МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

А. В. ТИТОВ Е. А. НИКОЛАЕВА А. С. КУКАЕВ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2025

УДК 621.01(07)+531.8(07)
ББК Ж 12я7
Т45

Титов А. В., Николаева Е. А., Кукаев А. С.
Т45 Прикладная механика: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025. 108 с.

ISBN 978-5-7629-3594-4

Представляет собой конспект лекций. Содержит теоретические основы механики сплошного деформируемого твердого тела, уравнения для расчета напряжений, деформаций и перемещений, применяемые в инженерно-технических расчетах на прочность, жесткость и устойчивость. Рассматривается равновесие стержней и стержневых систем.

Предназначено для студентов технических вузов, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика».

УДК 621.01(07)+531.8(07)
ББК Ж 12я7

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. А. Санников (БГТУ «Военмех» им. Д. Ф. Устинова); кафедра биотехнических систем и технологий ГУАП (канд. техн. наук, доц. О. В. Тихоненкова).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-3594-4 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025

1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

1.1. Предмет изучения прикладной механики

Меха́ника (от греч. μηχανική – наука о машинах, искусство построения машин) – наука, которая формирует и исследует математические модели движения и взаимодействия материальных тел. Различают следующие разделы механики: механика материальной точки, механика системы материальных точек, механика абсолютно твердого тела, механика сплошной среды, в которой выделяют теорию упругости, теорию пластичности, механику жидкости и газа и др.

Прикладная механика – это дисциплина, которая изучает устройство и принципы работы механизмов и машин.

Включает в себя три раздела:

1. Сопротивление материалов. Рассматривает методы расчета инженерных конструкций по критериям работоспособности на *прочность*, *жесткость*, *устойчивость* и *надежность.*

2. Теория механизмов и машин. Изучает классификацию машин и механизмов, структуру и конструктивные особенности механизмов, а также кинематические и динамические характеристики механизмов.

3. Детали машин. Изучает теорию, расчет и конструирование типовых деталей и узлов общемашиностроительного применения.

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции так, чтобы он достаточно надежно, без риска разрушиться или исказить свою форму сопротивлялся действию внешних сил, передающихся на него от соседних частей конструкции, т. е. чтобы была обеспечена нормальная работа этого элемента. Основания для правильного решения этой задачи и дает инженеру наука о сопротивлении материалов.

Таким образом, сопротивление материалов изучает поведение различных материалов при действии на них внешних сил и указывает, как подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и поперечные размеры при условии надежной работы и наибольшей дешевизны конструкции. Как правило, требования надежности и наибольшей экономии противоречат друг другу.

Начало развития сопротивления материалов как науки обычно относят к 1638 г. и связывают с именем Галилео Галилея, знаменитого итальянского ученого. Галилей был профессором математики в Падуе. Довольно значительная

часть его научных работ была посвящена решению задач о зависимости между размерами балок и других стержней и теми нагрузками, которые могут выдержать эти элементы конструкции.

1.2. Свойства твердых тел

Твердое тело – тело, сохраняющее свою форму. Твердые тела бывают *кристаллическими* и *аморфными*. Кристаллические тела имеют кристаллическую решетку, а аморфные нет.

Кристаллическая решетка – упорядоченное расположение атомов и ионов в кристалле. Виды кристаллических решеток: 1) простая кубическая; 2) объемно-центрированная кубическая; 3) гранецентрированная кубическая; 4) гексагональная. Различают следующие виды *химических связей* в кристаллических решетках: 1) ковалентная; 2) ионная; 3) металлическая; 4) молекулярная (связь Ван-дер-Ваальса). Большинство твердых тел являются кристаллическими, к ним относятся металлы, дерево, лед, кости и т. д.

Аморфные тела – бесформенные. В них нет кристаллической решетки. Примеры аморфных тел: парафин, воск, сургуч, эбонит, шоколад, канифоль, смола, стекло, плексиглас, каучук, различные пластмассы.

Кристаллические тела делят на монокристаллы и поликристаллы.

Монокристалл, или *зерно* имеет одинаковую закономерность расположения атомов во всем объеме.

Поликристалл – агрегат, состоящий из большого количества хаотически расположенных зерен или кристаллитов.

Макроструктура – строение металла, которое можно наблюдать невооруженным глазом или при небольшом увеличении (до 30 раз) с помощью лупы.

Микроструктура – строение металла или сплава, видимое при больших увеличениях (более 30 раз) с помощью микроскопа.

Изотропия – независимость физических свойств от направления.

Анизотропия – зависимость физических свойств от направления.

Деформация – изменение формы и размеров твердого тела под действием внешних сил. Деформация бывает упругой и пластической (остаточной).

Упругой называется деформация, которая исчезает после прекращения действия вызвавшей ее внешней силы.

Пластической, или *остаточной* называется деформация, которая остается после прекращения действия вызвавшей ее внешней силы.

Под *прочностью* понимается способность конструкции сопротивляться разрушению и остаточной деформации. Существуют различные показатели (ха-

рактеристики) прочности материала, например: условный и физический предел текучести $(\sigma_{0,2};\sigma_{т})$, временное сопротивление $(\sigma_{в})$. Числовые значения характеристик прочности определяют по диаграмме «Сила деформации (P, Н) – удлинение образца (Δl), мм», которую записывают в ходе испытания образцов на растяжение или сжатие. На рис. 1.1 изображен цилиндрический образец для испытания на растяжение, имеющий диаметр d_0 и длину рабочей части l_0.

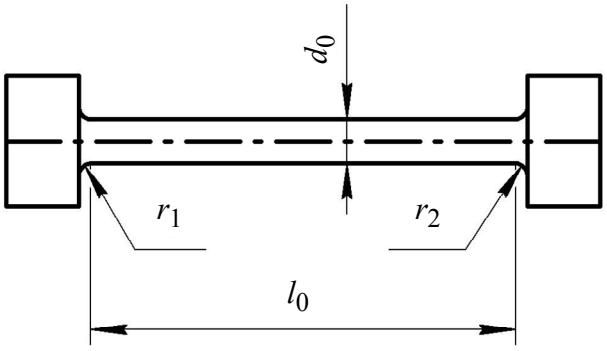


Рис. 1.1. Исходный цилиндрический образец

На рис. 1.2 изображена диаграмма «Сила деформации (P, Н) – удлинение образца (Δl, мм)».

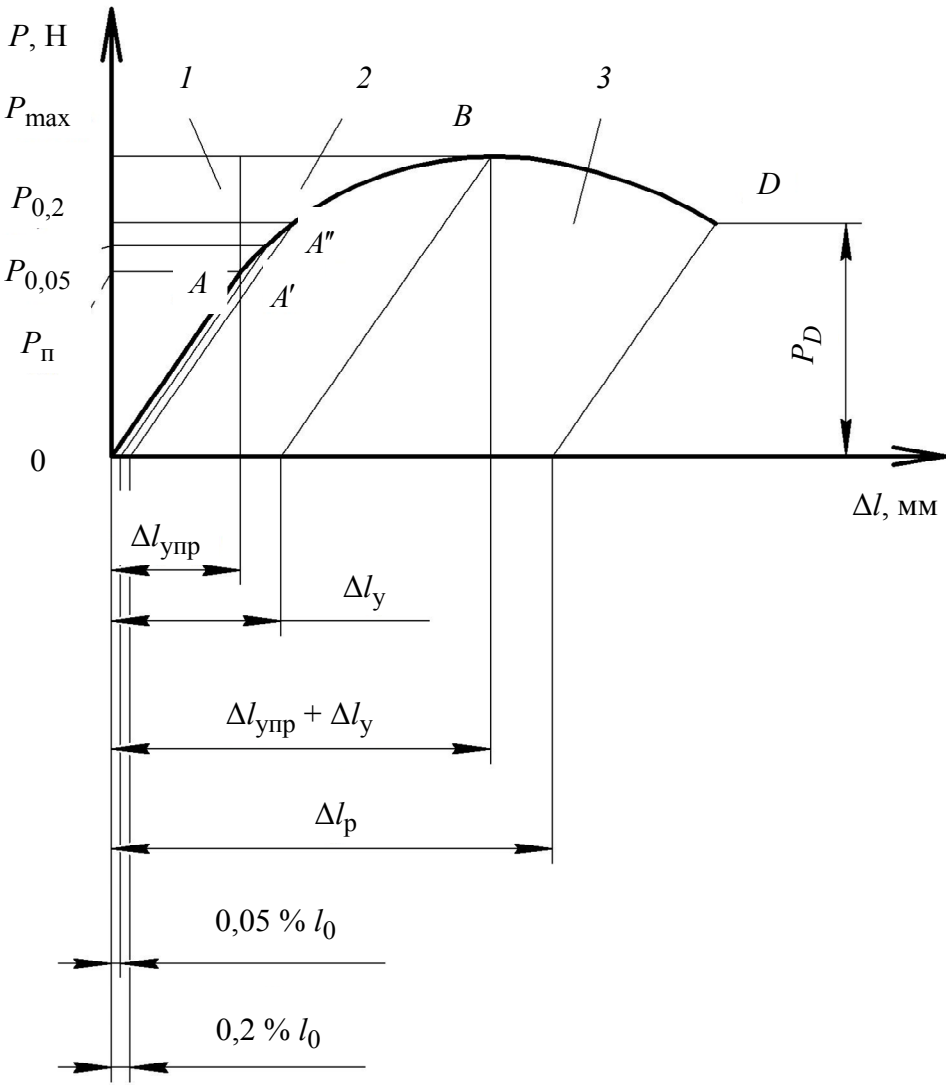


Рис. 1.2. Диаграмма «Сила деформации (P, Н) – удлинение образца (Δl, мм)»

На диаграмме «P – Δl» можно выделить три стадии деформации цилиндрического образца: *1* – стадия упругой деформации; *2* – стадия равномерной пластической деформации; *3* – стадия сосредоточенной пластической деформации. После начала растяжения образца его диаметр уменьшается, а длина увеличивается. Первая стадия характеризуется линейной зависимостью «P – Δl» . Первая стадия заканчивается в точке A. Если в процессе деформации на первой стадии снять нагрузку, то образец восстановит свои первоначальные размеры и диаграмма вернется в точку 0. Упругая деформация образца в процессе растяжения обозначена на диаграмме $\Delta l_{\text{упр}}$. Вторая стадия (участок AB) характеризуется равномерной пластической деформацией образца по всей длине (рис. 1.3).

