\frac{du_z}{dx} = \theta,$$

при этом используется допущение о малости угла $\theta = \mathrm{tg}\,\theta$.

Если жесткость поперечного сечения при изгибе EJ_y постоянна по длине стержня, то прогибы оси и угла поворота различных поперечных сечений могут быть получены непосредственным интегрированием уравнения (4.1) или интегрированием по методу начальных параметров.

Метод начальных параметров удобно использовать при наличии нескольких нагрузок (рис. 4.2), так как при любом числе грузовых участков нужно определить всего две произвольные постоянные интегрирования: прогиб u_{z0} и угол поворота θ_0 в начале координат.

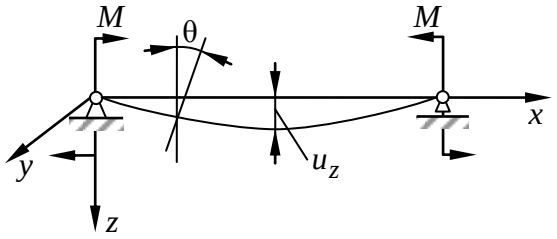


Рис. 4.1

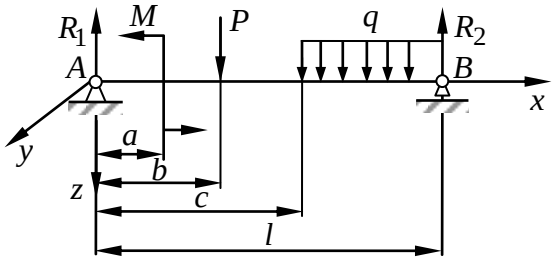


Рис. 4.2

Уравнения метода начальных параметров имеют вид

$$u'_z = -\theta = u'_{z_0} + \frac{\sum\limits_i M_i (x-a)}{EJ_y} + \frac{\sum\limits_j P_i (x-b)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum\limits_k g_k (x-c)^3}{6EJ_y},$$

$$u_z = u_{z_0} + u'_{z_0} x + \frac{\sum\limits_i M_i (x-a)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum\limits_j P_i (x-b)^3}{6EJ_y} + \frac{\sum\limits_k g_k (x-c)^4}{24EJ_y}.$$

При использовании этих уравнений нужно соблюдать следующие условия:

– начало координат помещается в крайнюю левую точку оси стержня;

– знак «плюс» в уравнениях соответствует положительному направлению сил и моментов;

– *a*, *b*, *c* – расстояния от начала координат до точки приложения соответствующей нагрузки (для распределенной нагрузки – до начала участка, где она действует);

– под знак суммирования включаются только те нагрузки, которые лежат левее рассматриваемого сечения;

– если распределенная нагрузка заканчивается ранее сечения, где определяются прогиб и угол поворота, то она должна быть продолжена до указанного сечения и при этом следует добавить к ней нагрузку той же интенсивности, но противоположного знака (рис. 4.3, *а*).

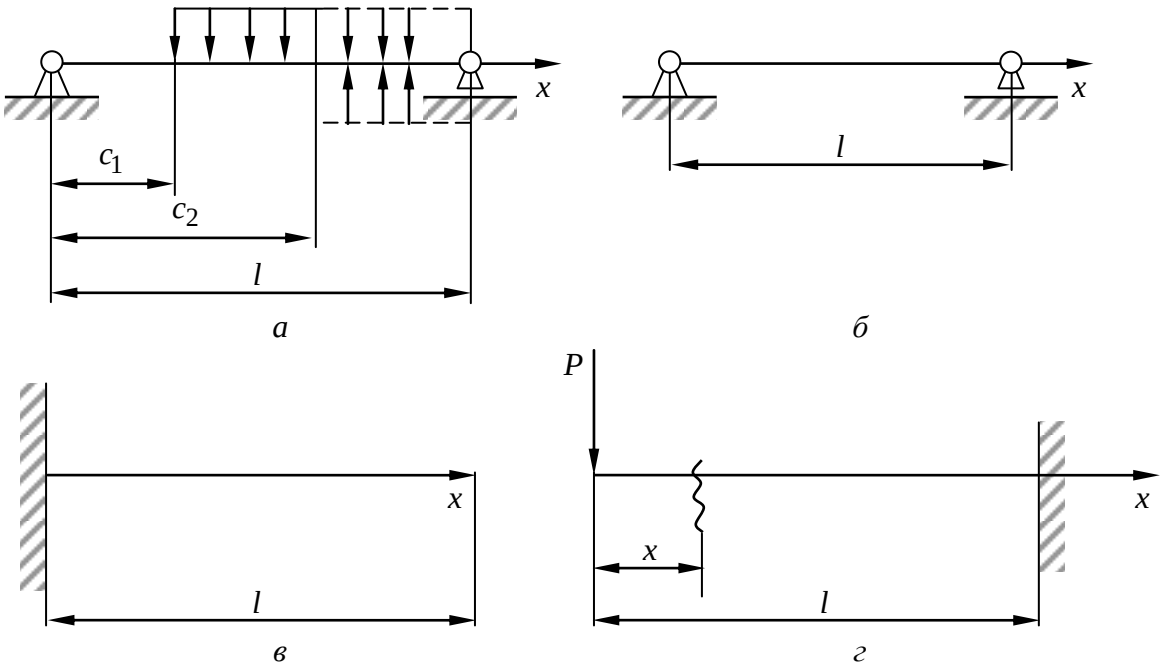


Рис. 4.3

Угол поворота $u_{z_0} = -\theta_0$ и прогиб u_{z_0} в начале балки определяются из граничных условий, которые для наиболее распространенных случаев закрепления могут быть записаны следующим образом (рис. 4.3, *б–г*):

$$\text{при } x = 0\, u_z = u_{z_0} = 0, \quad \text{при } x = l\, u_z = 0;$$

$$\text{при } x = 0\, u_z = u_{z_0} = 0, \quad \text{при } u'_z = u'_{z_0} = 0;$$

$$\text{при } x = l\, u_z = 0, \quad \text{при } u'_{z_0} = 0.$$

Пример 5.1. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой представлена на рис. 5.1, *в*. На стержень, опертый на две опоры, действуют внешние воздействия: $q = 100$ Н/м, $P_1 = 10$ Н, $M = 1$ Н·м, $P_2 = 20$ Н. Общая длина стержня $L = 5l = 0.5$ м. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = \text{const}$. Стержень имеет четыре грузовых участка.

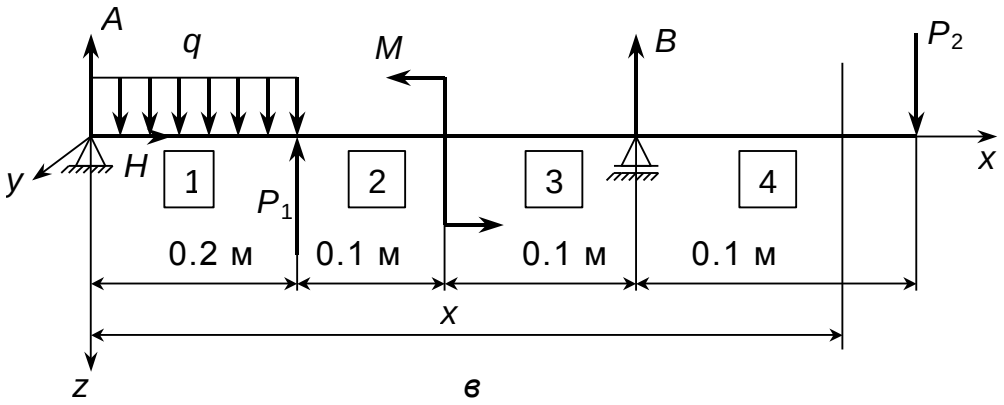


Рис.

