МИНОБРНАУКИ РОСИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

А. В. ТИТОВ, Е. А. НИКОЛАЕВА

РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2025

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Титов А. В., Николаева Е. А.

Т45 Решение статически неопределимых задач при плоском поперечном изгибе: учеб.- метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025. 32 с.

ISBN 000-0-0000-0000-0

Содержит алгоритм, расчетные зависимости и примеры решения статически неопределимых задач методом сил и методом Верещагина.

Предназначено для студентов технических ВУЗов, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика».

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Рецензент канд. техн. наук Тихоненкова О. В. (СПб гос. университет аэрокосмического приборостроения).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 000-0-0000-0000-0 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025

ВВЕДЕНИЕ

При выполнении курсового проекта по дисциплине «Прикладная механика» в разделе «Расчет прочности выводов прибора от инерционной нагрузки» расчетная схема может быть представлена в виде стержня, жестко закрепленного с двух сторон, или стержня, жестко закрепленного с одной стороны и имеющему шарнирно-подвижную опору с другой стороны. Рекомендуется считать паяные соединения как шарнирно-подвижные опоры, а винтовые соединения – как жесткое закрепление. Точка приложения инерционной нагрузки выбирается в центре масс элементов конструкции корпуса прибора. Материал выводов считается сплошным однородным изотропным и абсолютно упругим.

Расчетная схема является статически неопределимой стержневой системой, поэтому для определения реакций опор необходимо к уравнениям статического равновесия добавить дополнительные уравнения, используя метод сил. Далее определяются внутренние силы (перерезывающая сила, изгибающий момент) и строятся эпюры внутренних сил. По эпюре изгибающих моментов определяется опасное сечение, в котором и рассчитывается максимальное нормальное напряжение σ_x. В соответствии с условиями прочности оценивается запас прочности рассчитываемого элемента конструкции: $\sigma_x \le \sigma_T / n$, где σ_T - предел текучести материала, из которого изготовлены выводы прибора; n - коэффициент запаса прочности. Коэффициент запаса прочности должен быть не менее 1,5 при статическом внешнем воздействии.

Учебно-методическое пособие посвящено решению статически неопределимых задач методом сил, а также графическим методом Верещагина.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Брус – это тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Брус с прямолинейной осью, называется стержнем. Ось бруса – это линия, которая соединяет центры тяжестей его поперечных сечений. При расчётах брус заменяют его продольной осью.

Тело, перемещение которого в пространстве ничем не ограничено, называется свободным. Тело, перемещение которого в пространстве ограничено другими телами, называется несвободным. Тела, ограничивающие перемещения, – связи. Свободное тело в пространстве может совершать три линейных перемещения (в направлении трех взаимно перпендикулярных осей системы координат) и три угловых перемещения (повороты относительно осей системы координат). Силы, с которыми связи действуют на тело, называются реакциями связей. Реакции связей проявляются в результате принципа освобождаемости: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связи можно заменить силами (реакциями), приложенными к телу, т. е. отбросить связь как тело и заменить ее силой. Любая связь ограничивает одно или несколько перемещений точек рассматриваемого тела. Так как реакция обеспечивает ограничение соответствующих перемещений, то в качестве линии действия используется направление соответствующего ограничения перемещения. Если известно, перемещения каких точек тела ограничены и в каком направлении, то известны и точки приложения и направления сил реакции связей. Наиболее часто в расчетных схемах представлены 3 вида опор: жесткая заделка, шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры. Шарнирно-подвижная опора – ограничивает перемещение тела в направлении перпендикуляра к той поверхности, по которой перемещается шарнир. Шарнирно-неподвижная опора – ограничивает линейное перемещение тела, реакция лежит в плоскости чертежа и имеет произвольное направление. Жесткое защемление или заделка – полностью ограничивает перемещение, возникают линейные и вращательные реакции опор.

Под действием приложенных сил тело деформируется. Изменение линейных размеров тела, называется линейной деформацией, а изменение угловых размеров – угловой деформацией. Удлинение – это увеличение линейных размеров тела, а укорочение – уменьшение линейных размеров тела.

Для сохранения формы тела при отсутствии внешнего воздействия. между точками возникают внутренние силы. При приложении внешних нагрузок тело деформируется, и изменение расстояний между точками приводит к изменению внутренних сил. В механике внутренними силами считаются только те силы, которые появляются в результате внешнего воздействия. Внутренние силы, существующие в теле без внешней нагрузки, которые обеспечивают форму тела, во внимание не принимаются.

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса. Изгиб называют чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки). Изгиб, называют поперечным, если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения, то изгиб носит название *плоского* или *прямого*.

Для выявления и вычисления внутренних сил применяют метод сечений, при котором отбрасывается часть тела и ее действие заменяется внутренними силами. Рассматриваемая часть тела находится в статическом равновесии под действием различных внешних сил. Записать условия статического равновесия можно в виде суммы проекций сил на оси координат и суммы моментов сил относительно осей координат.

Статически неопределимыми, называют конструкции, в которых для определения опорных реакций либо внутренних усилий одних только уравнений статики недостаточно, а требуется совместное рассмотрение последних с дополнительными уравнениями, характеризующими деформацию системы.

Статическая неопределимость возникает из-за наличия дополнительных связей – дополнительных опор, добавление которых не влияет на геометрическую неизменяемость системы в целом. Дополнительные опоры позволяют увеличить прочность и жесткость конструкций.

Известны два основных метода расчета статически неопределимых систем – метод перемещений и метод сил. В первом за лишние неизвестные принимаются перемещения, во втором силы.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ СИЛ

Метод сил – это метод расчета статически неопределимых стержневых систем, для которых невозможно определить реакции связей только используя классические уравнения статики. В большинстве практических задач предполагается, что материал обладает свойством линейности деформаций по отношению к действующей нагрузке (деформации малы, выполняется закон Гука). Чтобы решить такую задачу по методу сил для определения лишних связей (реакций опор) при решении составляются дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных. Эти уравнения удобно составлять в так называемой канонической форме, т. е. по определенной закономерности.

При решении выбирается лишняя связь, например, одна из дополнительных опор. Действие связи этой дополнительной опоры обозначается неизвестной нагрузкой, например, силой X_1. Нагрузив основную систему заданной нагрузкой и лишней неизвестной, нужно приравнять нулю полное перемещение точки дополнительной опоры по направлению X_1. Это перемещение согласно принципу независимости действия сил складывается из перемещений от каждой из заданных нагрузок и перемещения от силы X_1. Уравнения перемещения записываются в канонической форме, количество дополнительных уравнений соответствует числу лишних связей.

1.1 Крепление стержня - с двух сторон заделка

На рис.1.1 приведена расчетная схема крепления выводов к корпусу прибора. В заделках возникают реакции сил R_x, R_z и изгибающего момента M_y.

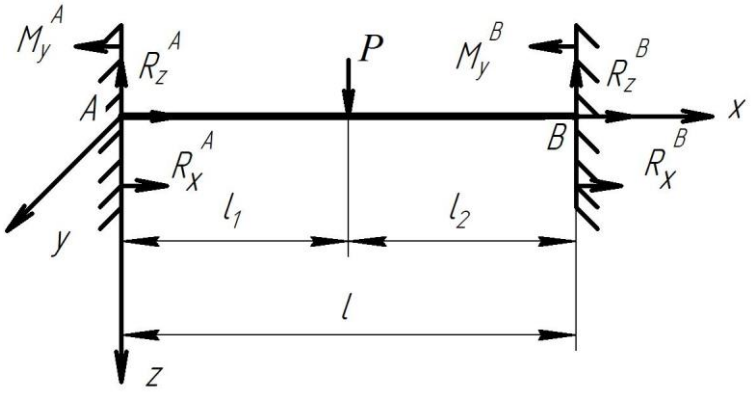

Рис.1.1. Расчетная схема крепления выводов к корпусу прибора

На рисунке 1 изображена статически неопределимая задача.