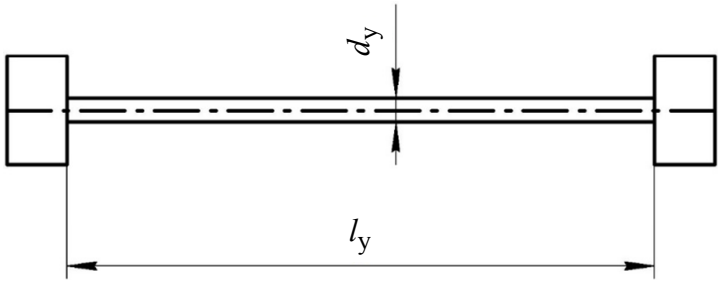


Рис. 1.3. Образец на стадии
равномерной пластической деформации

Диаметр образца в конце второй стадии (точка B) $d_{\text{у}}$, а длина рабочей части $l_{\text{у}}$. Если из точки B провести линию, параллельную отрезку 0A, то получим на оси Δl значение $\Delta l_{\text{у}}$, равное пластической деформации образца в конце второй стадии. А если из точки B провести вертикальную линию вниз, то получим на оси Δl значение $\Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_{\text{у}}$, равное сумме упругой и пластической деформации в конце второй стадии.

На третьей стадии (участок BD) на образце формируется локальный очаг пластической деформации с образованием шейки $d_{\text{ш}}$ – диаметр шейки (рис. 1.4).

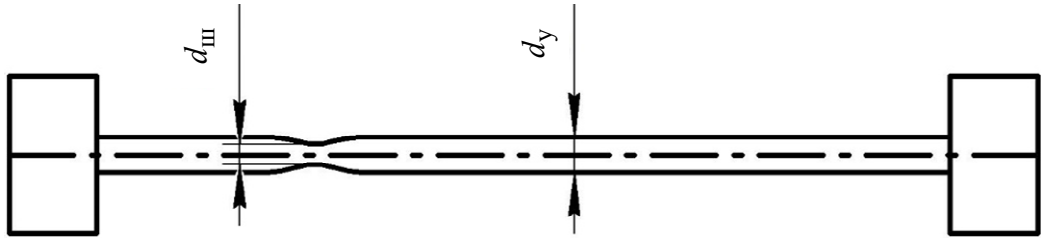


Рис. 1.4. Образец на стадии сосредоточенной пластической деформации

Разрушение образца происходит в точке D . У разрушенного образца измеряют геометрические размеры $d_{\text{у}}, d_{\text{ш}}$ (рис. 1.5).

Используя экспериментальную зависимость «$P - \Delta l$», а также размеры исходного и разрушенного образца рассчитывают параметры прочности материала по формуле:

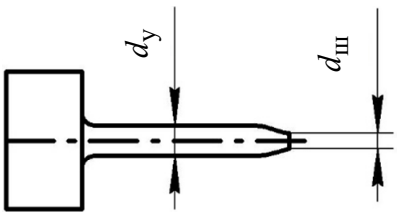


Рис. 1.5. Часть разрушенного цилиндрического образца

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0},$$

где $P_{0,2}$ – сила деформации, соответствующая 0,2 % удлинения исходного образца. По оси Δl откладывают величину равную $0,002 l_0$, затем проводят наверх линию параллельно участку $0A$ диаграммы. Точка пересечения этой линии с диаграммой указывает точку, соответствующую $P_{0,2}$; F_0 – площадь поперечного сечения исходного образца:

$$F_0 = \frac{\pi d_0^2}{4};$$

$$\sigma_т = \frac{P_т}{F_0},$$

где $P_т$ – сила деформации, соответствующая площадке текучести (рис. 1.6);

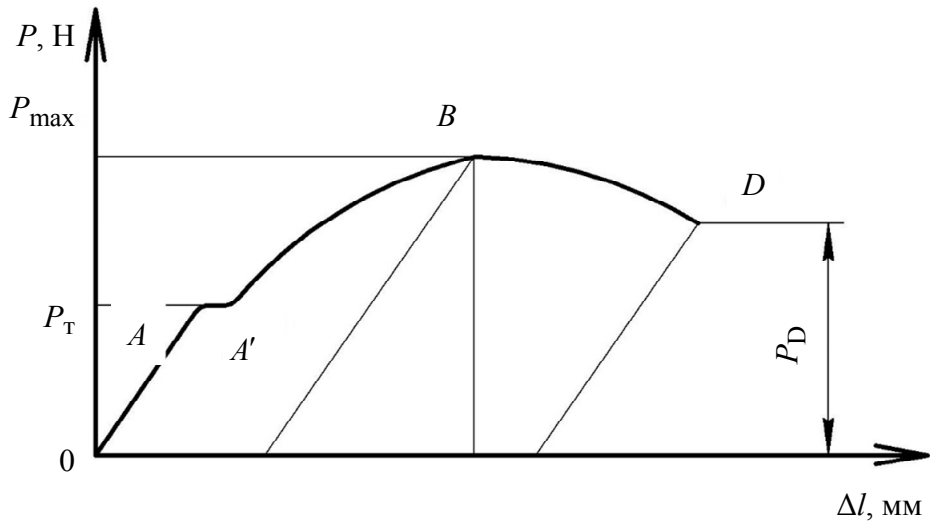


Рис. 1.6. Диаграмма «Сила деформации $(P, \text{Н})$ – удлинение образца $(\Delta l, \text{мм})$ с площадкой текучести»

$$\sigma_B = \frac{P_{max}}{F_0};$$

$$\sigma_p = \eta \frac{P_D}{F_ш},$$

где $F_ш$ – площадь поперечного сечения шейки образца;

$$F_{\text{ш}} = \frac{\eta d_{\text{ш}}^2}{4},$$

где η – коэффициент, учитывающий объемную схему напряженного состояния ($\eta < 1$).

Жесткость – способность конструкции сопротивляться упругой деформации или способность конструкции сопротивляться образованию деформаций, не превышающих предельные значения.

Параметры жесткости:

1) E – модуль продольной упругости (модуль Юнга), характеризует сопротивление материала линейной упругой деформации, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (МПа);

2) G – модуль сдвига, характеризует сопротивление материала сдвиговой деформации, $G = \frac{\tau}{\gamma}$ (Мпа);

3) C – коэффициент жесткости, $C = \frac{P}{x}$, $(\text{Н}/\text{м})$.

Устойчивость – способность конструкции противостоять воздействиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния статического или динамического равновесия.

Надежность – способность конструкции сохранять прочность, жесткость, устойчивость в течение длительного времени. Показатели надежности: безотказность, долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость.

Безотказность – способность изделия выполнять свои эксплуатационные свойства без учета ремонта.

Долговечность – способность изделия выполнять свои эксплуатационные свойства с учетом ремонта.

Ремонтопригодность – приспособленность изделия к техническому обслуживанию и ремонту.

Сохраняемость – способность изделия сохранять эксплуатационные свойства в процессе хранения и транспортировки.

Твердость – способность тела сопротивляться внедрению других тел. Показатели твердости НВ (Бринелль), HRC, HRV (Роквелл), HV (Виккерс). Твердость оценивается в единицах, соответствующих различным диаметрам отпечатка.

Пластичность – способность тела пластически деформироваться под действием внешних сил без разрушения: $\delta = \frac{\Delta l_P}{l_0} 100\,\%$ (см. рис. 1.2).

Упругость – способность тела упруго деформироваться под действием внешних сил. Показатели упругости $\sigma_{0,05}$ (условный предел упругости), $\sigma_{\text{п}}$ (предел пропорциональности):

$$\sigma_{0,05} = \frac{P_{0,05}}{F_0},$$

где $P_{0,05}$ – сила деформации, соответствующая 5 % изменения рабочей длины образца l_0 (см. рис. 1.2);

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{P_{\text{п}}}{F_0},$$

где $P_{\text{п}}$ – сила деформации, соответствующая началу отклонения графика «$P - \Delta l$» от линейной зависимости (см. рис. 1.2, точка A).

Хрупкость – способность тела разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. (Свойство противоположное пластичности).

Ударная вязкость металла – способность материала поглощать кинетическую энергию в процессе деформации и разрушения под действием ударной нагрузки $\left(\text{Дж}/\text{м}^2\right)$.

1.3. План решения основной задачи сопротивления материалов

При выборе размеров и материала элемента конструкции необходимо обеспечить его запас прочности. Для этого должно быть выполнено условие прочности:

$$p_{\max} \le [\sigma],$$

где $p_{\max}$ – наибольшие напряжения, возникающие в элементе конструкции; $[\sigma]$ – допускаемые напряжения.

Допускаемые напряжения зависят от материала и его механических свойств.

Для непластичных материалов $[\sigma]$ определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n},$$

где n – коэффициент запаса; принимают в диапазоне от 2,5 до 8…10.

Для пластичных материалов $[\sigma]$ вычисляют по зависимости:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n}.$$

План решения основной задачи сопротивления материалов состоит из следующих пунктов:

1) выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к проектируемому элементу, включая реакции;

2) выбрать материал, наиболее отвечающий назначению конструкции и характеру действия внешних сил; установить величину допускаемого напряжения;

3) задать размеры поперечного сечения элементов в числовой или алгебраической форме и вычислить величину наибольших действительных напряжений $p_{\max}$, которые в нем возникнут;

4) проверить выполнение условия прочности $p_{\max} \le [\sigma]$;

5) если условие прочности не выполняется, необходимо увеличить размеры поперечного сечения элемента конструкции или выбрать более прочный материал.

1.4. Классификация внешних сил

Внешняя сила – мера воздействия физических объектов.

По времени действия внешние силы делят на *постоянные* и *временные*.

По характеру действия силы бывают статические и динамические. *Статические силы* (постоянные во времени) сообщают как всему телу, так и отдельному элементу малые ускорения, которыми можно пренебречь. *Динамические силы* (переменные во времени) придают телу значительные ускорения, которыми нельзя пренебречь. Если конечное изменение внешней силы и скорости тела, передающего внешнюю силу, происходит за очень короткий промежуток времени, то такая динамическая сила называется ударной. Примером динамической силы также являются периодические повторяющиеся силы.