Требуется определить линейное перемещение w_C сечения $x = 0.3$ м и угол поворота θ_D сечения $x = 0.4$ м.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z – вниз, а ось y – перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Обозначим на схеме (рис. 5.1, *в*) реакции опор A, H, B.

3. Определим неизвестные внешние силы (реакции опор) из уравнений статического равновесия стержня:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow \quad H = 0;$$

$$\sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow \quad q2l^2 - P_1 2l - M - B4l + P_2 5l = 0 \Rightarrow \quad B = 20 \text{ Н};$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow \; A4l - q2l3l + P_1 2l - M + P_2 l = 0 \Rightarrow \; A = 10 \text{ Н}.$$

4. Запишем выражения для определения прогиба и угла поворота произвольного сечения x стержня на четвертом участке. Для этого воспользуемся уравнениями (5.2) и (5.3):

$$w = w_0 - \theta_0 x + \frac{1}{EJ_y}\left(-\frac{Ax^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{q(x-2l)^4}{24} - \frac{P_1(x-2l)^3}{6} + \right.$$
$$\left. + \frac{M(x-3l)^2}{2} - \frac{B(x-4l)^3}{6} \right); \qquad (5.4)$$

$$-\theta = -\theta_0 + \frac{1}{EJ_y}\left(-\frac{Ax^2}{2} + \frac{qx^3}{6} - \frac{q(x-2l)^3}{6} - \frac{P_1(x-2l)^2}{2} + \right.$$
$$\left. + M(x-3l) - \frac{B(x-4l)^2}{2} \right). \qquad (5.5)$$

Определим из граничных условий начальные параметры w_0, θ_0:

а) $w\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 0;$

б) $w\big|_{x=4l} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = -4l\theta_0 + \frac{1}{EJ_y}\left[-\frac{A(4l)^3}{6} + \frac{q(4l)^4}{24} - \frac{q(2l)^4}{24} - \frac{P_1(2l)^3}{6} + \frac{Ml^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{1.71}{EJ_y}.$$

5. Определим перемещения w_C и θ_D. Воспользуемся формулами (5.4) и (5.5). Окончательно получим:

$$w_{|x=3l} = w_C = -\frac{0.515}{EJ_y}, \qquad \theta_D = -\frac{2.260}{EJ_y}.$$

4.2. Энергетические методы определения перемещения

4.2.1. Работа силы. Понятие об обобщенной силе и обобщенном перемещении

Работа A постоянной по значению силы P, совершаемая ею на упругом перемещении δ точки ее приложения, равна скалярному произведению векторов силы P и перемещения δ:

$$A = (P, \delta).$$

Если сила P изменяется вместе с δ и между ними существует определенная зависимость $P(t) = f(\delta(t))$, то работа, совершаемая этой силой, может быть найдена следующим образом. Рассматриваем два близких момента времени. В первом из них имеем $P(t)$ и $\delta(t)$, а во втором – $P(t) + dP(t)$ и $\delta(t) + d\delta(t)$. Работа, совершаемая силой за отрезок времени между этими моментами, равна

$$dA = P(t)\,d\delta(t).$$

Работа, совершаемая силой $dP(t)$ на перемещении $d\delta(t)$, является величиной второго порядка малости, и ею можно пренебречь. Отсюда

$$A = \int_0^{\delta} P(t)\,d\delta(t) = \int_0^{\delta} f(\delta(t)\,d\delta(t)).$$

Если зависимость между силой и перемещением линейная, т. е. $P(t) = \alpha\delta(t)$ и, в частности, в конце роста силы $P = \alpha\delta$, то работа A представляется в виде

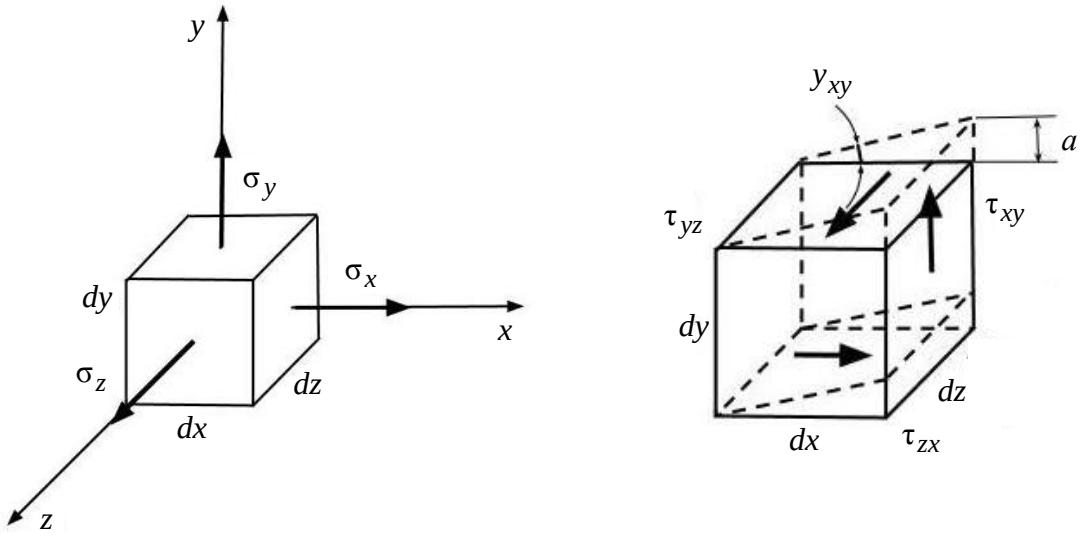
$$A = \int_0^{\delta} \alpha\delta(t)\,d\delta(t) = \frac{\alpha\delta^2}{2} = \frac{1}{2}P\delta.$$

Введем понятие обобщенной силы и обобщенного перемещения. Любая система уравновешенных сил есть обобщенная сила. Перемещение в направлении обобщенной силы есть обобщенное перемещение.

4.2.2. Потенциальная энергия твердого тела

Потенциальная энергия деформации, если не учитывать потери, равна работе силы на перемещение. В твердом деформированном теле в окрестности точки, где известны составляющие напряжений, выделим бесконечно малый элемент *dx*, *dy*, *dz*.

На рис. 4.4, *а* показаны нормальные составляющие напряжений, на рис. 4.4, *б* – касательные составляющие напряжений, действующие на выделенный элемент.



а *б*

Рис. 4.4

В соответствии с принципом (независимость действия сил) работа (потенциальная энергия деформации) сил, действующих на грани $dy\,dz$ выделенного элемента, равна:

$$\frac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz\,\Delta dx+\frac{1}{2}\tau_{xy}\,dy\,dz\,a,$$

где $\sigma_x\,dy\,dz$ – сила, действующая на грани $dy\,dz$ выделяемого элемента в направлении оси координат *x*; Δdx – удлинение элемента в направлении оси координат *x* (перемещение); $\tau_{xy}\,dy\,dz$ – сила, действующая по касательной к грани $dy\,dz$ выделенного элемента; a – сдвиг грани (перемещение).