Спроецируем внешние силы на ось x

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0,$$

где P_{xi} - проекция внешней силы на ось x.

$$R_x^A + R_x^B = 0.$$

Так как отсутствуют внешние силы вдоль оси x, то

$$R_x^A = R_x^B = 0.$$

Для раскрытия статической неопределимости применяем метод сил. Условно отбрасываем левую заделку, в точке A прикладываем две обобщенные силы: силу X_1 ($X_1 = R_z^A$) и момент X_2 ($X_2 = M_y^A$) (рис.1.2).

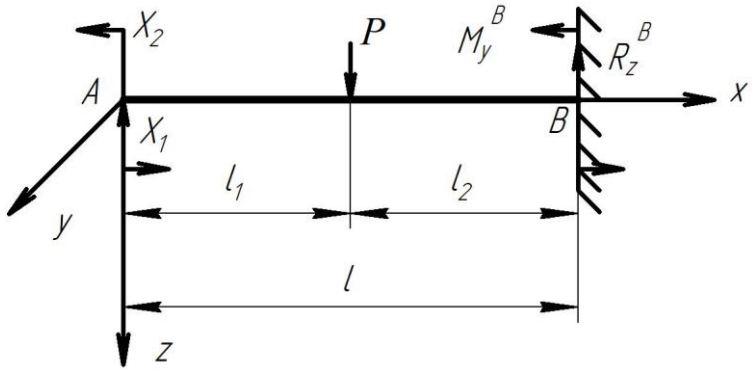

Рисунок 1.2. Расчетная схема метода сил

Для раскрытия статической неопределимости необходимо решить систему уравнений (1.1):

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}, \qquad (1.1)$$

где δ_{11} - перемещение стержня в точке А от единичной силы $X_1 = 1$;

δ_{12} - перемещение стержня в точке А от единичной силы $X_1 = 1$ и единичного момента $X_2 = 1$;

Δ_{1P} - перемещение стержня в точке А от единичной силы $X_1 = 1$ и силы P;

δ_{21}- перемещение стержня в точке А от единичного момента $X_2 = 1$ и единичной силы $X_1 = 1$;

δ_{22} перемещение стержня в точке А от единичного момента $X_2 = 1$;

Δ_{2P} - перемещение стержня в точке А от единичного момента $X_2 = 1$ и силы P.

В системе уравнений (1.1) две неизвестных $X_1 = R_z^A$ и $X_2 = M_y^A$. Для решения системы уравнений (1.1) необходимо вычислить перемещения $(\delta_{11}, \delta_{12}, \Delta_{1P}, \delta_{21}, \delta_{22}, \Delta_{2P})$.

Эти перемещения вычисляем с использованием интегралов Мора.

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_1} dx,$$

где M_{y_1} - изгибающий момент от единичной силы $X_1 = 1$;

Для того, чтобы определить M_{y_1} рассмотрим расчетную схему, на которой стержень нагружен только единичной силой $X_1 = 1$ (рис.1.3).

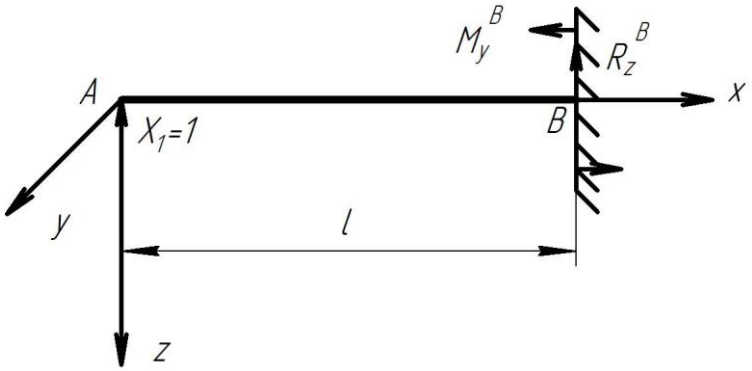

Рис.1.3. Расчетная схема нагрузки стержня единичной силой $X_1 = 1$

В этом случае в стержне один грузовой участок (рис.1.4)

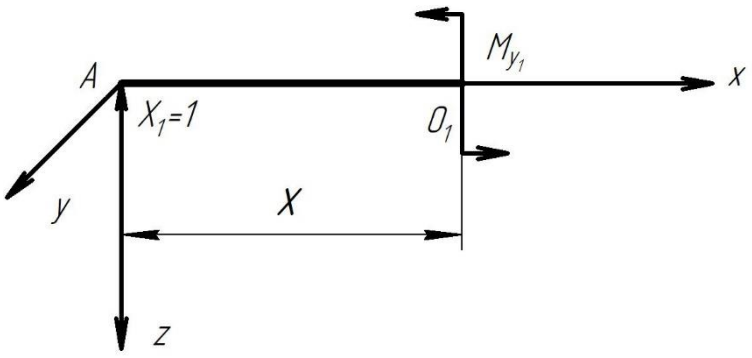

Рис.1.4. Расчетная схема грузового участка

Уравнение равновесия изгибающих моментов M_y имеет вид:

$$-X_1 \cdot x + M_{y_1} = 0 \Rightarrow M_{y_1} = X_1 \cdot x = 1 \cdot x, x \in [0; l].$$

Тогда можно записать

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^3}{3}, м.$$

Перемещение δ_{12} вычисляем по формуле:

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx,$$

где M'_{y_1} - изгибающий момент от единичного момента $X_2 = 1$;

Для того, чтобы определить момент M'_{y_1} рассмотрим расчетную схему, на которой стержень нагружен только единичным моментом $X_2 = 1$ (рис.1.5).

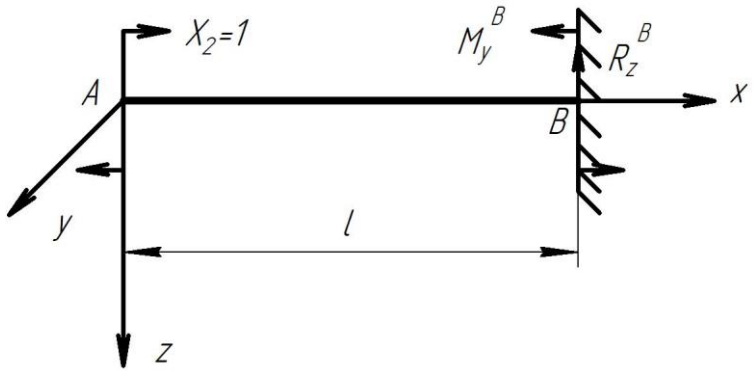

Рис.1.5. Расчетная схема нагрузки стержня единичным моментом $X_2 = 1$

В стержне один грузовой участок (рис.1.6)

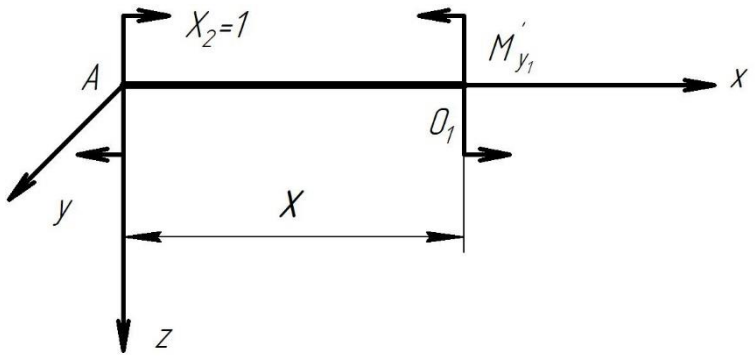

Рис.1.6. Расчетная схема грузового участка

Уравнение равенства нулю суммы изгибающих моментов M_y имеет вид:

$$-X_2 + M'_{y_1} = 0 \Rightarrow M'_{y_1} = X_2 = 1, x \in [0; l].$$

Тогда можно записать

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l 1 \cdot x \cdot 1 dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2}, м.$$

Перемещение Δ_{1P} вычислим по формуле:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx,$$

где M_{y_P} - изгибающий момент от силы P.