По месту приложения внешние силы классифицируются на *объемные*, *поверхностные*, *распределенные* и *сосредоточенные*. Объемная сила распределена по объему тела, имеет размерность $\left(\text{Н}/\text{м}^3\right)$. Примером объемной силы является вес тела. Среднее значение объемной силы определяется по формуле $\overline{g} = \dfrac{\Delta G}{\Delta V}$, где ΔG – элементарная сила (Н); ΔV – элементарный объем $\left(\text{м}^3\right)$. Если элементарный объем ΔV стремится к нулю, то значение объемной силы в окрестности точки A равно $\overline{g}_A = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta G}{\Delta V}$. Объемную силу можно разложить по координатным осям x, y, z на составляющие g_x, g_y, g_z. Поверхностная

сила распределена по поверхности тела, ее размерность $\left(\text{Н}/\text{м}^2\right)$. Физический смысл этой силы – в давлении на поверхность. Примером таких сил является давление моста на опоры, колес машины на дорогу и т. п. Выделим на теле точку *B*, вокруг точки – элементарную поверхность ΔF. Пусть на эту поверхность тела действует элементарная сила ΔP. Среднее значение поверхностной силы определяется по формуле $\overline{p} = \dfrac{\Delta G}{\Delta F}$, где ΔF – площадь элементарной поверхности. Если элементарная площадь ΔF стремится к нулю, то значение поверхностной силы в окрестности точки *A* равно $\overline{p}_A = \lim\limits_{\Delta F \to 0} \dfrac{\Delta G}{\Delta F}$. Поверхностную силу можно разложить по координатным осям *x*, *y*, *z* на составляющие p_x, p_y, p_z. Если ширина поверхности, к которой приложена внешняя сила, намного меньше длины, то шириной можно пренебречь и сказать, что сила приложена по линии. Такая сила называется распределенной. Распределенная сила *q* имеет размерность $\left(\text{Н}/\text{м}\right)$. Сосредоточенной называется сила приложенная в точке тела. В реальной жизни такие силы встречаются редко, на практике чаще упрощают поверхностные силы, считая, что площадь поверхности контакта двух тел мала по сравнению с размерами тела, и делают допущение, что сила приложена в точке $P(\text{Н})$ (рис. 1.7).

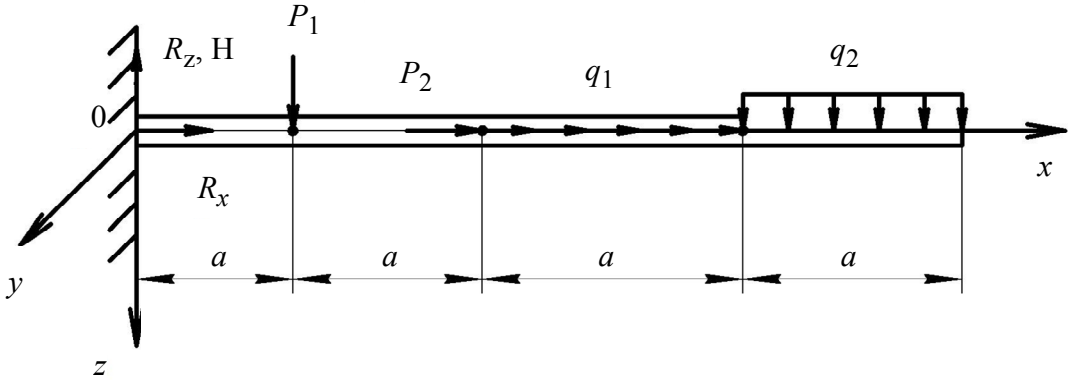


Рис. 1.7. Распределенные и сосредоточенные силы

Важным силовым параметром также является момент силы – векторная физическая величина, характеризующая действие силы на механический объект, которое может вызвать его вращательное движение (рис. 1.8). Момент силы определяется как векторное произведение радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из точки (полюса) О до точки приложения силы P, и силы P. Единица измерения момента силы $(\text{Н} \cdot \text{м})$ (рис. 1.8):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Pr} \sin \alpha, \tag{1.1}$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{r}$.

Плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от точки О до линии действия силы P, определяется по формуле

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \sin \alpha, \tag{1.2}$$

Таким образом:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Pl}. \tag{1.3}$$

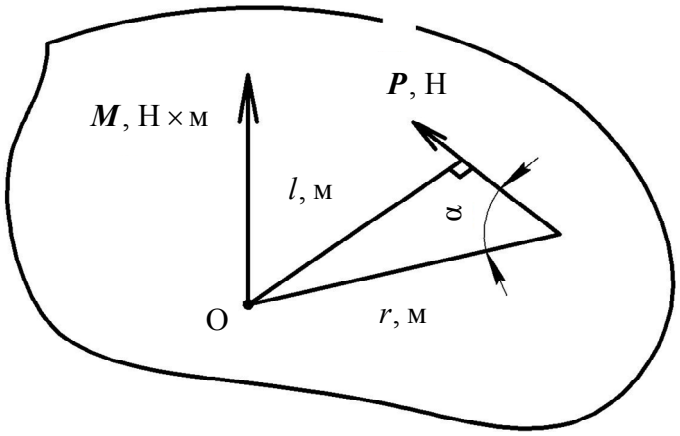


Рис. 1.8. Момент силы

При решении задач рассматривают сосредоточенный и распределенный моменты пары сил. Парой сил называется система двух сил, равных по модулю и противоположных по направлению. Действие пары сил на твердое тело сводится к вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой моментом пары.

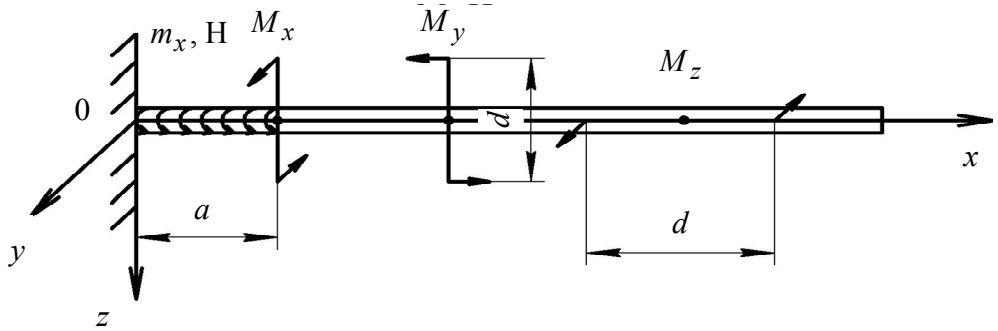


Рис. 1.9. Сосредоточенный и распределенный моменты пары сил

Расстояние между линиями действия пары сил d называется плечом пары. Сосредоточенный момент пары сил, приложенный в точке тела, обозначается M_x, M_y, M_z, измеряется в $(\text{Н} \cdot \text{м})$. Распределенный момент пары сил распределен по линии. Его обозначают m_x, m_y, m_z, он измеряется в $(\text{Н} \cdot \text{м}/\text{м})$ (рис. 1.9).

1.5. Расчетные схемы элементов конструкций

Существует большое разнообразие материалов, форм, размеров, способов крепления и внешних воздействий конструкций, требующих расчета на прочность, жесткость, устойчивость и надежность. Учесть при расчетах все разнообразие реальных конструкций очень сложно, поэтому их упрощают, заменяя расчетными схемами. В расчетных схемах упрощают следующие параметры:

1) свойства материала;

2) геометрию конструкции;

3) опорные устройства;

4) внешнюю нагрузку.

1.5.1. Упрощение (схематизация) свойств материала

В расчетных схемах, как правило, вводят следующие допущения:

1. Реальное дискретное строение тела заменяют сплошной средой, не имеющей пустот.

2. Материал является однородным, т. е. имеет одинаковые физические и механические свойства во всем объеме тела. Как следствие, материал является изотропным.

3. Материал обладает идеальной упругостью, т. е. полностью восстанавливает свои форму и размеры после прекращения действия внешних сил.

4. Свойства материала подчиняются закону Гука, т. е. существует линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

5. В материале отсутствуют начальные напряжения.

1.5.2. Упрощение (схематизация) геометрии конструкции

Все конструкции в зависимости от соотношения габаритных размеров делят на три группы: 1) стержни; 2) оболочки; 3) массивные тела.

Стержень – объект, у которого один габаритный размер намного больше двух других.

Оболочка – объект, у которого один из габаритных размеров намного меньше двух других. Плоская оболочка называется пластиной.

Массивное тело – объект, у которого все три габаритных размера соизмеримы.

В приборостроении около 80 % конструктивных элементов являются стержнями. Стержень можно представить как тело, которое образуется при движении плоской фигуры в направлении, перпендикулярном плоскости фигуры. Центр тяжести плоской фигуры очерчивает линию, называемую осью стержня. Если ось стержня прямая линия, то это прямолинейный стержень, если ось

стержня кривая линия, то это криволинейный стержень. Сечение стержня, перпендикулярное его оси, называется поперечным, остальные сечения – наклонными. Если при движении вдоль оси поперечное сечение не изменяется, то это стержень постоянного сечения. Если поперечное сечение изменяется, то это стержень переменного сечения. Если поперечное сечение стержня вращается, то стержень называют естественно закрученным, например рабочую часть сверла. Стержень, воспринимающий изгибающую нагрузку, называют балкой. Стержень, передающий вращательное движение, – валом.

Призматическим стержнем с прямой осью называют тело, все поперечные сечения которого одинаковы, а центры тяжести этих сечений лежат на одной прямой, называемой осью стержня.

1.5.3. Упрощение (схематизация) опор

Геометрически неизменяемые конструкции имеют те или иные опорные устройства. В расчетных схемах разнообразие опор сводят к трем видам:

1) шарнирно-подвижная опора – по линии накладываемой связи возникает одна опорная реакция (рис. 1.10, *а*);

2) шарнирно-неподвижная опора – по линии накладываемых связей могут возникать две опорные реакции R_A, H_A (рис. 1.10, *б*);

3) защемление (жесткое защемление, заделка) – при изгибе стержня возникают три реакции: вертикальная R_A, горизонтальная H_A и опорный изгибающий момент M_A (рис. 1.10, *в*), при растяжении (сжатии) стержня возникает одна реакция вдоль продольной оси стержня H_A (рис. 1.10, *г*), при кручении стержня возникает одна реакция – опорный крутящий момент (рис. 1.10, *д*). Все реакции приложены в точке *A*.