Учитывая, что $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx}$, $\operatorname{tg}\gamma_{xy} = \dfrac{a}{dx} \cong \gamma_{xy}$ (ввиду малости угла сдвига), потенциальная энергия деформации от сил, действующих на грани $dy\,dz$ выделенного элемента, может быть записана как

$$\frac{1}{2}\sigma_x\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_x + \frac{1}{2}\tau_{xy}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{xy}.$$

Аналогично потенциальная энергия деформации запишется от сил, действующих на гранях $dx\,dz$ и $dx\,dy$ выделенного элемента:

$$\frac{1}{2}\sigma_y\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_y + \frac{1}{2}\tau_{yz}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{yz},$$

$$\frac{1}{2}\sigma_z\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{zx}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{zx}.$$

Потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема равна

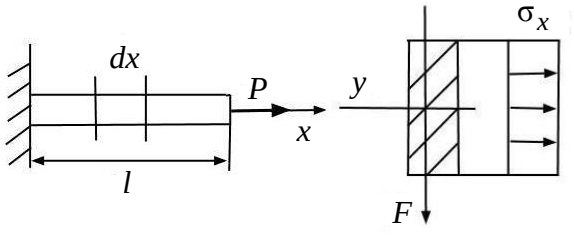
$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right).$$

В полученное уравнение потенциальной энергии деформации вместо линейных и угловых деформаций подставим их выражения из закона Гука. В результате получим:

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right).$$

4.2.3. Потенциальная энергия стержня при различных видах деформации

На рис. 4.5, *а* показан стержень, испытывающий деформацию растяжения-сжатия. На рис. 4.5, *б* распределение составляющих напряжений σ_x по сечению стержня. Выделим в стержне элемент длиной *dx*.



а *б*

Рис. 4.5

При растяжении-сжатии $\sigma_x = \dfrac{N}{F}$, отсюда потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема стержня при деформации растяжения-сжатия

$$U_{0(N)} = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{N^2}{2EF^2}.$$

Потенциальная энергия деформации элементарного объема стержня длиной *dx*

$$U_{ax(N)} = \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

Потенциальная энергия деформации всего стержня длиною l

$$U_{(N)} = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

На рис. 4.6, *а* изображен стержень, испытывающий деформацию кручения; на рис. 4.6, *б* показано распределение действующих напряжений по сечению.

При деформации кручения полное касательное напряжение составляет

$$\tau_x = \frac{M_x}{J_\rho}\rho.$$

Потенциальная энергия деформации единицы объема, выделенного элемента стержня длиной ax,

$$U_{0(M_x)} = \frac{M_x^2}{2GJ_\rho^2}\rho^2.$$

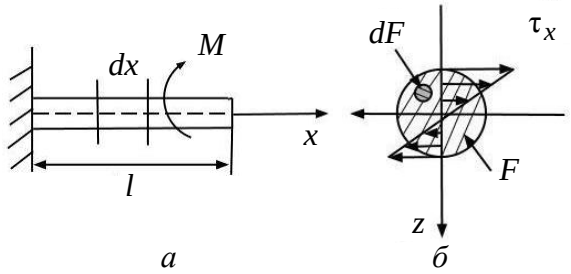


Рис. 4.6

Касательные напряжения, возникающие при кручении, изменяются по сечению стержня (рис. 4.6, *б*). Поэтому для расчета потенциальной энергии элементарного объема выделенного элемента необходимо в сечении выделить элементарную площадку dF и проинтегрировать полученное выражение потенциальной энергии по площади сечения F:

$$U_{ax(M_x)} = \int_F \frac{M_x^2 \rho^2 dx\, dF}{2GJ_\rho^2} = \frac{M_x^2 dx}{2GJ_\rho^2}\int_F \rho^2 dF,$$

где интеграл вида $\int_F \rho^2 dF$ есть полярный момент инерции сечения J_ρ. Окончательно имеем:

$$U_{ax(M_x)} = \frac{M_x^2 dx}{2GJ_\rho^2}.$$

Потенциальная энергия деформации стержня длиною l при кручении имеет вид

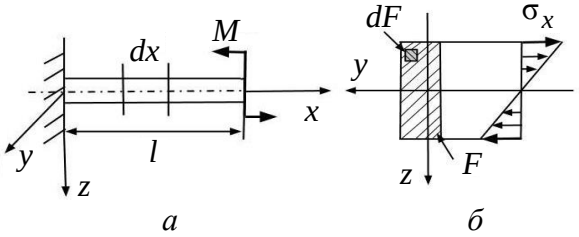


Рис. 4.7

$$U_{M_x} = \int_0^l \frac{M_x^2\,dx}{2GJ_\rho^2}.$$

На рис. 4.7, *а* показан стержень, испытывающий деформацию чистого изгиба; на рис. 4.7, *б* дано распределение нормального составляющего напряжения, возникающего в сечении.

При чистом изгибе нормальные составляющие напряжения вычисляются: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$ если изгиб происходит в плоскости xOz, $\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y$ в плоскости xOy.

Потенциальная энергия деформации единицы объема выделенного элемента длиной dx имеет вид

$$U_{0(M_y)} = \frac{M_y^2 z^2}{2EJ_y^2}.$$

При чистом изгибе нормальные составляющие напряжения σ_x меняются по сечению (рис. 4.7, *б*). Поэтому при вычислении потенциальной энергии элементарного объема выделенного элемента необходимо в сечении выделить элементарную площадку dF и проинтегрировать полученное выражение по площади сечения F:

$$U_{dx(M_y)} = \int_F \frac{M_y^2 z^2 dx\,dF}{2EJ_y^2} = \frac{M_y^2\,dx}{2EJ_y} \int_F z^2 dF,$$

где $\int_F z^2 dF = J_y$ – осевой момент инерции сечения относительно оси координат z. Потенциальная энергия деформации стержня длиной l

$$U_{(M_y)} = \int_0^l \frac{M_y^2\,dx}{2EJ_y}.$$

Аналогично потенциальная энергия для стержня, испытывающего чистый изгиб в плоскости xOy,

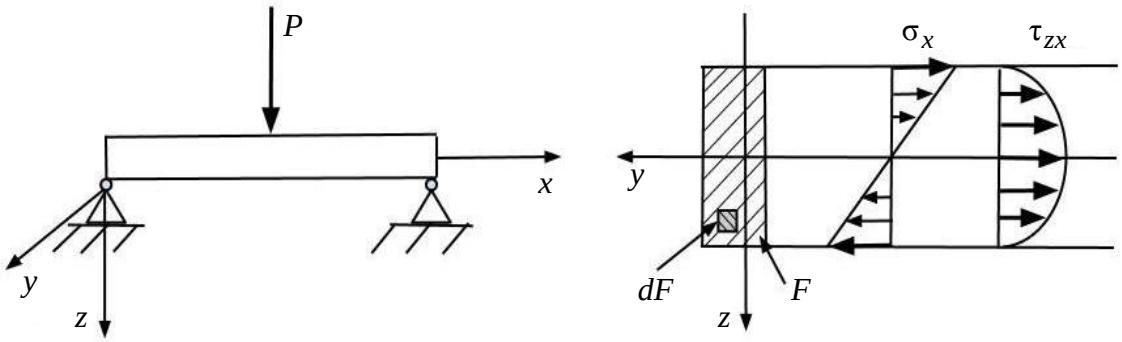
$$U_{(M_z)} = \int_0^l \frac{M_z^2\,dx}{2EJ_z}.$$

Рассмотрим потенциальную энергию стержня, испытывающего деформацию плоско-поперечного изгиба (рис. 4.8, *а*). На рис. 4.8, *б* представлено

распределение нормальных и касательных составляющих напряжений по сечению стержня.

При плоско-поперечном изгибе, если силы и моменты сил действуют в плоскости xOz, то

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \;\; \tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^*}{b J_y};$$



а *б*

Рис. 4.8

если в плоскости xOy –

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \;\; \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*}{b J_z}.$$

Потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема от действия перерезывающей силы Q_z составляет

$$U_{0(Q_z)} = \frac{Q_z^2 S_y^{*2}}{2Gb^2 J_y^2}.$$

Потенциальная энергия деформации элементарного объема выделенного элемента вычисляется аналогично потенциальной энергии при чистом изгибе, при этом разделим и умножим полученное выражение на F:

$$U_{ax(Q_z)} = \int_F \frac{Q_z^2 S_y^{*2} dx\, dF}{2Gb^2 J_y^2} = \frac{Q_z^2 dx}{2GF} \frac{F}{J_y^2} \int_F \frac{S_y^{*2}}{b^2} dF = \frac{Q_z^2 dx}{2GF} K_z.$$

Аналогично, когда силы и моменты сил действуют в плоскости xOy,

$$U_{ax(Q_y)} = \frac{Q_y^2 ax}{2GF} K_y,$$

где $K_z = \frac{1}{J_y^2}\int\limits_F \frac{S_y^{*2}}{b^2}dF$, $K_y = \frac{1}{J_z^2}\int\limits_F \frac{S_y^{*2}}{b^2}dF$ – коэффициенты, зависящие от геометрических характеристик площади сечения стержня.