Для определения момент M_{y_P} рассмотрим расчетную схему, на которой стержень нагружен только силой P (рис.1.7).

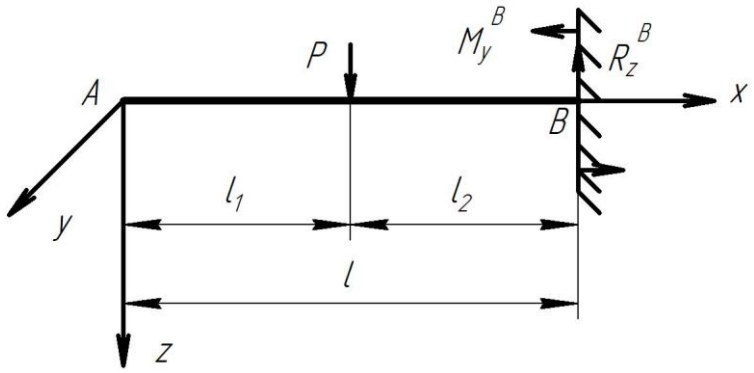

Рис.1.7. Расчетная схема нагрузки стержня силой P

В этом случае в стержне один грузовой участок l_2 (рис.1.7). На участке стержня l_1 изгибающий момент $M_{y_P} = 0$. Расчетная схема грузового участка приведена на рисунке 1.8.

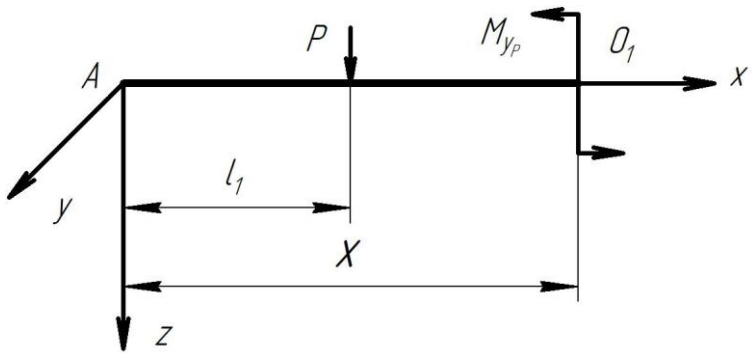

Рис.1.8. Расчетная схема грузового участка

Уравнение равновесия изгибающих моментов M_y имеет вид:

$$M_{y_P} + P \cdot (x - l_1) = 0 \Rightarrow M_{y_P} = -P \cdot (x - l_1), H \cdot м, x \in [l_1; l_1 + l_2].$$

Так как изгибающие моменты M_{y_1} и M_{y_P} имеют разные грузовые участки, уравнение для определения перемещения Δ_{1P} необходимо разделить на две составляющие, по двум грузовым участкам стержня.

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[\int_0^{l_1} M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx + \int_{l_1}^{l} M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx \right].$$

Первое слагаемое в уравнении равно нулю, так как на участке стержня от 0 до l_1 $M_{y_P} = 0$. Тогда можно записать:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_{l_1}^{l_1 + l_2} M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_{l_1}^{l_1 + l_2} 1 \cdot x \cdot (-P \cdot (x - l_1)) dx =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \int_{l_1}^{l_1 + l_2} x \cdot (-P \cdot (x - l_1)) dx = \frac{1}{E \cdot J_y} [\int_{l_1}^{l_1 + l_2} - P \cdot x^2 dx + \int_{l_1}^{l_1 + l_2} P \cdot l_1 \cdot x dx] =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \left[- P \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{l_1}^{l} + P \cdot l_1 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{l_1}^{l} \right] =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \left[- P \cdot \frac{(l^3 - l_1^3)}{3} + P \cdot l_1 \cdot \frac{(l^2 - l_1^2)}{2} \right] м.$$

Перемещение δ_{21} вычисляется по формуле:

$$\delta_{21} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M_{y_1} dx,$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l 1 \cdot 1 \cdot x dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2}, м.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Перемещение δ_{22} вычисляется по формуле:

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l 1 \cdot 1 dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot x \Big|_0^l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot l, м.$$

Перемещение Δ_{2P} вычисляется по формуле:

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M_{y_P} dx.$$

Особенность уравнения для вычисления Δ_{2P} заключается в том, что у изгибающих моментов M'_{y_1} и M_{y_p} разные грузовые участки. При определении M'_{y_1} грузовой участок $x \in [0, l]$, при определении M_{y_P} грузовой участок $x \in [l_1, l_1 + l_2]$.

Поэтому уравнение для определения перемещения Δ_{2P} необходимо разделить на две составляющие , по двум грузовым участкам стержня:

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l M'_{y1} M_{yp} dx = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^{l_1} M'_{y1} M_{yp} dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} M'_{y1} M_{yp} dx \right]$$

Первое слагаемое в уравнении обращается в ноль, как как на участке стержня от 0 до l_1 $M_{y_P} = 0$.

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l M'_{y1} M_{yp} dx = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^{l_1} M'_{y1} M_{yp} dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} M'_{y1} M_{yp} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^{l_1} 1 \cdot 0 dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} 1 \cdot (-P \cdot (x - l_1)) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[\int_{l_1}^{l_1+l_2} -P \cdot x dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} P \cdot l_1 dx \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[-P \frac{x^2}{2} \Big|_{l_1}^{l_1+l_2} + P \cdot l_1 \cdot x \Big|_{l_1}^{l_1+l_2} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \left[-P \frac{(l_1 + l_2)^2 - l_1^2}{2} + P \cdot l_1 \cdot l_2 \right], м.$$

Рассмотрим пример вычисления перемещений системы (1.1), задавшись числовыми значениями. Пусть $P = 10H;\ l_1 = l_2 = 0{,}5м.$

Решение:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{(l_1 + l_2)^3}{3} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{1}{3}, м$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{1}{2}, м$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{1}{2}, м$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot 1, м$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y}\left[- P \cdot \frac{(l^3 - l_1^3)}{3} + P \cdot l_1 \cdot \frac{(l^2 - l_1^2)}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y}\left[-10 \cdot \frac{(1^3 - 0{,}5^3)}{3} + 10 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{(1^2 - 0{,}5^2)}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y}\left[-10 \cdot \frac{0{,}875}{3} + 10 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{0{,}75}{2} \right] = \frac{1}{E \cdot J_y}\left[-2{,}917 + 1{,}875 \right] =$$

$$= -1{,}042 \frac{1}{E \cdot J_y}, м$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_y}\left[- P \frac{x^2}{2}\Big|_{l_1}^{l_1 + l_2} + P \cdot l_1 \cdot x\Big|_{l_1}^{l_1 + l_2} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[-10 \frac{1^2 - 0{,}5^2}{2} + 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[-5 \cdot 0{,}75 + 2{,}5 \right] = \frac{1}{EJ_y}(-3{,}75 + 2{,}5) = -1{,}25 \frac{1}{EJ_y}, м.$$

1.2 Крепление стержня – с одной стороны шарнирно-подвижная опора, с другой стороны заделка

На рис.1.9 приведена расчетная схема крепления выводов к корпусу прибора

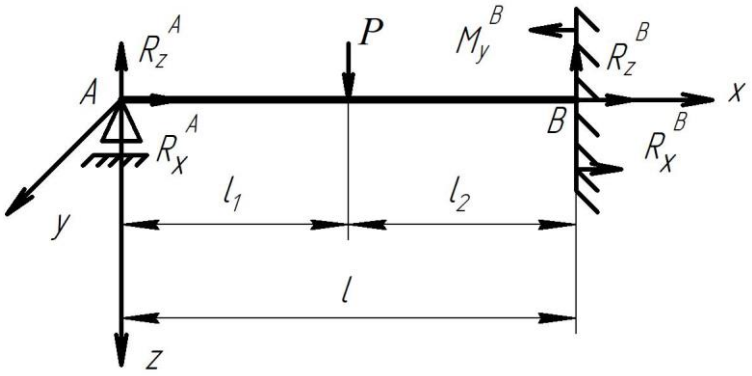

Рис.1.9. – Расчетная схема крепления выводов к корпусу прибора (пайка - винт)

На рисунке 1.9 изображена 1 раз статически неопределимая задача.