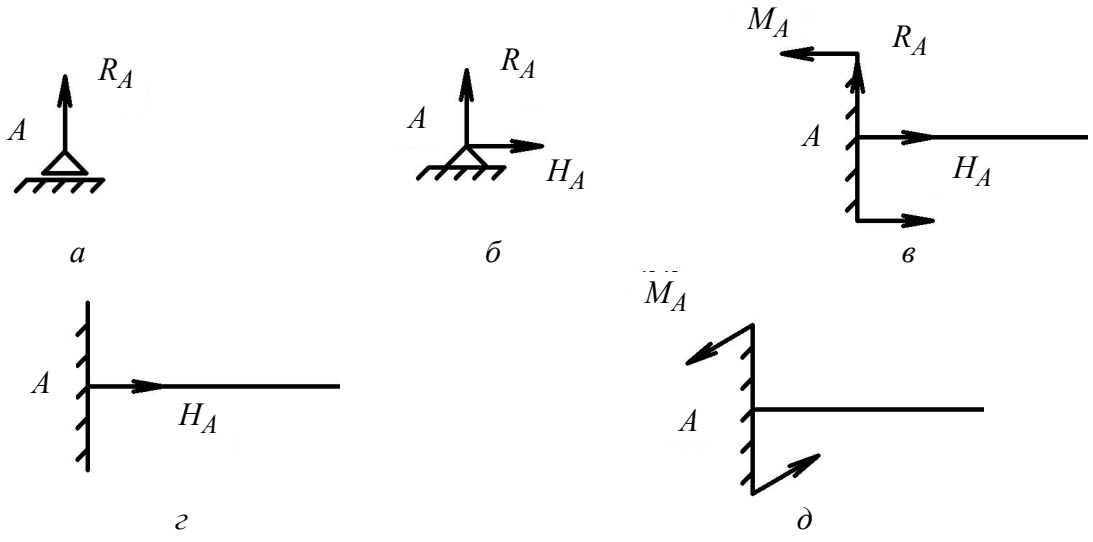


Рис. 1.10. Схематизация опор

Консолью называется стержень, который не имеет других опор кроме защемления, или часть стержня, выступающая за опоры (рис. 1.10). *Жесткий узел* – это конструктивный узел, в котором концы всех стержней соединены между собой жестко. *Рама* – это стержневая система, стержни которой во всех или некоторых узлах жестко соединены между собой. *Пространственная система* – это система, способная воспринимать приложенную к ней пространственную систему сил. *Плоская система* – это система, способная воспринимать нагрузки, которые действуют в одной плоскости.

Геометрически неизменяемыми называются конструкции, в которых при пренебрежении упругими деформациями стержней расстояния между любыми точками конструкций будут постоянными (форма конструкции неизменна). Примером такой конструкции является рама, состоящая из жестко соединенных стержней и неподвижного основания. *Геометрически изменяемыми* называются системы, которые допускают перемещение точек и изменение формы конструкции даже в том случае, если стержни будут жесткими. Пример: заменим неподвижное основание шарнирным (рис. 1.11). Анализ геометрически изменяемых конструкций, кроме расчета прочности и жесткости, связан с определением положения, скоростей и ускорений точек, перемещающихся в пространстве.



Рис. 1.11. Геометрически неизменяемые (*а*) и геометрически изменяемые (*б*) системы

На схеме стержень принято заменять осью, при этом все внешние силы должны быть приведены к оси стержня (рис. 1.12).

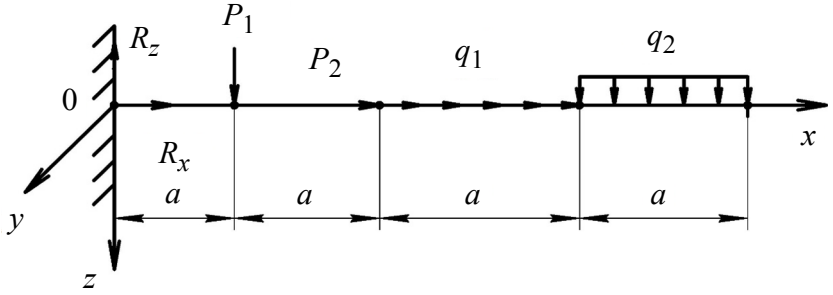


Рис. 1.12. Схематизация стержня

Оболочку на схеме заменяют срединной поверхностью, находящейся на одинаковом удалении от наружной и внутренней поверхности оболочки.

1.5.4. Упрощение (схематизация) внешней нагрузки

Все разнообразие внешних нагрузок в расчетных схемах сводят к четырем видам:

1) сосредоточенная сила, P (Н);

2) распределенная сила, q (Н/м);

3) сосредоточенный момент пары сил, M (Н·м);

4) распределенный момент, m (Н·м/м) (см. рис. 1.7, 1.9).

2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

2.1. Метод сечений

В процессе деформации тела изменяются расстояния между атомами кристаллической решетки, как следствие, нарушается установившийся энергетический баланс, выделяется энергия (тепловая, звуковая, световая) и возникают внутренние силы. Таким образом, внутренние силы – это следствие изменения сил взаимодействия между атомами твердого тела в процессе его деформации. Силы взаимодействия принадлежат к двум категориям – силам притяжения f_a или силам отталкивания f_r. К какой категории относятся силы взаимодействия зависит от взаимного расстояния r между соседними атомами. По мере сближения атомов силы взаимодействия возрастают, а при удалении – уменьшаются. На рис. 2.1 по оси абсцисс отложены расстояния r, а по оси ординат – значения сил взаимодействия. Пунктиром показаны графики для сил f_a и f_r, а сплошной линией – их равнодействующая f. Из графиков видно, что изменение r сильнее отражается на силе отталкивания f_r, чем на силе притяжения f_a. При некотором значении $r = r_0$ равнодействующая межатомных сил равна нулю; это и есть расстояние, при котором атомы удерживаются в положении равновесия при отсутствии внешних нагрузок.

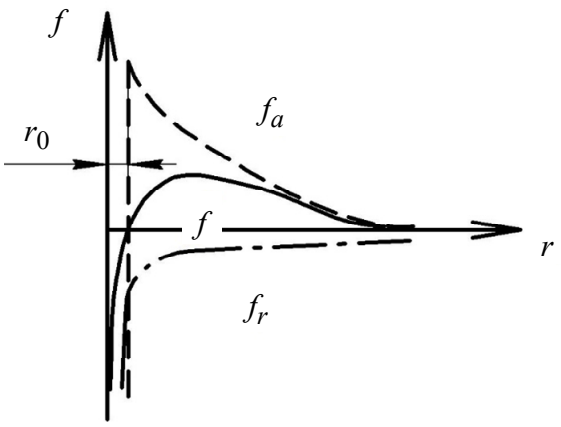


Рис. 2.1. Силы взаимодействия атомов

Для определения внутренних сил применяют метод сечений. Рассмотрим произвольное тело, нагруженное системой внешних сил (рис. 2.2.).

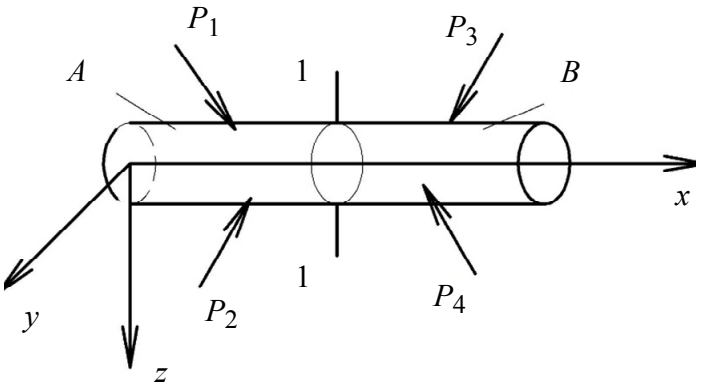


Рис. 2.2. Тело, нагруженное внешними силами

Мысленно рассечем тело некоторой плоскостью (1-1) на две части A и B. В точке рассечения стержня возникают силы взаимодействия двух частей тела. Эти силы взаимодействия и являются внутренними силами. Интенсивность внутренних сил в различных точках сечения может быть различной, она зависит от формы тела и характера приложенных внешних сил. После рассечения тела отбросим одну его часть (левую или правую), например правую часть. В результате система внешних сил изменится, однако вторая часть стержня должна оставаться в равновесии. Равновесие левой части стержня сохраняется потому, что в поперечном сечении в точке рассечения возникают внутренние силы: главный вектор внутренних сил $\boldsymbol{Q}$ и главный вектор моментов внутренних сил $\boldsymbol{L}$ (рис. 2.3).

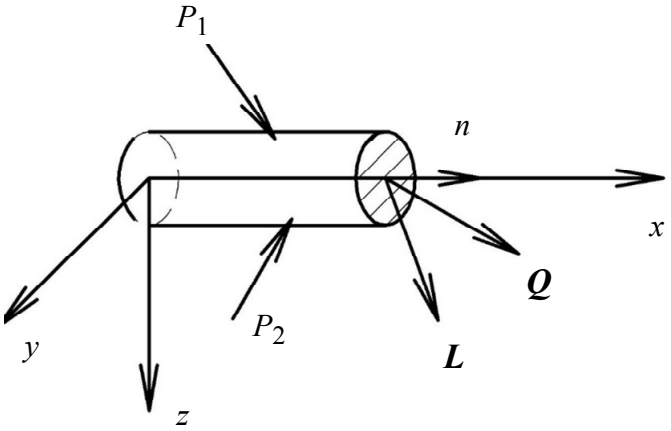


Рис. 2.3. Главный вектор внутренних сил
и главный вектор момента внутренних сил

Главные векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{L}$ проецируют на оси декартовой системы $0XYZ$. Проекция главного вектора $\boldsymbol{Q}$ на ось $\boldsymbol{Ox}$ обозначается $\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{N}$ и называется нормальной силой, проекции на оси $0y$ и $0z$ – перерезывающими силами $\boldsymbol{Q}_y$ и $\boldsymbol{Q}_z$ соответственно (рис. 2.4).