Потенциальная энергия деформации от действия перерезывающих сил в сечении стержня длиной l

$$U_{(Q_z)} = K_z\int\limits_0^l \frac{Q_z^2\,dx}{2GF}, \quad U_{(Q_y)} = K_y\int\limits_0^l \frac{Q_y^2\,dx}{2GF}.$$

Окончательно потенциальная энергия деформации стержня при общем пространственном нагружении, когда возникают все шесть внутренних усилий, имеет вид

$$U = \int\limits_0^l \frac{N^2\,ax}{2EF} + \int\limits_0^l \frac{M_x^2\,ax}{2GJ_\rho} + \int\limits_0^l \frac{M_y^2\,ax}{2GJ_y} + \int\limits_0^l \frac{M_z^2\,ax}{2GJ_z} + K_y\int\limits_0^l \frac{Q_y^2\,ax}{2GF} + K_z\int\limits_0^l \frac{Q_z^2\,ax}{2GF}.$$

4.2.4. Теорема Кастельяно

Теорема Кастельяно устанавливает зависимость между обобщенным перемещением и потенциальной энергией. Пусть к твердому телу приложена обобщенная сила P. От силы P тело получило перемещение δ. Работа силы P на перемещение δ, а следовательно, и потенциальная энергия деформации будет равна $A = U = P\delta$.

Дадим силе приращение dP. Твердое тело от силы dP получит перемещение $d\delta$ и, соответственно, потенциальная энергия получит приращение $U + \frac{\partial U}{\partial P}dP$.

Приложим силы в обратном порядке. Сначала приложим силу dP, и она на перемещении $d\delta$ совершит работу $\frac{1}{2}dP\,d\delta$. Затем приложим силу P, и она совершит работу на перемещение δ, которая будет равна потенциальной энергии U. Одновременно сила dP, приложенная раньше, совершит работу на перемещение $\delta - dP\delta$.

Сопоставим потенциальную энергию деформации в первом случае приложения сил и во втором:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P}dP = U + \frac{1}{2}dP\,d\delta + dP\delta.$$

Членом $\frac{1}{2}dP\,d\delta$ можно пренебречь как величиной второго порядка малости, и тогда имеем

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Отсюда следует формулировка теоремы Кастельяно: обобщенное перемещение равно частной производной от потенциальной энергии по обобщенной силе.

В общем случае для стержня, испытывающего деформации растяжения-сжатия, кручения и изгиба, теорема Кастельяно имеет вид

$$\delta_i = \int_l \frac{N\dfrac{\partial N}{\partial P_i}}{EF}dx + \int_l \frac{M_x\dfrac{\partial M_x}{\partial P_i}}{GJ_\rho}dx + \int_l \frac{M_y\dfrac{\partial M_y}{\partial P_i}}{EJ_y}dx + \int_l \frac{M_z\dfrac{\partial M_z}{\partial P_i}}{EJ_z}dx +$$

$$+ K_z\int_l \frac{Q_z\dfrac{\partial Q_z}{\partial P_i}}{GF}dx + K_y\int_l \frac{Q_y\dfrac{\partial Q_y}{\partial P_i}}{GF}dx. \qquad (4.2)$$

Процесс расчета перемещений по данной формуле заключается в составлении уравнений для внутренних усилий по участкам стержня, вычисления производных от них по некоторой обобщенной силе и вычисления интегралов.

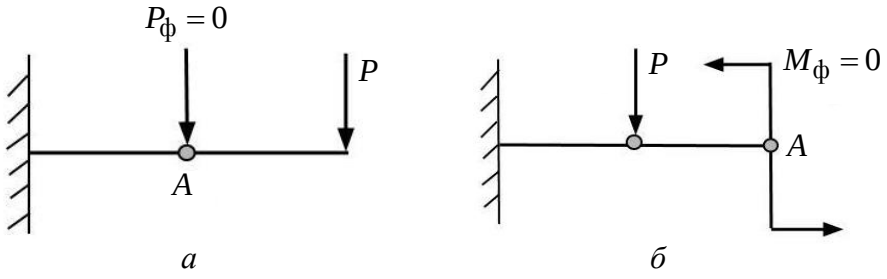
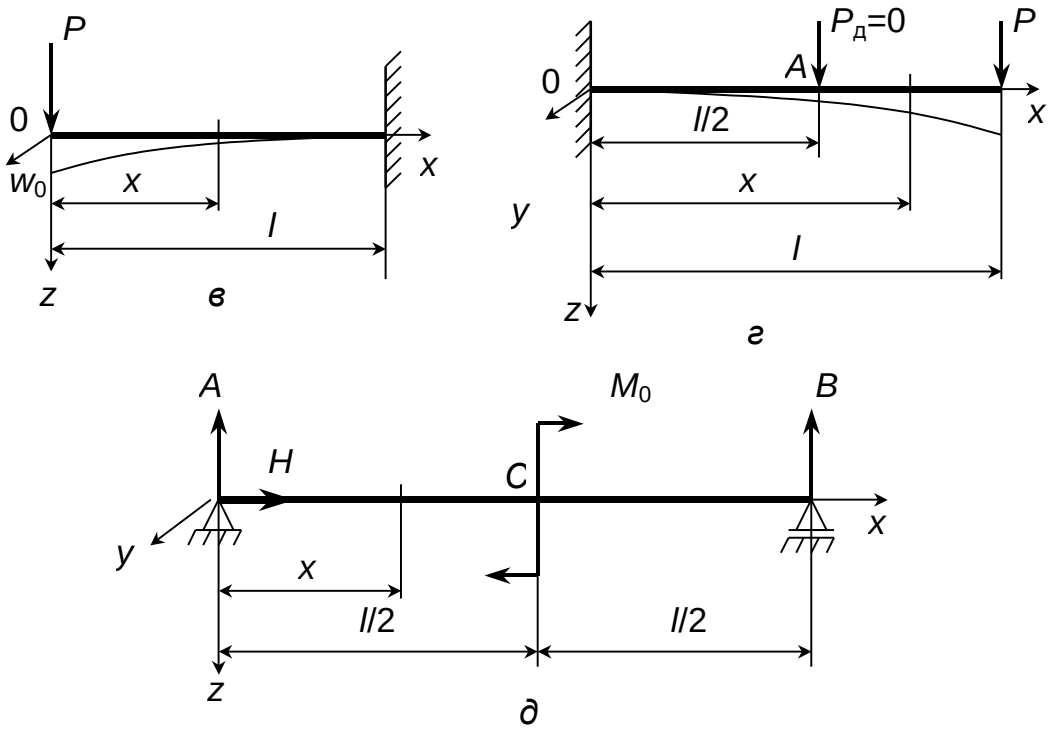


Рис. 4.9

Если вычислению подлежат перемещения в сечениях, где не приложена внешняя сила (это относится к деформации изгиба), то прибегают к искусственному приему дополнения нагрузки, т. е. в данном сечении прикладывается фиктивная сила, равная нулю, если определяется линейное перемещение (рис. 4.9, *а*), или фиктивный момент, равный нулю, если определяется угловое перемещение (рис. 4.9, *б*).