Для раскрытия статической неопределимости применяем метод сил. Условно отбрасываем шарнирно-подвижную опору, в точке A прикладываем силу X_1 $(X_1 = R_z^A)$.

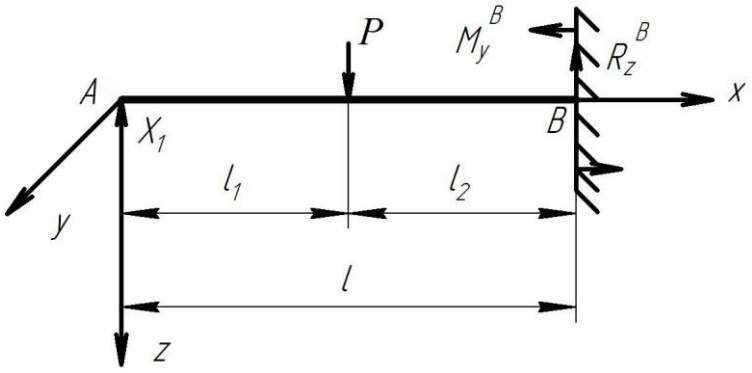

Рис.1.10.Расчетная схема метода сил $(X_1 = R_z^A)$

$$\Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

где Δ_{11} - перемещение стержня в точке А от силы X_1;

Δ_{1P} - перемещение стержня в точке А от силы P;

Сумма перемещений Δ_{11} и Δ_{1P} равна нулю, так как в точке A расположена опора, не позволяющая стержню переместиться.

$$\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1$$

Тогда можно записать:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = R_z^A$$

Таким образом, для того чтобы раскрыть статическую неопределимость необходимо вычислить перемещения δ_{11} и Δ_{1P}. Эти перемещения вычисляем с использованием интегралов Мора, в разделе 1.1.

2. РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ЗАДАЧИ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ВЕРЕЩАГИНА

В балках, содержащих большое число грузовых участков, при расчете перемещений получение подинтегральных выражений становится достаточно трудоемкой задачей, т.к. эти выражения представляются в общем виде – функции от координаты.

От этого недостатка можно уйти, если непосредственное интегрирование в формулах заменить так называемым перемножением эпюр. Такая замена возможна в тех случаях, когда хотя бы одна из перемножаемых эпюр является прямолинейной. Этому условию соответствуют все системы, состоящие из прямолинейных стержней. В таких системах эпюра, построенная от обобщенной единичной силы, всегда будет прямолинейной.

Способ вычисления интеграла Мора путем замены непосредственного интегрирования перемножением соответствующих эпюр называется методом (правилом) Верещагина и заключается в следующем: чтобы перемножить две эпюры, из которых хотя бы одна является прямолинейной, нужно площадь одной эпюры (если есть криволинейная эпюра, то обязательно ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой.

Для реализации правила Верещагина нужно знать площади геометрических фигур и координаты их центров тяжести. Для перемножения эпюр сложной формы их необходимо разбивать на простейшие. Например, для перемножения двух эпюр, имеющих вид трапеции, нужно одну из них разбить на треугольник и прямоугольник, умножить площадь каждого из них на

ординату второй эпюры, расположенную под соответствующим центром тяжести, и результаты сложить. Аналогично поступают и для умножения криволинейной трапеции на любую линейную эпюру.

2.1 Расчет удельного перемещения δ_{11}

Удельное перемещение δ_{11} аналитически вычисляется по формуле:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_1} dx,$$

Для вычисления интеграла $\int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_1} dx$ графическим методом необходимо построить эпюру изгибающего момента M_{y_1} и перемножить ее на себя. Для этого надо перемножить площадь $S_{M_{y1}}$ эпюры M_{y_1} на ординату (высоту) $l_{M_{y1}}$ эпюры M_{y_1}, расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_1}.

То есть можно записать:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y1}} \cdot l_{M_{y1}}.$$

При построении эпюры M_{y_1} используем соотношение

$$M_{y_1} = X_1 \cdot x = 1 \cdot x \ , \ x \in [0; l].$$

Граничные условия:

При $x = 0 \Rightarrow M_{y_1} = 0$;

При $x = l \Rightarrow M_{y_1} = l$. (рис.2.1)

Площадь эпюры M_{y_1} определяется по формуле:

$$S_{M_{y1}} = \frac{1}{2} l \cdot l = \frac{l^2}{2}.$$

Центр тяжести прямоугольного треугольника расположен на пересечении линий, проведенных на расстоянии $1/3$ длины катетов от вершины

треугольника. Для определения длины ординаты, необходимо в уравнении $M_{y_1} = X_1 \cdot x = 1 \cdot x$ положить $x = \frac{2}{3} l$.

$$l_{M_{y_1}} = M_{y_1}\Big|_{x=\frac{2}{3}l} = 1 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} l .$$

Тогда:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y1}} \cdot l_{M_{y1}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^3}{3}, м.$$

Полученное значение совпадает со значением, вычисленным аналитически.

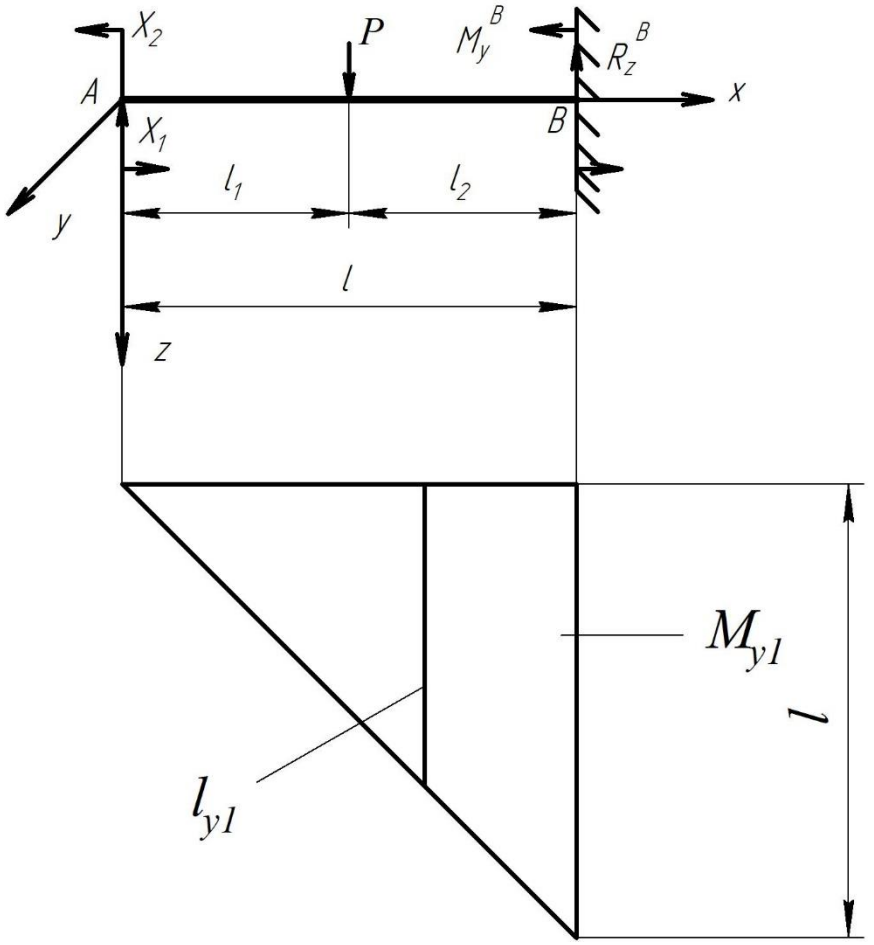

Рис.2.1.Расчетная схема определения перемещения δ_{11} методом Верещагина.