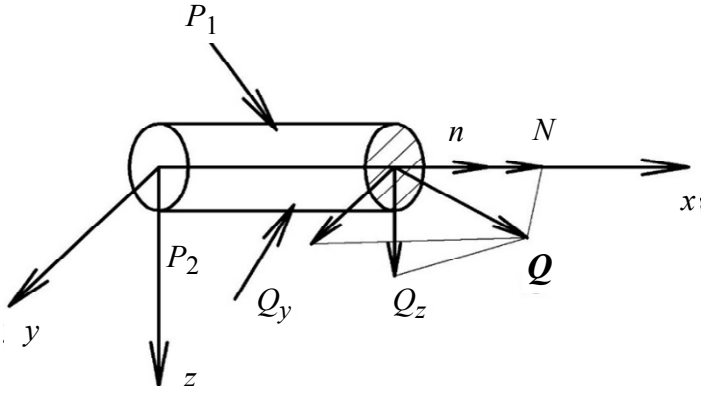


Рис. 2.4. Проекции главного вектора внутренних сил
на оси декартовой системы координат

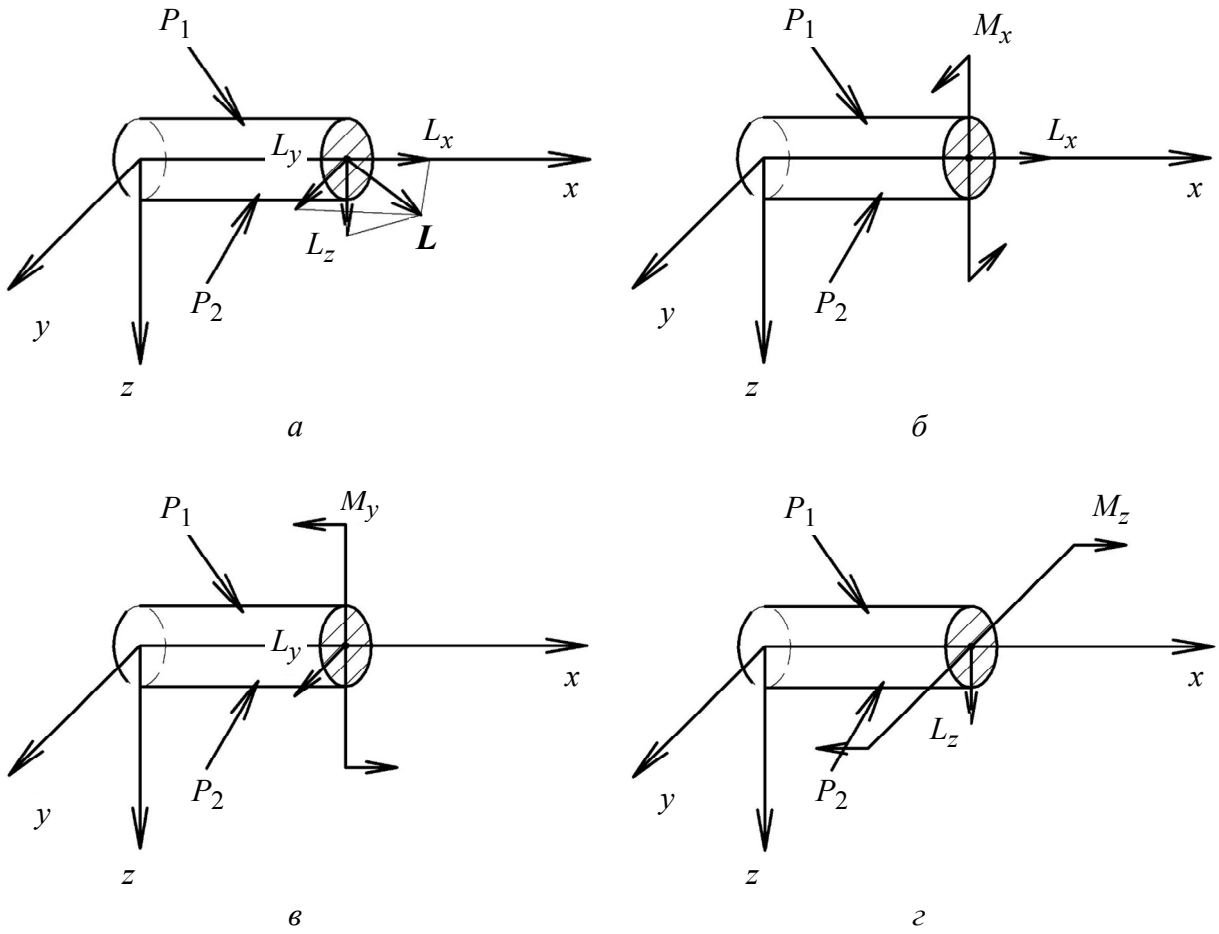


Рис. 2.5. Проекции главного вектора момента внутренних сил на оси декартовой системы координат

Проекция главного вектора моментов внутренних сил $\boldsymbol{L}$ на ось $0x$ обозначается $\boldsymbol{L}_x\left(M_x\right)$, называется крутящим моментом (рис. 2.5, *а*, *б*), проекции главного вектора $\boldsymbol{L}$ на оси $0y$ и $0z$ обозначаются соответственно $\boldsymbol{L}_y(M_y)$, $\boldsymbol{L}_z(M_z)$ и называются изгибающими моментами (рис. 2.5, *а*, *в*, *г*).

2.2. Правило знаков внутренних сил

Внутренние силы подчиняются *правилу знаков.* Силы N, Q_y, Q_z положительны, если внешняя нормаль к поперечному сечению стержня $\boldsymbol{n}$ совпадает с положительным направлением продольной оси $0x$, если совпадают с положительным направлением координатных осей, параллельно которым они направлены. Моменты $\boldsymbol{L}_x(M_x)$, $\boldsymbol{L}_y(M_y)$, $\boldsymbol{L}_z(M_z)$ положительны, если их направления также совпадают с положительным направлением координатных осей, следовательно, пары сил создают вращение против часовой стрелки при взгляде с конца вектора момента и положительного направления соответству-

ющей координатной оси. Силы N, Q_y, Q_z положительны, если внешняя нормаль к поперечному сечению стержня не совпадает с положительным направлением продольной оси $0x$, если их направления тоже не совпадают с положительным направлением координатных осей. В этом случае моменты $\boldsymbol{L}_x(M_x)$, $\boldsymbol{L}_y(M_y)$, $\boldsymbol{L}_z(M_z)$ положительны, если направлены в противоположную сторону от положительного направления координатных осей, следовательно, пары сил создают вращение против часовой стрелки, если смотреть с конца векторов моментов и по часовой стрелке при взгляде с положительного конца соответствующей координатной оси.

Таким образом, в общем случае в твердом теле возникает шесть компонентов внутренних сил (N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z).

Рассмотрим частные случаи: 1) действует только нормальная сила $N \neq 0$ – это деформация растяжения (сжатия); 2) действует только крутящий момент $M_x \neq 0$ – это деформация кручения; 3) действуют только изгибающие моменты $M_y \neq 0$ и (или) $M_z \neq 0$ – это деформация чистого изгиба; 4) действуют только перерезывающая сила $Q_z \neq 0$ и изгибающий момент $M_y \neq 0$ и (или) $Q_y \neq 0$ и $M_z \neq 0$ – это деформация плоского поперечного изгиба.

Основной количественной мерой внутренних сил являются напряжения. Различают напряжения нормальные (σ), касательные (τ) – эти напряжения действуют на поперечных площадках стержня, а также p – напряжение, действующее на наклонной площадке. Напряжение измеряется в паскалях, Па $\left(\text{Н}/\text{м}^2\right)$. Величина напряжений в каждой точке и является мерилом интенсивности внутренних сил, которые возникают в материале как результат деформации, вызванной внешними силами. Для количественной оценки прочности стержня методом сечений рассчитывают внутренние силы, строят эпюры внутренних сил, затем рассчитывают напряжения и строят их эпюры. А после этого оценивают прочность стержня.

Рекомендуется следующий порядок действий для построения эпюр внутренних сил:

1. Выбрать декартову систему координат $0xyz$ так, чтобы поворот от оси $0x$ к оси $0y$ был против часовой стрелки, если смотреть с конца оси $0z$.

2. Вычислить реакции опор или неизвестные параметры внешней нагрузки из условия статического равновесия (равенства нулю проекций всех сил на осях $0x$, $0y$, $0z$ и всех моментов относительно этих же осей).

3. Определить грузовые участки (интервалы непрерывности функции внутренних усилий). Признаком начала нового грузового участка является действие в соответствующей точке новой нагрузки или окончание старой (например, распределенной нагрузки q), а также изменение размера поперечного сечения стержня или его материала.

4. Используя метод сечений, для каждого грузового участка составить уравнения внутренних сил. При составлении уравнений следует воспользоваться условиями статического равновесия. В сечении вместо отброшенной части стержня следует показать положительные в соответствии с правилами знаков внутренние силы.

5. Построить эпюры внутренних сил. Эпюры строятся в соответствии со схемой нагрузки.

2.3. Рабочая модель строения деформируемого твердого тела

При анализе напряженно-деформированного состояния твердого тела его реальное дискретное строение заменяют сплошной средой, заполненной совокупностью материальных точек. Эту среду наделяют свойствами реального дискретного тела. Такая идеализация называется рабочей моделью строения деформируемого твердого тела. Рабочая модель строения деформируемого твердого тела обеспечивает выполнение условий непрерывности функций в окрестности рассматриваемых точек и, как следствие, позволяет использовать математический аппарат, основанный на дифференциальных уравнениях в частных производных.

Используя рабочую модель строения деформируемого тела, рассмотрим следующие базовые понятия: материальная частица, материальный элемент, материальная точка.

Материальной частицей называется часть твердого тела, в пределах которой деформация является однородной.

Материальным элементом называется часть материальной частицы, размеры которой стремятся к нулю.

Материальной точкой называется центр тяжести материального элемента.

Однородной называется деформация, отвечающая следующим требованиям:

1) прямые и плоские до деформации остаются прямыми и плоскостями после деформации;

2) параллельные прямые и плоскости до деформации остаются параллельными после деформации;

3) отрезки параллельных прямых изменяются в процессе деформации в одинаковых соотношениях.

3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

3.1. Напряжения на основных площадках

Для качественной и количественной оценки действия внутренних сил используется параметр напряжения. Напряжения по своей природе есть давление внутренних сил, напряжения определяются через отношение внутренней силы к площади грани материального элемента.