Пример 5.2. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой представлена на рис. 5.2, *в*. Стержень жестко закреплен в крайнем правом сечении. В левом сечении стержня действует сила *P*. Длина стержня *l*. Жесткость EJ_y стержня при изгибе постоянна по длине стержня.

Требуется определить перемещение w_0 сечения стержня под действием силы P.



Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z – вниз, а ось y – перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое линейное перемещение w_0 считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = w_0$.

3. Обобщенной силой, соответствующей обобщенному перемещению, является сила P, действующая в сечении, где определяется перемещение: $P_{об} = P$.

4. Реакции опоры можно не определять, если рассматривать равновесие отсеченной левой части при составлении уравнения изгибающего момента M_y.

5. Проведем сечение на расстоянии x от начала координат (рис. 5.2, *в*) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части стержня. Запишем уравнение изгибающего момента M_y и производной изгибающего момента по обобщенной силе:

$$x \in (0, l), \qquad M_y = -Px, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_{об}} = \frac{\partial M_y}{\partial P} = -x.$$

6. Определим перемещение w_0 по формуле (5.9):

$$w_0 = \int_0^l \frac{M_y}{EJ_y}\frac{\partial M_y}{\partial P}dx = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l (-Px)(-x)dx \Rightarrow \qquad w_0 = \frac{Pl^3}{3EJ_y}.$$

Пример 5.3. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой приведена на рис. 5.2, *г*. Стержень жестко закреплен в крайнем левом сечении. Сила P действует на правом торце стержня. Длина стержня – l. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = \text{const}$.

Требуется определить перемещение w_A сечения стержня на расстоянии $x = l/2$ от начала координат.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось *x* вдоль оси стержня, ось *z* – вниз, а ось *y* – перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое линейное перемещение – прогиб w_A – считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = w_A$.

3. Обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению, в сечении *x=l/2* отсутствует. Для того чтобы можно было воспользоваться теоремой Кастилиано, приложим в этом сечении некоторую дополнительную силу $P_д = 0$. Значение перемещения w_A при этом не изменится. Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению: $P_{об} = P_д$.

4. Реакции опоры можно не определять, если рассматривать равновесие правой отсеченной части при составлении уравнения изгибающего момента M_y в сечениях стержня.

5. Точка *A* разделяет стержень на два участка. Запишем уравнения изгибающего момента на каждом участке и подсчитаем значение производной изгибающего момента по обобщенной силе.

Первый участок: $x \in (0,\ l/2)$,

$$M_y = -P(l - x) - P_д(l/2 - x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_д} = -(l/2 - x).$$

Второй участок: $x \in (l/2,\ l)$,

$$M_y = -P(l - x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_д} = 0.$$

6. По формуле (5.9) определим перемещение w_A с учетом того, что $P_д = 0$:

$$w_A = \frac{1}{EJ_y}\int_0^{l/2}(-P(l-x))(-(l/2-x))dx \Rightarrow \quad w_A = \frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ_y}.$$

Пример 5.4. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой приведена на рис. 5.2, *д*. Стержень закреплен двумя опорами. Момент M_0 действует посередине пролета стержня. Длина стержня равна *l*. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = \text{const}$.

Требуется определить угол поворота θ_C сечения стержня при $x = l/2$.

Решение.

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось *x* вдоль оси стержня, ось *z* – вниз, а ось *y* – перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое перемещение – угол поворота сечения θ_C – считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = \theta_C$.

3. Обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению, – это сосредоточенный момент M_0 в этом сечении вместе с опорными реакциями, которые зависят от M_0: $P_{об} = M_0$.

4. Реакции опор обозначены на рис. 5.2, *д*. Определим их, составив уравнения равновесия системы:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow \quad H = 0; \quad \sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow \quad M_0 - Bl = 0 \Rightarrow \quad B = \frac{M_0}{l};$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow \quad M_0 + Al = 0 \ \Rightarrow \qquad A = -\frac{M_0}{l}.$$

5. Запишем уравнения изгибающего момента в сечениях стержня на каждом участке и подсчитаем значение производной изгибающего момента по обобщенной силе.

Первый участок: $x \in (0,\ l/2)$, $M_y = Ax = -\dfrac{M_0}{l}x$, $\dfrac{\partial M_y}{\partial M_0} = -\dfrac{x}{l}$.

Второй участок : $x \in (l/2,\ l)$,

$$M_y = -B(l-x) = -\frac{M_0}{l}(l-x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial M_0} = -\frac{(l-x)}{l}.$$

6. По формуле (5.9) найдем угол поворота θ_C:

$$\theta_C = \frac{1}{EJ_y}\int_0^{l/2}(-\frac{M_0}{l}x)(-x/l)dx + \frac{1}{EJ_y}\int_{l/2}^{l}(-\frac{M_0}{l}(l-x))(-(l-x)/l)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{1}{12}\frac{M_0 l}{EJ_y}.$$

Замечание. Положительное значение угла поворота означает, что поворот сечения произошел в направлении действия обобщенной силы – момента M_0.

4.2.5. Формула Максвелла–Мора

Внутренние усилия, входящие в (4.2) являются линейными функциями приложенных сил P_i и могут быть записаны в форме сумм:

$$\begin{gathered} N = \sum_{i=1}^{n} N^{(i)} P_i, \quad Q_y = \sum_{i=1}^{n} Q_y^{(i)} P_i, \quad Q_z = \sum_{i=1}^{n} Q_z^{(i)} P_i, \\ M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x^{(i)} P_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y^{(i)} P_i, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z^{(i)} P_i. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Смысл коэффициентов $N^{(i)}$, ..., $M_z^{(i)}$ можно выяснить следующим образом: положим силы P_i равными нулю при $i \neq k$ и приравняем силу P_k к единице (при $i = k$). Тогда получим: $N = N^{(k)}$, $Q_y = Q_y^{(k)}$, $Q_z = Q_z^{(k)}$, $M_x = M_x^{(k)}$, $M_y = M_y^{(k)}$, $M_z = M_z^{(k)}$.

Таким образом, коэффициенты есть внутренние усилия, вызываемые единичной силой.

Дифференцируем (4.3) по P_k и получаем:

$$\frac{\partial N}{\partial P_k} = N^{(k)},\ \frac{\partial Q_y}{\partial P_k} = Q_y^{(k)},\ \frac{\partial Q_z}{\partial P_k} = Q_z^{(k)},$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_k} = M_x^{(k)},\ \frac{\partial M_y}{\partial P_k} = M_y^{(k)},\ \frac{\partial M_z}{\partial P_k} = M_z^{(k)}.$$

Производная от внутреннего усилия по обобщенной силе есть внутреннее усилие от внешней силы, равной единице.

Окончательно формула Максвелла–Мора имеет вид

$$\delta_i = \int_l \frac{N\bar{N}}{EF}dx + \int_l \frac{M_x\bar{M}_x}{GJ_\rho}dx + \int_l \frac{M_y\bar{M}_y}{EJ_y}dx + \int_l \frac{M_z\bar{M}_z}{EJ_z}dx +$$

$$+ K_z\int_l \frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF}dx + K_y\int_l \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF}dx, \qquad (4.4)$$

где $\bar{N}$, ..., $\bar{Q}_z$ – внутренние усилия от единичной силы.

При определении перемещений по формуле Максвелла–Мора необходимо в сечении, где вычисляется перемещение, приложить внешнюю силу $P_{(1)} = 1$ или $M_{(1)} = 1$ (если определяется угловое перемещение) независимо от того, приложены в этом сечении какие-либо внешние силы или нет.

Изложенные энергетические методы механики твердого деформированного тела широко используются при решении статически неопределимых задач. Известны два метода расчета статически неопределимых систем – метод сил и метод перемещений. В первом за лишние неизвестные принимаются силы, во втором – перемещения.