2.2 **Расчет удельного перемещения** $\delta_{12}(\delta_{21})$

Удельное перемещение δ_{12} аналитически вычисляется по формуле:

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx$, графическим методом необходимо построить эпюры изгибающих моментов M_{y_1} и M'_{y_1}, затем перемножить их. Для этого необходимо перемножить площадь эпюры M_{y_1} $(S_{M_{y_1}})$ на ординату (высоту) эпюры M'_{y_1} $(l_{M'_{y1}})$, расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_1} или перемножить площадь эпюры M'_{y_1} $(S_{M'_{y1}})$ на ординату (высоту) эпюры M_{y_1} $(l_{M_{y1}})$, расположенную под центром тяжести эпюры M'_{y_1}.

То есть можно записать:

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y1}} \cdot l_{M'_{y1}} = S_{M'_{y_1}} \cdot l_{M_{y_1}}.$$

При построении эпюры M'_{y_1} используем соотношение (Рис.2.2).

$$M'_{y_1} = X_2 = 1, \; x \in [0; l].$$

Площадь эпюры M_{y_1} определяется по формуле:

$$S_{M_{y_1}} = \frac{1}{2} l \cdot l = \frac{l^2}{2}, м^2.$$

Длина ординаты эпюры M'_{y_1}, расположенная под центром тяжести эпюры M_{y_1} определяется по формуле:

$$l_{M'_{y_1}} = M'_{y_1}\Big|_{x=\frac{2}{3}l} = 1, м.$$

Тогда перемещение δ_{12} равно:

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y1}} \cdot l_{M'_{y1}} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2}, м.$$

Полученное значение совпадает со значением, вычисленным аналитически.

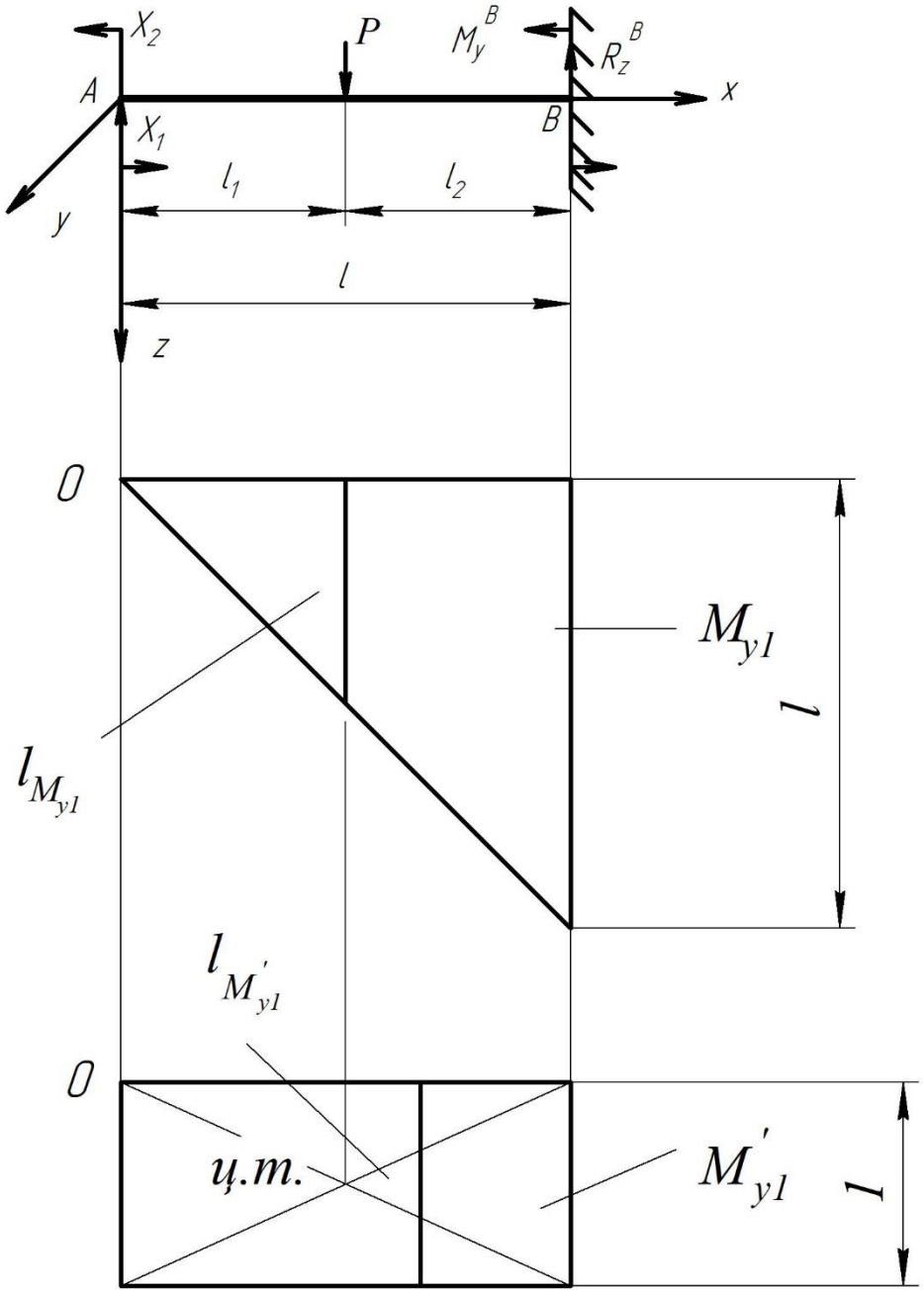

Рис.2.2. Расчетная схема определения перемещения δ_{12} методом Верещагина.

Определим удельное перемещение δ_{12} вторым способом.

Площадь эпюры M'_{y_1} вычисляется по формуле:

$$S_{M'_{y_1}} = l \cdot 1 = l.$$

Центр тяжести эпюры M'_{y_1} расположен на пересечении диагоналей, т.е. $x = \frac{l}{2}$. Длина ординаты эпюры M_{y_1}, расположенной под центром тяжести эпюры M'_{y_1} .определяется по формуле:

$$l_{M_{y_1}} = M_{y_1}\Big|_{x=\frac{1}{2}l} = 1 \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l.$$

Тогда перемещение δ_{12} равно:

$$\delta_{12} = \frac{1}{E \cdot J_y}\int_0^l M_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M'_{y_1}} \cdot l_{M_{y_1}} =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \frac{l^2}{2}, м.$$

Полученное значение совпадает со значением, вычисленным аналитически.

2.3 **Расчет удельного перемещения** δ_{22}

Удельное перемещение δ_{22} аналитически вычисляется по формуле:

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot J_y}\int_0^l M'_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int_0^l M'_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx,$ графическим способом необходимо построить эпюру изгибающего момента M'_{y_1} и перемножить ее на себя. Для этого необходимо перемножить площадь эпюры M'_{y_1} ($S_{M'_{y1}}$) на

ординату (высоту) эпюры M'_{y_1} ($l_{M'_{y1}}$) , расположенную под центром тяжести эпюры M'_{y_1} (рис.2.3).