Поместим деформируемое твердое тела в декартову систему координат $0xyz$. Выделим в теле точку *O*. Построим из этой точки материальный элемент в форме прямоугольного тетраэдра, состоящего из трех взаимно перпендикулярных и одной наклонной площадок. Пусть ребра тетраэдра совпадают с осями декартовой системы координат $0xyz$ (рис. 3.1).

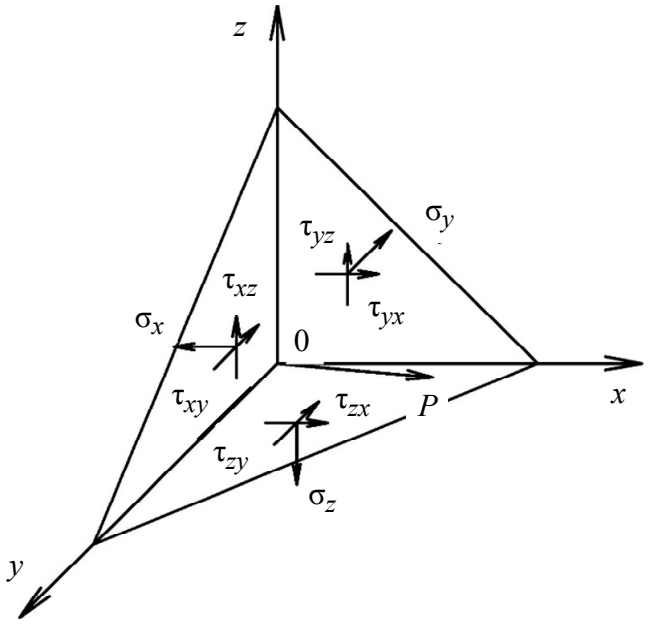


Рис. 3.1. Напряжения на основных площадках материального элемента

Три взаимно перпендикулярных площадки материального элемента, ребра которого совпадают с осями декартовой системы координат, называются основными. Спроецируем внутреннюю силу P на нормали к основным площадкам и на сами площадки. Проекция внутренней силы на нормаль обозначается σ и называется нормальным напряжением, проекция на площадку обозначается τ и называется касательным напряжением. На основных площадках рассматривают одну проекцию внутренней силы на нормаль и две проекции на площадку, параллельно осям декартовой системы координат $0xyz$. Таким образом, на каждой из основных площадок действуют три напряжения: одно

нормальное σ и два касательных τ. Напряжениям на основных площадках присваивают индексы. Нормальное напряжение имеет один индекс, совпадающий с названием координатной оси, параллельно которой оно действует. Касательное напряжение имеет два индекса: первый совпадает с индексом нормального напряжения на этой площадке, второй – с названием координатной оси, параллельно которой оно действует. Таким образом, в окрестности точки O на основных площадках действуют три нормальных напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и шесть касательных напряжений τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{yx}, τ_{zx}, τ_{zy}. Если рассмотреть проекцию внутренней силы P на наклонную площадку, не совпадающую с плоскостями декартовой системы координат $0xyz$, то на таких площадках рассматривают одно нормальное σ_n и одно касательное напряжение τ_{nt}, где индекс n указывает на направление нормали к наклонной площадке, а индекс t – на направление наклонной площадки. В окрестности точки O, как и любой другой точки твердого тела, существует бесчисленное множество наклонных площадок. Поскольку размеры материального элемента, а следовательно площади его граней, стремятся к нулю, то можно говорить, что напряжения действуют в точке O.

3.2. Правило знаков напряжений. Тензор напряжений

Нормальные и касательные напряжения положительные при выполнении двух условий: 1) направление внешней нормали к сечению совпадает с положительным направлением координатной оси, направление напряжения тоже совпадает с положительным направлением координатной оси; 2) направление внешней нормали к сечению не совпадает с положительным направлением координатной оси, направление напряжения тоже не совпадает с положительным направлением координатной оси. Если эти условия не выполняются, то напряжения отрицательные.

Напряженное состояние в любой точке твердого тела характеризуется девятью составляющими напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{yx}, τ_{zx}, τ_{zy}. Напряжения на основных площадках, записанные в форме симметричной матрицы, образуют тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Говорят, что тензор напряжений полностью определяет напряженное состояние в рассматриваемой точке твердого тела. Эта формулировка означает, что если известны напряжения, действующие на основных площадках, то можно определить напряжения, действующие на любой наклонной площадке в окрестности рассматриваемой точки твердого тела.

Рассмотрим произвольное сечение *a-a* некоторого тела. В окрестности точки *C* этого сечения выделим элементарную площадку ΔF, обозначим *n* – нормаль к сечению (рис. 3.2).

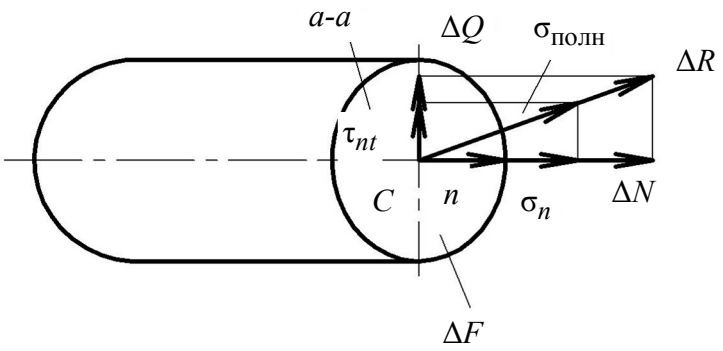


Рис. 3.2. Полное напряжение и его разложение на составляющие

Пусть ΔR – равнодействующая внутренних сил на площадке, тогда полное напряжение $\sigma_{\text{полн}}$ в окрестности точки *C* определяется равенством:

$$\sigma_{\text{полн}} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}.$$

Равнодействующую внутренних сил ΔR и полное напряжение $\sigma_{\text{полн}}$ можно разложить на составляющие. Равнодействующую внутренних сил проецируем на направление нормали к сечению и на само сечение, образуя составляющие ΔN и ΔQ. Соответственно, получается нормальное σ_n и касательное τ_{nt}, которые вычисляют по формулам:

$$\sigma_n = \lim \frac{\Delta N}{\Delta F};$$

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F}.$$

В общем случае полное напряжение $\sigma_{\text{полн}}$ не совпадает с направлением нормали. Тогда можно записать

$$\left|\sigma_{\text{полн}}\right|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2.$$

Если известны проекции полного напряжения на координатные оси x, y, z – σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}, то полное напряжение может быть выражено следующим образом:

$$\left|\sigma_{\text{полн}}\right|^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 .$$

Если нормаль к площадке составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ, то нормальную составляющую напряжений σ_n можно вычислить через проекции полного напряжения на координатные оси x, y, z:

$$\sigma_n = \sigma_{nx}\cos\alpha + \sigma_{ny}\cos\beta + \sigma_{nz}\cos\gamma.$$

При повороте площадки напряжение изменяется. Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на основных площадках, проведенных через эту точку.

3.3. Напряжения на наклонной площадке

Ранее было сказано, что если известны напряжения на основных площадках материального элемента, то можно определить напряжения на любой наклонной площадке в окрестности заданной точки (рис. 3.3). Докажем это математически. Поместим деформируемое твердое тело в прямоугольную систему координат 0*xyz*. Выделим в теле точку *O* и материальный элемент в форме прямоугольного тетраэдра так, чтобы направления ребер тетраэдра совпадали с направлением координатных осей. Предположим, что известны напряжения на основных площадках материального элемента. Требуется определить напряжения на наклонной площадке.

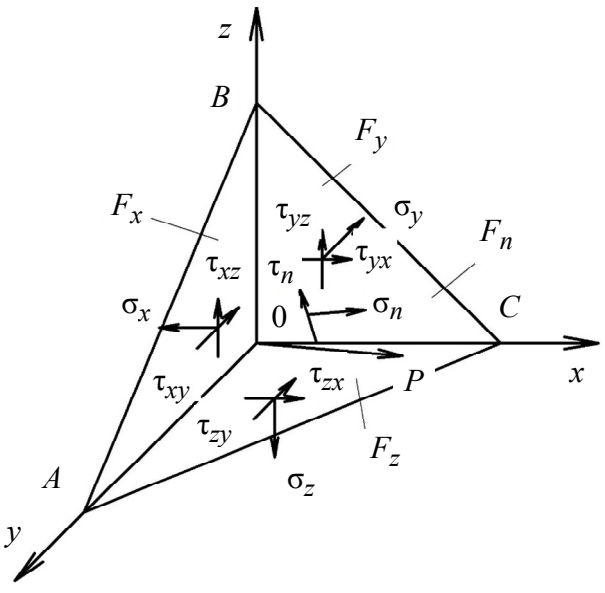


Рис. 3.3. Напряжения на наклонной площадке

Обозначим площади граней тетраэдра: пл.$\Delta OAB - F_x$, пл.$\Delta OBC - F_y$, пл.$\Delta OAC - F_z$, пл.$\Delta ABC - F_n$.

Путь известны углы наклона площадки в пространстве. Обозначим углы между нормалью к наклонной площадке n и осями координат $\alpha_x - \angle nOX$, $\alpha_y - \angle nOY$, $\alpha_z - \angle nOZ$; P_n – это внутренняя сила, действующая в точке O; P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} – проекции этой силы на оси декартовой системы координат; σ_n, τ_n – нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке. Рассмотрим уравнение статического равновесия тетраэдра. Проецируя все силы на оси x, y, z, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P_{nx}F_n = \sigma_x F_x + \tau_{xy}F_y + \tau_{xz}F_z; \\ P_{ny}F_n = \tau_{yx}F_x + \sigma_y F_y + \tau_{yz}F_z; \\ P_{nz}F_n = \tau_{zx}F_x + \tau_{zy}F_y + \sigma_z F_z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \dfrac{F_x}{F_n} + \tau_{xy}\dfrac{F_y}{F_n} + \tau_{xz}\dfrac{F_z}{F_n}; \\ P_{ny} = \tau_{yx}\dfrac{F_x}{F_n} + \sigma_y \dfrac{F_y}{F_n} + \tau_{yz}\dfrac{F_z}{F_n}; \\ P_{nz} = \tau_{zx}\dfrac{F_x}{F_n} + \tau_{zy}\dfrac{F_y}{F_n} + \sigma_z \dfrac{F_z}{F_n}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{xz}\cos\gamma; \\ P_{ny} = \tau_{yx}\cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma;. \\ P_{nz} = \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Система уравнений (3.1) называется уравнением равновесия элементарного тетраэдра (уравнения Коши). Далее можно вычислить полное, нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке:

$$P_n = \sqrt{P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2};$$

$$\sigma_n = P_{nx}\cos\alpha + P_{ny}\cos\beta + P_{nz}\cos\gamma;$$

$$\tau_n = \sqrt{P_n^2 - \sigma_n^2}.$$

Таким образом, с помощью уравнений Коши можно вычислить напряжения на любой наклонной площадке, проведенной через точку, если известны компоненты тензора напряжений в этой точке и углы наклона площадки в пространстве.