Пример

5. МЕТОД СИЛ ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Для определения лишних связей (реакций опор) при решении статически неопределимых систем методом сил составляются дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных. Эти уравнения удобно составлять в так называемой канонической форме, т. е. по определенной закономерности.

Вначале рассмотрим систему, один раз статически неопределимую (рис. 5.1, *а*).

В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору *B*. Тогда, нагрузив основную систему заданной нагрузкой и лишней неизвестной силой x_1 (рис. 5.1, *б*), нужно приравнять нулю полное перемещение точки *B* основной системы по направлению x_1:

$$\Delta_1 = \Delta_1(P, x_1) = 0. \tag{5.1}$$

Для вычисления Δ_1 применим принцип независимости действия сил: $\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}$, где Δ_{1P} – перемещение от заданной нагрузки (рис. 5.1, *в*); Δ_{11} – перемещение от силы x_1.

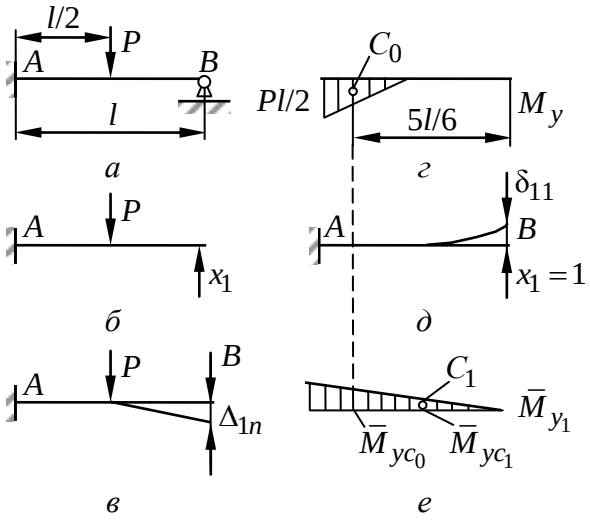


Рис. 5.1

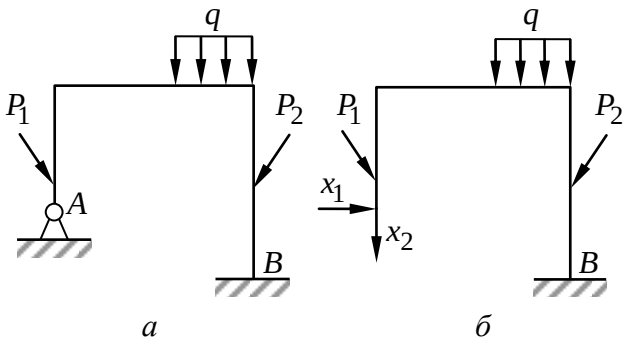


Рис. 5.2

Если δ_{11} – перемещение по направлению x_1 от силы $x_1 = 1$ (рис. 5.1, *д*), то $\Delta_{11} = \delta_{11} x_1$ и уравнение (5.1) примет вид

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{5.2}$$

Это каноническая форма уравнения перемещений для единожды статически неопределимой системы. Из (5.2):

$$x_1 = \Delta_{1P} / \delta_{11}.$$

Для системы с двумя лишними связями, как, например, на рис. 5.2, *а*, дополнительные уравнения перемещений сечения *A* основной системы (рис. 5.2, *б*) имеют вид $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0,$ где $\Delta_1 = \Delta_1(P, x_1, x_2)$ – полное перемещение точки *A* по направлению x_1 от заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий x_1, x_2; $\Delta_2 = \Delta_2(P, x_1, x_2)$ – полное перемещение точки *A* по направлению x_2 от указанных нагрузок.

Исходя из принципа независимости действия сил, запишем перемещения в виде сумм перемещений, вызванных отдельно каждой из неизвестных

сил x_1, x_2 и заданной нагрузкой P. Использовав введенные ранее обозначения перемещений, найдем, что

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0, \quad \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \tag{5.3}$$

Полное перемещение Δ_{ik} можно записать как произведение удельного перемещения δ_{ik}, вызванного действием единичной силы, на величину соответствующей обобщенной силы:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}x_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12}x_2, \quad \Delta_{ik} = \delta_{ik}x_k.$$

Таким образом, выражения (5.3) принимают вид

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Это каноническая форма уравнений перемещений для системы, дважды статически неопределимой.

По аналогии можно записать в канонической форме уравнения перемещений для любой n раз статически неопределимой системы:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} = 0;\\
&\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2P} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Перемещения Δ_{ip} и Δ_{ik}, входящие в канонические уравнения, чаще всего определяют по методу Максвелла–Мора (уравнения (4.4)). При этом для балок и рам влиянием перерезывающих и нормальных сил обычно пренебрегают и учитывают лишь изгибающие моменты. Однако определяя перемещения в балках прямоугольного поперечного сечения, для которых отношение высоты сечения к длине пролета $h/L \geq 1/5$, перерезывающие силы следует учитывать обязательно.

При расчете статически неопределимых рам с большими значениями указанного отношения ($h/L > 1/5$) ошибка, вызванная неучетом нормальных и перерезывающих сил, становится существенной, особенно для высокой рамы.

Следует иметь в виду, что в реальных балочных, рамных и арочных конструкциях отношение h/L обычно меньше 1/10. Поэтому при определении перемещений в общей формуле Мора вполне допустимо сохранить лишь изгибающие моменты.

Для определения перемещений строим эпюры изгибающих моментов в основной системе отдельно от заданной нагрузки (состояние P) и от каждой единичной силы: $x_1 = 1$ (состояние 1); $x_2 = 1$ (состояние 2); …; $x_n = 1$ (состояние n).

Ординаты соответствующих эпюров обозначим, как обычно, через M_{yp}, M_{y1}, M_{y2}, …, M_{yn}.

Тогда на основании (4.4) найдем:

$$\Delta_{1P} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{y1}}}{EJ_y}dx,\ \Delta_{2P} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{y2}}}{EJ_y}dx,\ \Delta_{nP} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{yn}}}{EJ_y}dx.$$

Удельные перемещения, имеющие одинаковые индексы и называемые главными коэффициентами канонических уравнений, определяют следующим образом:

$$\delta_{11} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y1}}}{EJ_y}dx,\ \delta_{22} = \int_L \frac{\overline{M_{y2}}\,\overline{M_{y2}}}{EJ_y}dx,\ \delta_{nn} = \int_L \frac{\overline{M_{yn}}\,\overline{M_{yn}}}{EJ_y}dx.$$

Эти перемещения положительны.

Удельные перемещения, имеющие неодинаковые индексы и называемые побочными коэффициентами, определяют по формулам

$$\delta_{12} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y2}}}{EJ_y}dx,\ \delta_{13} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y3}}}{EJ_y}dx,\ \delta_{ik} = \int_L \frac{\overline{M_{yi}}\,\overline{M_{yk}}}{EJ_y}dx.$$

Они могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

В тех случаях, когда кроме внешних нагрузок нужно учесть и влияние температуры, порядок расчета остается прежним. Свободные члены канонических уравнений (5.4) при этом представляют собой перемещения в основной системе не только от заданных нагрузок, но и от изменения температуры:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1T};\\
&\ldots\ldots\ldots

усилий N, Q, M_y в элементах системы. Иногда строить эпюры удобно методом сложения эпюров Мура с эпюрами $\bar{M}_{y1}$, $\bar{M}_{y2}$, ..., $\bar{M}_{yn}$, предварительно умноженными на значения $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$M_y = \bar{M}_{y1}x_1 + \bar{M}_{y2}x_2 + ... + \bar{M}_{yP};$$

$$Q = Q_1x_1 + Q_2x_2 + ... + Q_P;$$

$$N = N_1x_1 + N_2x_2 + ... + N_P.$$

Следует отметить, что буквенный вид канонических уравнений остается неизменным при любом возможном варианте основной системы. Изменяется лишь смысл лишних неизвестных и геометрический смысл перемещений. Например, при выборе в качестве лишних неизвестных внутренних сил в каких-либо сечениях коэффициенты в канонических уравнениях представляют собой соответствующие взаимные перемещения сечений по направлению лишних неизвестных усилий.