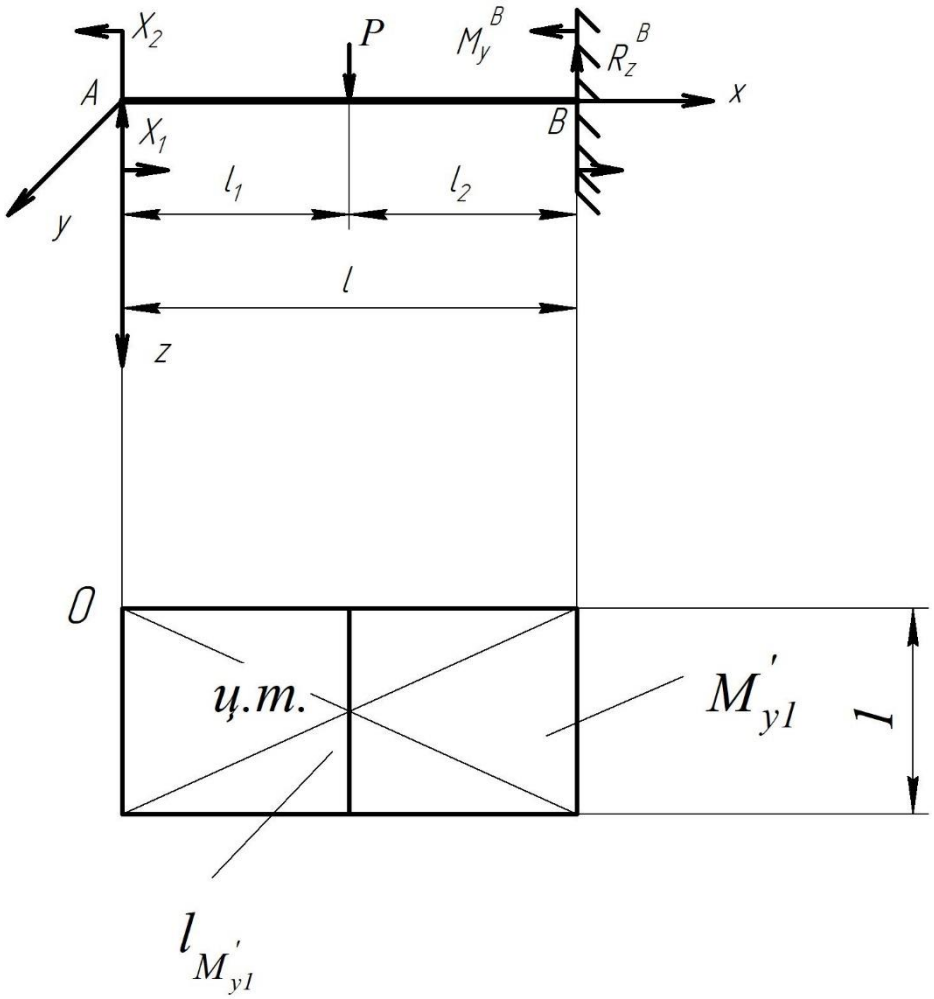

Рис.2.3.Расчетная схема определения перемещения δ_{22} методом Верещагина.

То есть можно записать:

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M'_{y_1} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M'_{y_1}} \cdot l_{M'_{y1}}.$$

Площадь эпюры M'_{y_1} определяется по формуле:

$$S_{M'_{y_1}} = l \cdot 1 = l.$$

Длина ординаты $l_{M'_{y1}} = 1$. Тогда

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M'_{y1}} \cdot l_{M'_{y1}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot l, м.$$

Полученное значение совпадает со значением, вычисленным аналитически.

2.4 **Расчет перемещения** Δ_{1P}

Перемещение Δ_{1P} аналитически вычисляется по формуле:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx$, графическим способом необходимо построить эпюры изгибающих моментов M_{y_1} и M_{y_P}, затем перемножить их. Для этого необходимо умножить площадь эпюры M_{y_1} $(S_{M_{y1}})$ на ординату (высоту) эпюры M_{y_P} $(l_{M_{yP}})$, расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_1} ,или умножить площадь эпюры M_{y_P} $(S_{M_{yP}})$ на ординату эпюры M_{y_1} $(l_{M_{y1}})$, расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_P} (рис.2.4).

То есть можно записать:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y1}} \cdot l_{M_{y_P}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{y_P}} \cdot l_{M_{y_1}}.$$

У эпюр M_{y_1} и M_{y_P} не совпадают грузовые участки, поэтому интеграл Мора необходимо разделить на две составляющие:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[\int_0^{l_1} M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx + \int_{l_1}^l M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx \right];$$

При построении эпюры M_{y_1} используем соотношение:

$$M_{y_1} = X_1 \cdot x = 1 \cdot x \ , \ x \in [0; l]$$

$$x = 0; \quad M_{y1} = 0;$$

$$x = l; \quad M_{y1} = l;$$

При построении эпюры M_{y_P} используем уравнение:

$$M_{yp} = -P(x - l_1);$$

$$x \in [l_1; l_1 + l_2];$$

Граничные условия:

$$x = l_1 \Rightarrow M_{yp} = 0;$$

$$x = l_1 + l_2 \Rightarrow M_{yp} = -P \cdot l_2;$$

Для удобства зададимся числовыми значениями. Пусть $P = 10H$, $l_1 = l_2 = 0{,}5м, l = 1м$.

На участке стержня от 0 до l_1 эпюра M_{y_1} представляет собой треугольник (обозначена цифрой 1 на рис.2.4), а эпюры M_{y_P} на этом участке нет. Следовательно

$$\int_0^{l_1} M_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = S_{M_{y_1}} \cdot l_{M_{y_P}} = S_{M_{y_P}} \cdot l_{M_{y_1}} = 0$$

Для расчета перемещения Δ_{1P} необходимо перемножить эпюры M_{y_1} и M_{y_P} на участке стержня от l_1 до $l_1 + l_2$, $x \in [0{,}5;1{,}0]$. На этом участке эпюра M_{y_1} представляет собой трапецию (обозначена цифрой 2 на рис.2.4), а эпюра M_{y_P} треугольник.

Площадь трапеции вычислим по формуле:

$$S_{трап.} = \frac{a + b}{2} \cdot h,$$

где a - наибольшее основание трапеции;

b - наименьшее основание трапеции;

h - высота трапеции.

Для вычисления наименьшего основания b необходимо в уравнение $M_{y_1} = X_1 \cdot x = 1 \cdot x$ подставить $x = l_1 = 0{,}5м$

$$b = M_{y_1}\Big|_{(x=0{,}5)} = 1 \cdot x = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ м}.$$