При решении задач для определения нормальных и касательных напряжений на произвольно ориентированной площадке стержня используют следующие уравнения:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zx}\sin 2\alpha;$$

$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha,$$

где α – угол между нормалью к наклонной площадке и осью x.

Эти уравнения справедливы, если ось стержня совпадает с координатной осью $0x$ и нормаль к наклонной площадке перпендикулярна координатной оси $0y$.

3.4. Напряжения в близлежащих точках твердого тела

Поместим деформируемое твердое тело в прямоугольную систему координат $0xyz$. Выделим в теле точку A и площадку, перпендикулярную оси $0x$. На этой площадке будут действовать напряжения σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}. Рядом с точкой A на расстоянии, близком к нулю, выберем точку B и площадку, перпендикулярную оси $0x$ (рис. 3.4).

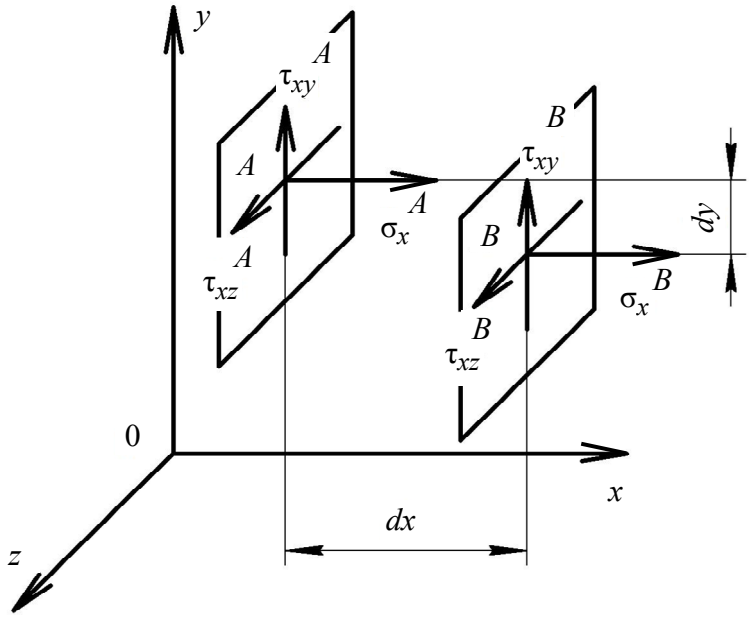


Рис. 3.4. Напряжения в близлежащих точках твердого тела

Пусть известны напряжения в точке A. Требуется вычислить напряжения в точке B. Задача решается при двух допущениях:

1) $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ – это непрерывные функции в окрестности точки A;

2) функции $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ раскладываются в ряд Тейлора.

Тогда напряжения в точке B можно вычислить путем разложения функций напряжений в ряд Тейлора:

$$\sigma_x^B = \sigma_x^A + \frac{\partial \sigma_x^A}{\partial x}dx + \frac{\partial \sigma_x^A}{\partial y}dy + \frac{\partial \sigma_x^A}{\partial z}dz;$$

$$\tau_{xy}^B = \tau_{xy}^A + \frac{\partial \tau_{xy}^A}{\partial x}dx + \frac{\partial \tau_{xy}^A}{\partial y}dy + \frac{\partial \tau_{xy}^A}{\partial z}dz;$$

$$\tau_{xz}^B = \tau_{xz}^A + \frac{\partial \tau_{xz}^A}{\partial x}dx + \frac{\partial \tau_{xz}^A}{\partial y}dy + \frac{\partial \tau_{xz}^A}{\partial z}dz.$$

При разложении функций в ряд Тейлора слагаемыми второго порядка малости и выше пренебрегаем.

3.5. Дифференциальные уравнения равновесия

Поместим деформируемое твердое тело в декартову систему координат 0xyz. Выделим в теле точку A и материальный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда таким образом, чтобы ребра материального элемента совпадали с осями координат x, y, z. Пусть известны напряжения на основных площадках материального элемента. Зная напряжения на основных площадках, выразим напряжения на параллельных площадках материального элемента (рис. 3.5).

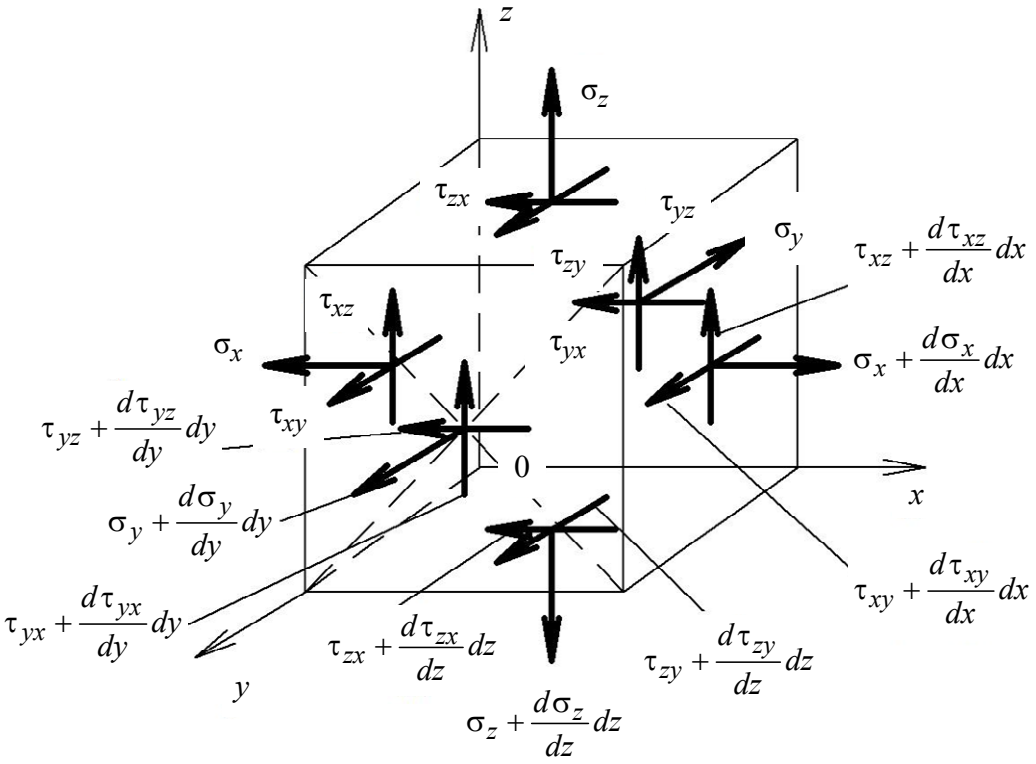


Рис. 3.5. Статическое равновесие материального элемента

Рассмотрим условие статического равновесия выделенного материального элемента. Получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где g_x, g_y, g_z – это объемная сила, действующая на гранях материального элемента.

Система уравнений (3.2) содержит дифференциальные уравнения равновесия, или уравнения Навье. Если пренебречь объемными силами, то уравнение Навье приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Если выразить уравнения равновесия материального элемента через равенство нулю суммы моментов сил, действующих на гранях параллелепипеда, например $\sum M_i^z = 0$, то, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, получим:

$$\begin{cases} \left|\tau_{xy}\right| = \left|\tau_{yx}\right|; \\ \left|\tau_{yz}\right| = \left|\tau_{zy}\right|; \\ \left|\tau_{xz}\right| = \left|\tau_{zx}\right|. \end{cases}$$

Система уравнений выражает свойство парности касательных напряжений, которое можно сформулировать так: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательного напряжения, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собой по модулю.

4. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

В общем случае внутренняя сила расположена к площадке под углом, не равным 90°. Проекция этой силы на нормаль к площадке образует нормальное напряжение, а проекция на площадку – касательное. В частном случае внутренняя сила может быть расположена к площадке под углом α = 90°. В этом случае проекция внутренней силы на площадку равна нулю, следовательно, равны нулю касательные напряжения, а действуют только нормальные напряжения. Такие площадки называются главными.

Нормали к главным площадкам называют главными осями напряжений. Нормальные напряжения на главных площадках называют главными нормальными напряжениями, или главными напряжениями. Покажем математически, что такие площадки существуют. Для этого воспользуемся уравнением для наклонной площадки:

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{xz} \cos\gamma; \\ P_{ny} = \tau_{yx} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma; \\ P_{nz} = \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Пусть внутренняя сила P_n направлена под углом 90° к наклонной площадке, тогда $\tau_n = 0, P_n = \sigma_n$. Можно записать, что $P_{nx} = \sigma_n \cos\alpha; P_{ny} = \sigma_n \cos\beta;$ $P_{nz} = \sigma_n \cos\gamma$.

Подставляя эти уравнения в систему уравнений (4.1) получим:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n)\cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{xz} \cos\gamma = 0; \\ \tau_{yx} \cos\alpha + (\sigma_y - \sigma_n)\cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma = 0; \\ \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \cos\beta + (\sigma_z - \sigma_n)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

В результате получена система линейных однородных уравнений относительно направляющих косинусов углов. Если косинусы углов α, β, γ одновременно не равны нулю, то должен быть равен нулю определитель, составленный из коэффициентов косинусов углов. Косинусы углов одновременно не могут быть равны нулю, так как выполняется зависимость:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Тогда должен быть равен нулю следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрытие определителя приводит к образованию кубического уравнения следующего вида:

$$\sigma_n^3 - \theta_1 \sigma_n^2 + \theta_2 \sigma_n - \theta_3 = 0, \qquad (4.2)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – коэффициенты, представляющие собой математические выражения, составленные из коэффициентов определителя. Коэффициенты $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ называют первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений. Инварианты независимы от выбора системы координат:

$$\theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$\theta_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$\theta_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

Кубическое уравнение (4.2) имеет три вещественных корня σ. Таким образом, математически доказано существование главных площадок, на которых действуют только нормальные напряжения. Главным напряжениям присваивают числовые индексы σ_1, σ_2, σ_3, они действуют на трех взаимно перпендикулярных площадках. Индекс 1 присваивают наибольшему главному напряжению, а индекс 2 – наименьшему. Соотношения между главными напряжениями подчиняются неравенству: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Главное напряжение σ_1 принимает наибольшее значение из всех нормальных напряжений, действующих на площадках в окрестности рассматриваемой точки твердого тела, а главное напряжение σ_3 – соответственно наименьшее значение.