На рис. 5.3 показана трижды статически неопределимая плоская рама (рис. 5.3, *а*) и два варианта основной системы (рис. 5.3, *б*, *в*). Для любой трижды статически неопределимой системы канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{aligned} \qquad (5.6)$$

При выборе основной системы по первому варианту (рис. 5.3, *б*) система уравнений (5.6) выражает требование равенства нулю перемещений сечения A по направлениям x_1, x_2, x_3.

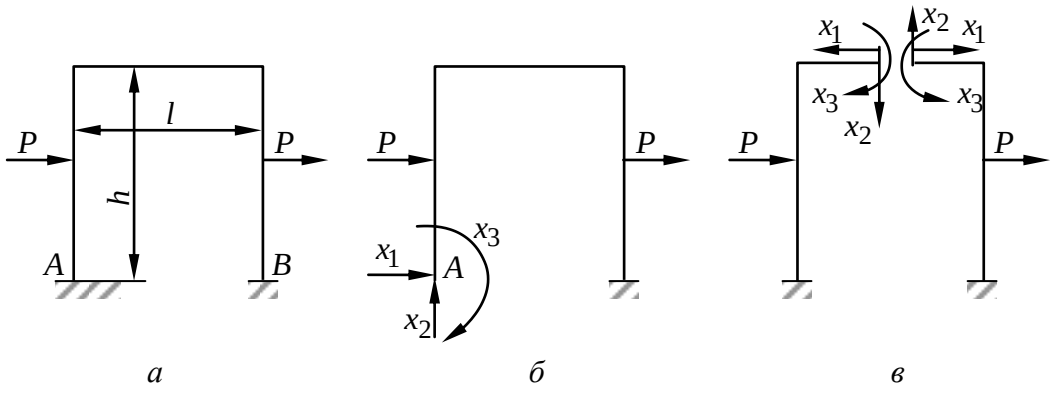


Рис. 5.3

Второй вариант основной системы (рис. 5.3, *в*) образован разрезом ригеля. Так как в плоской системе в сечениях действуют три силовых фактора

(нормальная сила, перерезывающая сила и изгибающий момент), то к сторонам разреза следует приложить в качестве лишних неизвестных указанные силовые факторы x_1, x_2, x_3, выражающие взаимное действие обеих частей системы друг на друга в данном сечении. При таком выборе основной системы уравнения (5.6) выражают равенство нулю полных взаимных перемещений сторон разреза по направлениям лишних неизвестных.

Третье уравнение системы (5.6) означает равенство нулю перемещения по направлению x_3, т. е. взаимного угла поворота сторон разреза под действием заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий.

Приняв в качестве лишних неизвестных внутренние усилия, во многих случаях можно значительно упростить расчет. Например, если исходная система симметрична (по конфигурации и расположению жесткостей), то основную систему выгодно строить также симметричной, приняв при этом, что некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю. Так, при расчете симметричной рамы (рис. 5.3, *а*) основную систему целесообразно получить разрезом горизонтального стержня (ригеля) посередине (рис. 5.4, *а*). При этом основная система будет также симметричной. Тогда в числе лишних неизвестных будем иметь симметричные усилия x_1, x_3 и кососимметричные усилия x_2.

Эпюры изгибающих моментов от усилий $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ и $\bar{x}_3 = 1$ показаны на рис. 5.4, *б–г*. Следует заметить, что эпюры $\overline{M_{y1}}$ и $\overline{M_{y3}}$ симметричны, а эпюр $\overline{M_{y2}}$ кососимметричен. Перемножение симметричного эпюра на кососимметричный дает в результате нуль.

Определим перемещение $\delta_{12} = \delta_{21}$. Пользуясь способом Верещагина, получим:

$$\delta_{12} = \frac{I}{EJ_y}\left(-\frac{h^2}{2}\,\frac{l}{2} + \frac{h^2}{2}\right) = 0.$$

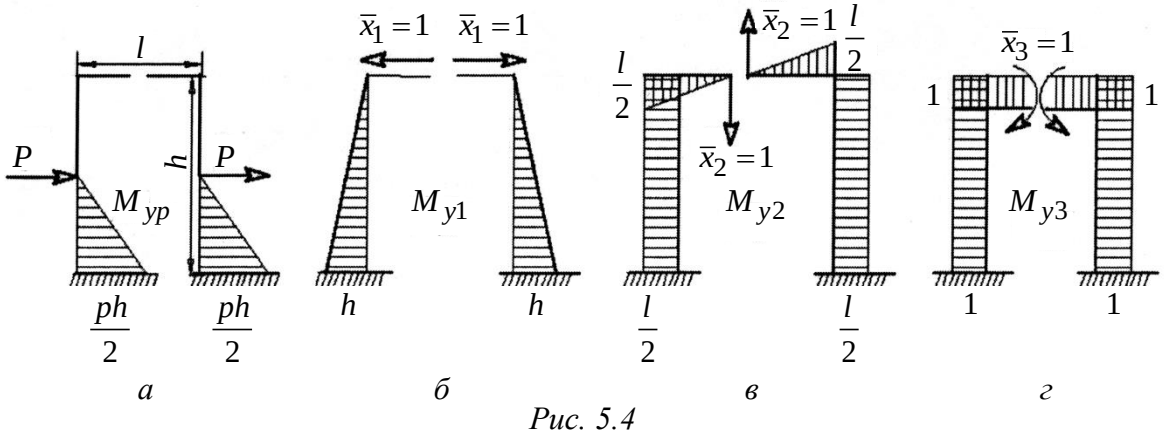


Рис. 5.4

Аналогично $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.$

Таким образом, система уравнений (5.6) упрощается и примет вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Если при этом заданная нагрузка *P* кососимметрична (рис. 5.3, *а*), то эпюр M_{yp} также кососимметричен (рис. 5.4, *а*) и перемещение $\Delta_{1p} = \Delta_{3p} = 0.$ Тогда из первого и третьего уравнений (5.7) следует, что симметричные усилия в месте разреза равны нулю: $x_1 = 0,\ x_3 = 0.$

Следует отметить, что когда нагрузка симметрична, то эпюр M_{yp} также симметричен и $\Delta_{2p} = 0.$ Тогда из второго уравнения (5.7) следует, что кососимметричное усилие $x_2 = 0.$

Как было показано ранее, коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных неизвестных сил и от приложенной нагрузки. Они определяются перемножением эпюров изгибающих моментов. При перемножении эпюров (использование метода Верещагина) могут быть допущены ошибки, что может дать значительные погрешности в определении перемещений. При этом результат решения канонических уравнений будет неверным.

Для оценки ошибки необходимо проводить проверку полученных коэффициентов системы канонических уравнений.