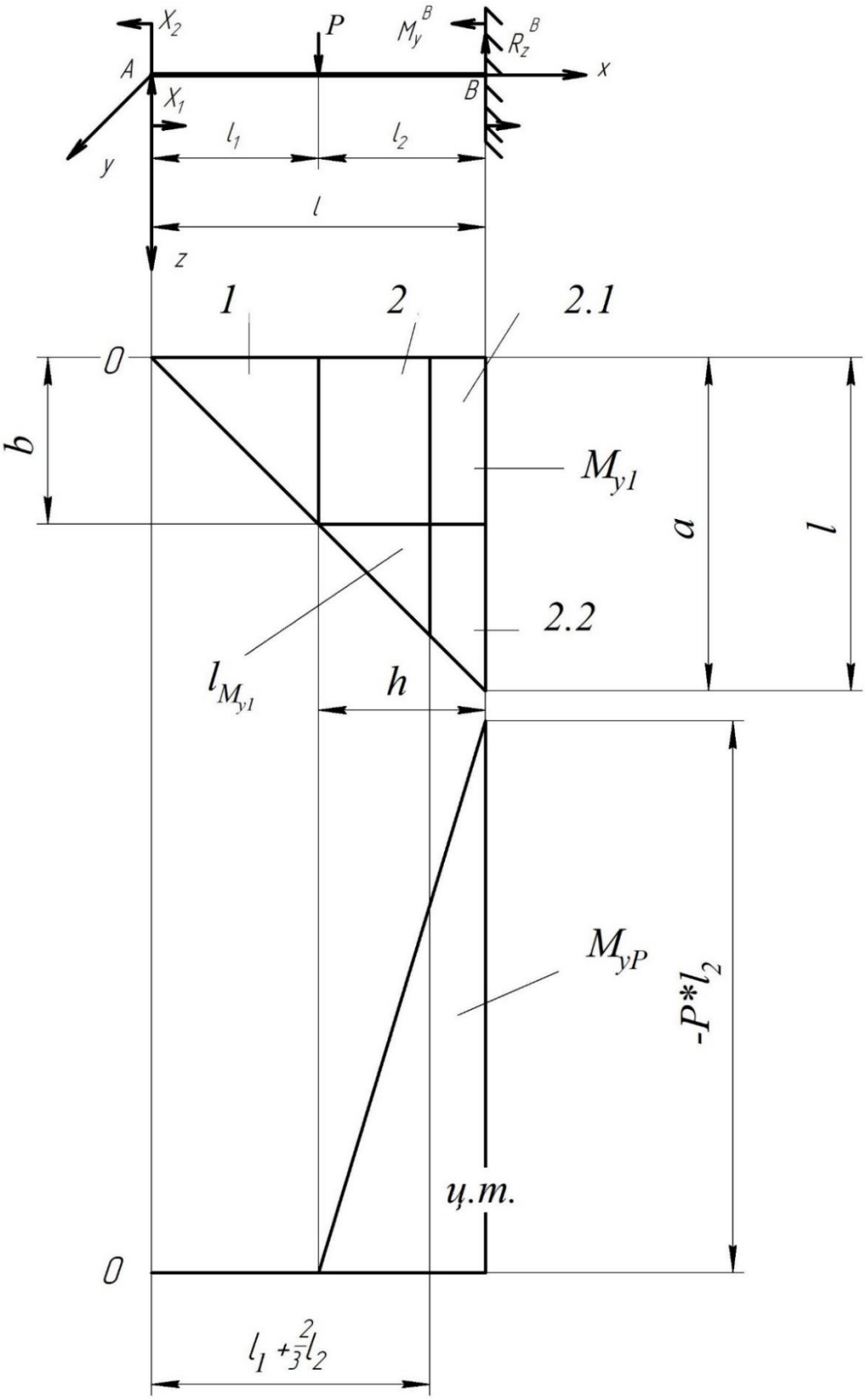

Рис.2.4. Расчетная схема определения перемещения Δ_{1P} методом Верещагина.

Для вычисления наибольшего основания a необходимо в уравнение $M_{y_1} = 1 \cdot x$ подставить $x = l_1 + l_2 = 1{,}0 м$

$$a = M_{y_1}\Big|_{(x=1,0)} = 1 \cdot x = 1 \cdot 1{,}0 = 1{,}0 \ м$$

Высота трапеции $h = l_2 = 0{,}5 м$.

Тогда площадь трапеции равна:

$$S_{M_{y1}} = \frac{1{,}0 + 0{,}5}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}375 \ м^2$$

Ордината эпюры M_{y_P} ($l_{M_{yp}}$) должна проходить по центром тяжести трапеции, которая является фигурой сложной формы. Для определения центра тяжести трапеции, делим ее на две простые фигуры: прямоугольник и треугольник. Координату x_c центра тяжести трапеции вычислим по формуле:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2},$$

где x_1 - координата центра тяжести прямоугольника (фигура 2.1 рис.2.4);

x_2 - координата центра тяжести треугольника (фигура 2.2 рис.2.4);

A_1 - площадь прямоугольника (фигура 2.1);

A_2 - площадь треугольника (фигура 2.2).

Площадь прямоугольника 2.1 вычислим по формуле:

$$A_1 = l_2 \cdot b = l_2 \cdot M_{y_1}\Big|_{x=l_1} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 м^2.$$

Площадь треугольника 2.2 вычислим по формуле:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 м^2.$$

$$A_1 + A_2 = 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375 м^2.$$

Центр тяжести прямоугольника 2.1 расположен на пересечении диагоналей. Координата центра тяжести прямоугольника x_1 равна:

$$x_1 = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75 м.$$

Центр тяжести прямоугольного треугольника 2.2 расположен на пересечении линий, проведенных на расстоянии $\frac{1}{3}l_2$ от вершины треугольника (рис.2.4).

$$\frac{1}{3}l_2 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 = 0{,}167 \text{ м}$$

Тогда координата центра тяжести x_2 треугольника равна:

$$x_2 = 1 - 0{,}167 = 0{,}833 м.$$

$$x_C = \frac{0{,}25\cdot 0{,}75 + 0{,}125\cdot 0{,}833}{0{,}375} = \frac{0{,}188 + 0{,}104}{0{,}375} = \frac{0{,}292}{0{,}375} = 0{,}779 м.$$

Для вычисления ординаты эпюры M_{y_P} под центром тяжести эпюры M_{y_1} необходимо в уравнении $M_{y_P} = -P\cdot(x - l_1), H\cdot м$ положить $x = 0{,}779$.

$$l_{M_{yp}} = M_{yp}\big|_{x=0{,}779} = -10\cdot(0{,}779 - 0{,}5) = -10\cdot 0{,}279 = -2{,}79 м.$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E\cdot J_y}\cdot S_{M_{y1}}\cdot l_{M_{yp}} = \frac{1}{E\cdot J_y}\cdot 0{,}375\cdot(-2{,}79) =$$

$$= \frac{1}{E\cdot J_y}\cdot(-1{,}046) м.$$

Площадь эпюры M_{y_P} ($S_{M_{yp}}$) равна:

$$S_{M_{yp}} = \frac{1}{2}\cdot l_2\cdot M_{yp}\big|_{x=l} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot(-10)\cdot(1{,}0 - 0{,}5) = -1{,}25 м^2.$$

Центр тяжести треугольной эпюры M_{y_P} совпадает центром тяжести треугольника 2.2, то есть:

$$x_{M_{yp}} = 1 - 0{,}167 = 0{,}833 м.$$

Для определения длины ординаты эпюры M_{y_1} ($l_{M_{y_1}}$), расположенной под центром тяжести эпюры M_{yp} необходимо в уравнении $M_{y_1} = 1\cdot x$ подставить $x = 0{,}833 м.$

$$l_{M_{y1}} = M_{y_1}\big|_{x=0{,}833} = 1\cdot x = 1\cdot 0{,}833 = 0{,}833 м$$

Тогда перемещение Δ_{1P} равно:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{yp}} \cdot l_{M_{y1}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (-1{,}25 \cdot 0{,}833) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (-1{,}041) м. \qquad)$$

Значения перемещения Δ_{1P} вычисленные методом Верещагина совпадают с результатом аналитического вычисления по формуле (1.20) с небольшой погрешностью.

2.5 Расчет перемещения Δ_{2P}

Перемещение Δ_{2P} аналитически вычисляется по формуле:

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M_{y_P} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int_0^l M'_{y_1} M_{yp} dx$ графическим способом необходимо построить эпюры изгибающих моментов M'_{y_1} и M_{y_P}, затем перемножить их. Для этого необходимо умножить площадь эпюры M'_{y_1} ($S_{M'_{y_1}}$) на ординату (высоту) эпюры M_{y_P} ($l_{M_{y_P}}$), расположенную под центром тяжести эпюры M'_{y_1}, или умножить площадь эпюры M_{y_P} ($S_{M_{y_P}}$) на ординату эпюры M'_{y_1} ($l_{M'_{y_1}}$), расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_P} (рис.2.5).

То есть можно записать:

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M'_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M'_{y1}} \cdot l_{M_{yP}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{yP}} \cdot l_{M'_{y1}},$$

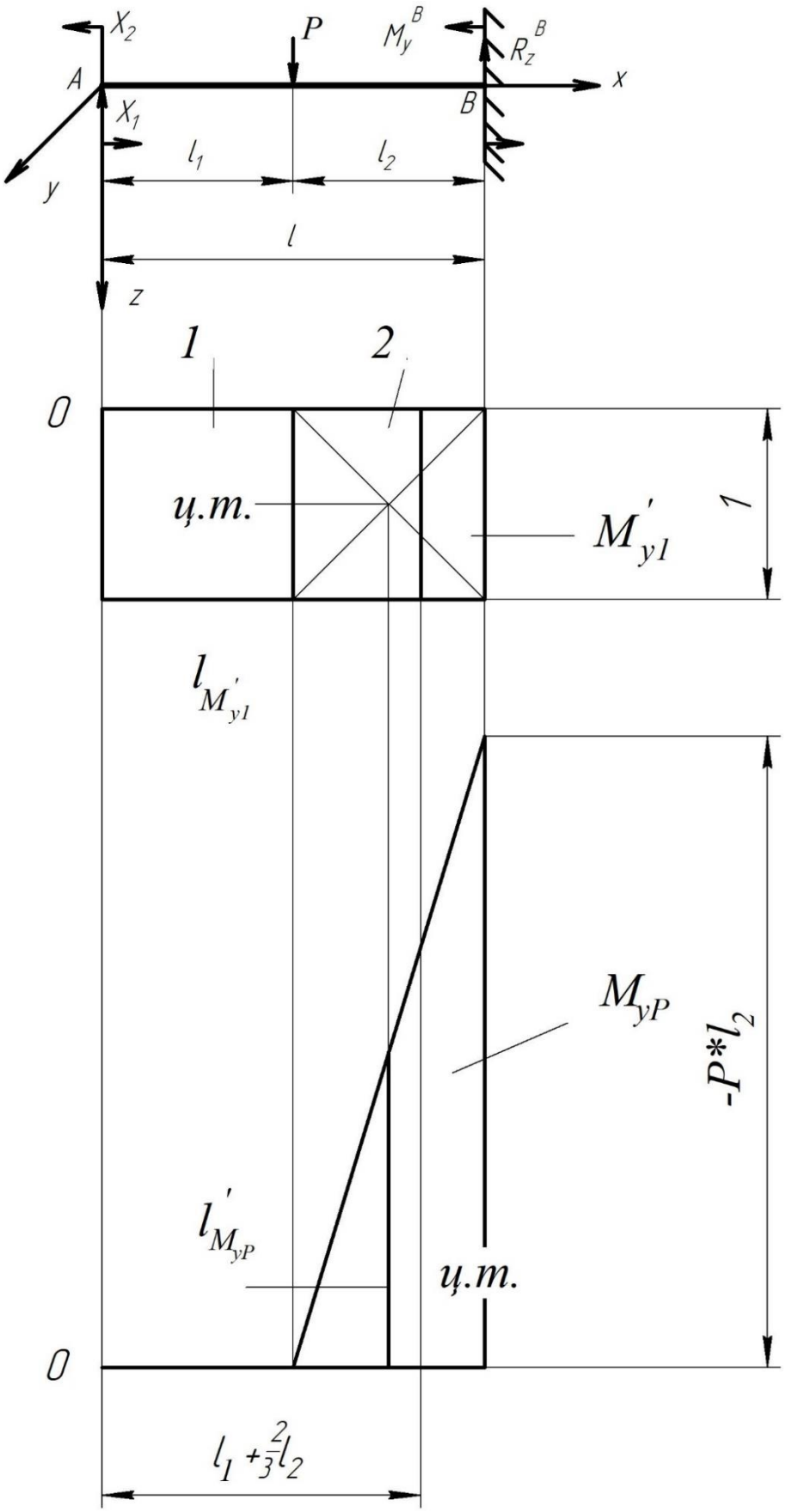

Рис. 2.5.Расчетная схема определения перемещения Δ_{2P} методом Верещагина.

У эпюр M'_{y_1} и M_{y_P} не совпадают грузовые участки, поэтому интеграл Мора необходимо разделить на две составляющие:

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l M'_{y_1} M_{yp} dx = \frac{1}{EJ_y}\left[\int_0^{l_1} M'_{y1} M_{yp} dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} M'_{y1} M_{yp} dx\right].$$

Для удобства зададимся числовыми значениями. Пусть $P = 10H$, $l_1 = l_2 = 0{,}5м$, $l = 1м$.

На участке стержня от 0 до l_1 эпюра M'_{y_1} представляет собой прямоугольник (обозначена цифрой 1 на рис.2.5), а эпюры M_{y_P} на этом участке нет. Следовательно

$$\int_0^{l_1} M'_{y_1} \cdot M_{y_P} dx = S_{M'_{y_1}} \cdot l_{M_{y_P}} = S_{M_{y_P}} \cdot l_{M'_{y_1}} = 0$$

Для расчета перемещения Δ_{2P} необходимо перемножить эпюры M'_{y_1} и M_{y_P} на участке стержня от l_1 до $l_1 + l_2$, $x \in [0{,}5;1{,}0]$. На этом участке эпюра M'_{y_1} представляет собой прямоугольник (обозначена цифрой 2 на рис.2.5), а эпюра M_{y_P} треугольник.

Площадь прямоугольника эпюры M'_{y_1} вычислим по формуле:

$$S_{M'_{y1}} = l_2 \cdot 1{,}0 = 0{,}5 \cdot 1{,}0 = 0{,}5м^2.$$

Центр тяжести эпюры M'_{y_1} расположен на пересечении диагоналей, тогда координата $x_{M'_{y_1}}$ определяется по формуле:

$$x_{M'_{y_1}} = l_1 + 0{,}5l_2 = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75м$$

Вычислим длину ординаты эпюры M_{y_P}, расположенной под центром тяжести эпюры M'_{y_1}.

$$l_{M_{yp}} = M_{yp}\big|_{x=0{,}75} = -P(x - l_1) = -10 \cdot (0{,}75 - 0{,}5) = -2{,}5м$$

Вычислим перемещение Δ_{2P}:

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M'_{y1}} \cdot l_{M_{yP}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot 0{,}5 \cdot (-2{,}5) = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (-1{,}25) м$$

Теперь вычислим перемещение Δ_{2P} вторым способом, перемножив площадь эпюры M_{y_P} на ординату эпюры M'_{y_1}, расположенную под центром тяжести эпюры M_{y_P}.

Площадь эпюры M_{y_P} равна:

$$S_{M_{yp}} = \frac{1}{2} l_2 \cdot (-P \cdot l_2) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot (-10 \cdot 0{,}5) = -1{,}25 м^2$$

Ордината эпюры M'_{y_1} равна единице.

$$l_{M'_{y_1}} = 1 м$$

Вычислим перемещение Δ_{2P}:

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot S_{M_{yP}} \cdot l_{M'_{y1}} = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (-1{,}25) \cdot 1 = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot (-1{,}25), м.$$

Таким образом, при вычислении Δ_{2P} аналитическим способом и методом Верещагина получен одинаковый результат.

После вычисления перемещений $\delta_{11}, \delta_{12}, \Delta_{1P}, \delta_{21}, \delta_{22}, \Delta_{2P}$ необходимо решить систему уравнений (1.1), корнями которой являются обобщенные силы X_1 и X_2. После этого задача становится статически определимой. Это позволяет вычислить внутренние силы и напряжения в стержне методом сечений.

Содержание (номера страниц скорректировать)

Введение …… ……...3
1. Аналитическое решение статически неопределимой задачи методом сил……. ….4
1.1. Крепление стержня - с двух сторон заделка……4
1.2. Крепление стержня – с одной стороны шарнирно-подвижная опора, с другой стороны заделка…13
2. Решение статически неопределимой задачи графическим методом Верещагина ……14
2.1. Расчет удельного перемещения δ_{11}……14
2.2. Расчет удельного перемещения $\delta_{12}(\delta_{21})$……16
2.3. Расчет удельного перемещения δ_{22}……19
2.4. Расчет перемещения Δ_{1P}……...21
2.5. Расчет перемещения Δ_{2P}…….……25

Титов Андрей Валерьевич
Николаева Елена Александровна

Решение статически неопределимых задач при плоском поперечном изгибе методом сил

Учебно-методическое пособие

Редактор

Подписано в печать 00.00.00. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 2,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 000 экз. Заказ 000.

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5