Построчная проверка:

– загрузим основную систему одновременно всеми лишними неизвестными, равными единице, и построим от них в основной системе эпюр изги-

бающих моментов. Его ординаты обозначим через $\bar{M}_{ys}$. Тогда для каждого сечения системы имеем:

$$\overline{M_y} = \bar{M}_{y1} + \bar{M}_{y2} + ... + \overline{M_{yn}};$$

– умножим суммарный эпюр на каждый из единичных эпюров поочередно. При этом получим суммарные значения коэффициентов при неизвестных, входящих в каждое из уравнений системы канонических уравнений:

$$\delta_{1s} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{1i} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \ldots + \delta_{1n},$$

$$\delta_{1s} = \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y1}}\frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y1}}\bar{M}_{y2}\frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{yn}}\frac{dx}{EJ_y} =$$

$$= \int_L \overline{M_{y1}}\left(\overline{M_{y1}} + \overline{M_{y2}} + ... + \overline{M_{yn}}\right)\frac{dx}{EJ_y} = \int_L \overline{M_{y1}}\bar{M}_{ys}\frac{dx}{EJ_y};$$

$$\delta_{2s} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \ldots + \delta_{2n} = \int_L \overline{M_{y2}}\,\overline{M_{ys}}\frac{dx}{EJ_y};$$

$$\delta_{ns} = \delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \ldots + \delta_{nn} = \int_L \overline{M_{yn}}\bar{M}_{ys}\frac{dx}{EJ_y},$$

где $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \delta_{3s}, ..., \delta_{ns}$ – сумма коэффициентов в строке.

Проверка вычисленных коэффициентов (перемещений), входящих в первое каноническое уравнение, состоит в сопоставлении их суммы с величиной δ_{1s}, т. е. для каждой *k*-й строки

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} = \delta_{ks}.$$

Для универсальной проверки составим сумму коэффициентов канонического уравнения $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \delta_{3s}, ..., \delta_{ns}$:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{3s} + \ldots + \delta_{ns},$$

так как

$$\delta_{1s} = \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{ys}}\frac{dx}{EJ_y},$$

$$\delta_{2s} = \int_L \overline{M_{y2}} \bar{M}_{ys} \frac{dx}{EJ_y},$$

.....

$$\delta_{ns} = \int_L \overline{M_{yn}}\, \overline{M_{ys}} \frac{dx}{EJ_y},$$

то

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \int_L \overline{M_{y1}}\, \overline{M_{ys}} \frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y2}} \bar{M}_{ys} \frac{dx}{EJ_y} + \ldots + \int_L \overline{M_{yn}}\, \overline{M_{ys}} \frac{dx}{EJ_y} =$$

$$\int_L \overline{M_{ys}} \left(\overline{M_{y1}} + \overline{M_{y2}} + \ldots + \overline{M_{yn}} \right) \frac{dx}{EJ_y} = \int_L \overline{M_{ys}} \bar{M}_{ys} \frac{dx}{EJ_y} \int_L \overline{M_{ys}}\, \overline{M_{ys}} \frac{dx}{EJ_y} = \delta_{ss}.$$

Значит, $\delta = \delta_{ss}$.

Собственно универсальная проверка состоит в следующем:

1. Алгебраическим сложением определяется сумма всех найденных коэффициентов (единичных перемещений), входящих в систему канонических уравнений:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \ldots + \delta_{nn} \right) + 2\left(\delta_{12} + \delta_{13} + \ldots + \delta_{2n} + \ldots + \delta_{n-1,n} \right).$$

Вычисляется $\delta_{ss} = \int_L \overline{M_{ys}^2} \frac{dx}{EJ_y}$ (умножением эпюра $\overline{M_{ys}}$ на $\bar{M}_{ys}$).

2. Проверяется выполнение условия $\delta = \delta_{ss}$.

Для отыскания ошибок в определении коэффициентов пользуются неравенством $\delta_{ii}\delta_{ik} \geq \delta_{ik}^2$.

Для проверки коэффициентов канонических уравнений от нагрузки поступают следующим образом:

– вычисляют $\Delta_{sp} = \int_L \overline{M_{ys}} \bar{M}_{yp} \frac{dx}{EJ_y}$, где $\bar{M}_{yp}$ – изгибающий момент от заданной нагрузки в основной системе;

– проверяют выполнение условия

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \ldots + \Delta_{np} = \Delta_{sp}.$$

Для оценки погрешности расчета можно ограничиться универсальной проверкой. Для определения ошибки при вычислении коэффициентов рекомендуется проводить построчную проверку.

Приведенные формулы и рассуждения рассмотрены на примерах стержневых систем, испытывающих деформацию изгиба, однако все полученные математические зависимости справедливы для систем любого вида. Различие заключается лишь в форме выражений для вычисления коэффициентов (5.4).

Заключение

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Механические характеристики конструкционных материалов

Номер	Материалы	Плотность, г/см^3	α_*, $E \cdot 10^6$	σ_T, МПа	[σ], МПа	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{вс}$, МПа	E, МПа, $E \cdot 10^5$	ν	ГОСТ
1	Медь М1, М2, М3	8.96	16.5	380	100	400	–	1.2	0.35	859–78
2	Ковар 29 НК	8.35	4.7…5.2	350	200	600	–	1.42	0.32	Лента 19241–80 10994–74
3	Никель НП-2	8.9	13	590… 740	–	630… 770	–	2.1	0.3	492–73
4	Сталь 10	7.86	11.9	250	130	400	–	2.1	0.28	1050–74
5	Сталь СТ5	7.8	12.5	290	120	–	–	2.1	0.27	380–71
6	ЗИ-693	8.1	12	500	–	–	–	2	0.3	3836–83
7	47НД	3	9.5	500	–	–	–	2	0.3	–
8	Латунь Л68, ДС59-1	8.4	18	160	–	400	–	0.9	0.4	2060–80
9	Молибден МО	10.2	5.5	590	300	1400	–	3.2	0.31	3718–75
10	Вольфрам	19.1	4.4	400… 560	–	800	–	4	0.17	
11	Золото	19.3	14.4	–	–	122	–	0.84	0.38	6835–80
12	Серебро	10.5	18.9	–	–	138	–	0.77	0.49	6836–80
13	Платина	21.45	7.8	–	–	143	–	1.47	0.21	13498–79
14	Свинец	11.36	28.9	50… 100	–	150… 180	–	0.18	–	3778–77
15	Алюминий АЛ2, АЛ4	2.7	23.8	100	–	200	–	0.7	0.33	2685–75
16	Псевдосплав	9	7	500	–	–	–	1.9	0.3	–
17	Ситалл АС-336	2.5	3	–	–	–	690	0.67	0.25	–
18	Ситалл СТ	7.49	7.6	–	–	–	630	0.77	0.3	–
19	Кремний	2.33	2.5…4.1	–	–	24	62	1.13	0.3	–
20	Германий GE	5.33	5.75	–	–	–	–	–	–	16153–80
Керамика										
1	Алюмоксид 22ХС	3.6	6.1	–	–	130	1100	2.2	0.25	–
2	М7	3.65	7.9	–	–	83	600	2.04	0.22	3248–72
3	Берилливая Вео	2.85	5.3…8.9	–	–	100	800	2.4	0.2	–
4	Поликор	3.96	7.8	–	–	250	–	3.92	3.92	–
5	А-995	3.5	7.5	–	–	100	980	3.8	3.8	–
Стекло										
1	Кварцевое	2.21	0.4…0.6	–	–	40	500	0.75	0.26	
2	Молибденовое	–	4.1	–	–	60	600	0.5	0.25	
3	Электровакуумное	–	5.2	–	–	–	–	0.66	0.22	

4	С48-1	2.1	4.85	–	–	77	700	0.58	0.3	
5	С48-2	2.3	4.8	–	–	20	300	0.58	0.29	
6	С49-1	2.29	4.7	–	–	40	400	0.58	0.28	
Припой**										
1	Оксид олова	7.3	23.4	11.7	–	16	–	0.42	0.3	**В изделиях 7246–73
2	ПОИ и КС	8.2	29.7	–	30	23.9	–	0.3	0.29	
3	ПОС-61	8.1	19	–	30… 40*	43	–	0.35	0.29	
4	ПСР-72	10	16.1	–	60	46	–	0.3	0.3	

Оглавление