4.1. Виды напряженного состояния в окрестности точки

В окрестности точки деформированного тела различают следующие виды напряженного состояния:

1) линейное, если только одно из главных напряжений не равно нулю, например: $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

2) плоское, когда два главных напряжения не равны нулю, например: $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 \neq 0$;

3) объемное, когда все три главных напряжения отличны от нуля: $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 \neq 0$.

4.2. Определение главных напряжений и положения главных площадок

Для определения главных напряжений в стержневой конструкции используют уравнение

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2} \right].$$

Если координатная ось x совпадает с осью стержня, а координатная ось z направлена вертикально, то две нормали, характеризующие положение первой и третьей главных площадок, лежат в плоскости, параллельной $x0z$. Для определения положения главных площадок используется формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z}.$$

Два первых значения α, различающиеся на 90°, вычисленные по этой формуле, определяют положение главных площадок. Если в некоторой точке тела известны главные напряжения, то нормальные и касательные напряжения на произвольно ориентированной площадке, проведенной через эту точку, можно выразить через главные напряжения:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\cos 2\alpha;$$

$$\tau_{nh} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha,$$

где h – это направление действия касательного напряжения τ.

Касательное напряжение будет максимальным при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. на площадках, составляющих угол 45° с главными площадками. При этом

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}.$$

5. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

5.1. Функции перемещений точек. Начальные и текущие координаты

В процессе деформации тела его точки перемещаются в пространстве, при этом изменяется расстояние между точками. Начальными называют координаты точек до деформации, их обозначают прописными буквами (X, Y, Z). Текущими называют координаты точек тела в процессе и после деформации, их обозначают строчными буквами (x, y, z). Векторную функцию перемещений точек твердого тела обозначают $\boldsymbol{U}(x, y, z)$. Функции проекций перемещений точек твердого тела на оси x, y, z обозначают u_x, u_y, u_z или u, v, w соответственно. Эти функции зависят от текущих координат точек:

$$\begin{cases} u_x = f_1(x, y, z); \\ u_y = f_2(x, y, z); \\ u_z = f_3\left(x, y, z\right)). \end{cases}$$

При определении функций перемещений решают уравнения. Например:

$$u_x = -3x^2 + 0,5y + 1,5z;$$

$$u_y = x - 0,7y^2 - 2z^3;$$

$$u_z = -2,4x + y + z^2.$$

5.2. Понятие о малой и конечной деформациях

Рассмотрим стержень длиной l_0, м (рис. 5.1). После приложения к стержню продольной внешней силы его длина изменилась и равна l, м.

Абсолютная деформация стержня Δl, м определяется равенством $\Delta l = l - l_0$. Относительную линейную деформацию стержня можно вычислить по двум формулам:

$$\begin{cases} \varepsilon^{(1)} = \dfrac{\Delta l}{l_0}; \\ \varepsilon^{(2)} = \dfrac{\Delta l}{l}. \end{cases}$$

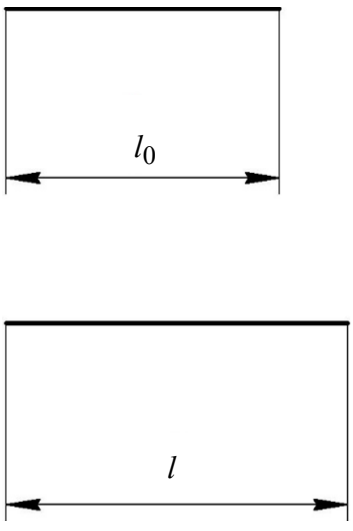


Рис. 5.1. Размеры стержня до и после деформации

Деформация называется малой, если разница между результатами вычислений по формулам не превышает погрешности δ, т. е. должно выполняться условие:

$$\left|\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}\right| \le \delta.$$

Погрешность вычислений назначается индивидуально, исходя из условий решения задач, например: $\delta = 0,1; 0,01; 0,001$. Если приведенное выше условие не выполняется, то деформация называется конечной. Конечную деформацию чаще вычисляют по формуле

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}.$$

5.3. Относительное удлинение и относительный сдвиг. Составляющие деформации

Выделим в деформируемом теле точку *A* и построим из нее материальный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.2). В процессе деформации материальный элемент исказится, у него изменятся длины ребер и углы между ребрами (гранями).

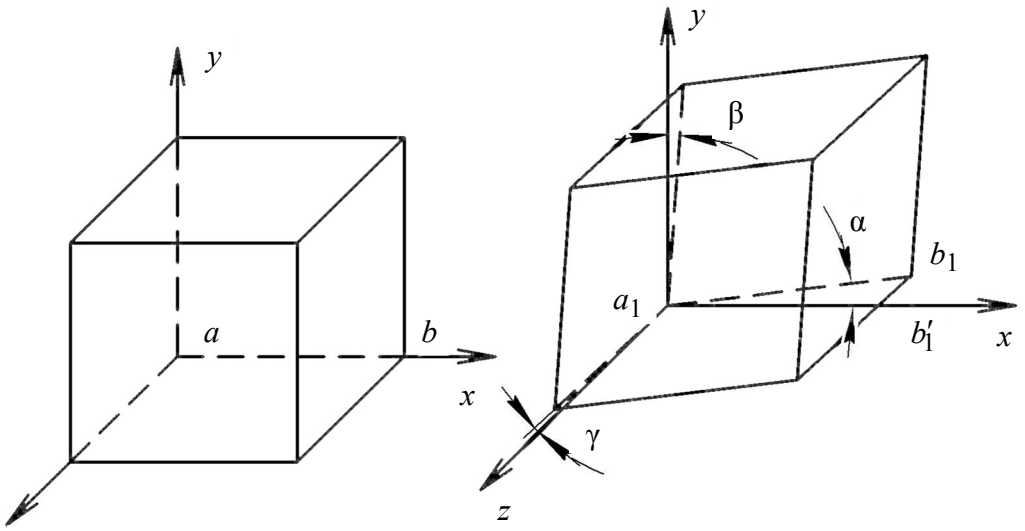


Рис. 5.2. Материальный элемент до и после деформации

Для количественной оценки деформации материального элемента используют параметры линейной ε и угловой (сдвиговой) деформации γ.

Линейная деформация характеризует изменение длин ребер, а сдвиговая деформация – изменение углов между гранями материального элемента. Например: $\varepsilon_x = \dfrac{|ab| - |a_1 b_1'|}{|ab|}$, $\gamma_{xy} \approx \alpha + \beta$.

Деформация материального элемента в форме прямоугольного параллелепипеда количественно оценивается тремя компонентам линейной деформации ε_x, ε_y, ε_z и шестью компонентами угловой (сдвиговой) деформации γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, γ_{yx}, γ_{zx}, γ_{zy}. Компоненты деформации материального элемента,

представленные симметричной матрицей, образуют тензор деформации, который полностью определяет деформированное состояние тела в окрестности заданной точки:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

5.4. Правило знаков компонентов деформации

Компоненты линейной деформации $\varepsilon > 0$, если происходит удлинение ребра, и $\varepsilon < 0$, если происходит его укорочение.

Компоненты угловой деформации $\gamma > 0$, если происходит уменьшение угла между исходно перпендикулярными гранями материального элемента, т. е. угол между гранями становится острым, и $\gamma < 0$, если происходит увеличение угла между исходно перпендикулярными гранями, т. е. угол между гранями становится тупым.

5.5. Связь между компонентами деформаций и перемещений

Связь между компонентами тензора деформаций и перемещениями точек $u_x = u;\ u_y = v;\ u_z = w$ выражается уравнениями Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}. \end{cases}$$

5.6. Условия сплошности материала

Деформации можно определять по известным перемещениям, используя уравнения Коши. Гораздо сложнее рассчитать перемещения по известным деформациям, так как при этом надо интегрировать уравнения в частных производных. Для решения этих уравнений необходимо установить связи между шестью составляющими деформаций, т. е. найти условия, позволяющие интегрировать уравнения Коши. Составляющие деформаций должны зависеть друг от друга, так как они являются производными трех произвольных функций. Функции u_x, u_y, u_z – непрерывные, а значит, и функции $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ тоже должны быть непрерывными. Совокупность функций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ описывает полную картину деформированного состояния тела в окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, условия сплошности материала можно рассматривать как условия совместности деформаций.

Условия интегрируемости уравнений Коши представляют собой шесть уравнений, связывающие линейные и угловые деформации:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}; \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Доказано, что линейные и угловые деформации должны быть связаны таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений. Физический смысл этих уравнений состоит в следующем: тело как до деформации, так и после деформации остается сплошным, неразрывным. Поэтому эти уравнения называют уравнениями сплошности (неразрывности), или уравнениями совместности деформаций Сен-Венана.

5.7. Определение относительных удлинений и сдвигов

Задача заключается в определении линейной и угловой деформации в произвольном направлении по заданным составляющим тензора деформации. Для определения линейной деформации отрезка dr_1 используется уравнение

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \\ + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

где α, β, γ – углы между отрезком dr_1 и осями x, y, z соответственно.

Для определения значения угловой деформации между произвольными отрезками dr_1 и dr_2 используется уравнение:

$$\gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_x \cos\alpha\cos\alpha_1 + 2\varepsilon_y \cos\beta\cos\beta_1 + 2\varepsilon_z \cos\gamma\cos\gamma_1 + \\ + \gamma_{xy}(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) + \gamma_{yz}(\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) + \\ + \gamma_{zx}(\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1);$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между отрезком dr_2 и осями x, y, z соответственно.

5.8. Главные деформации и главные оси деформаций

Ранее было показано, что для изотропной среды в каждой точке существует три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения имеют максимальные значения. Применительно к тензору деформации можно утверждать, что в каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярных направления, углы между которыми при деформации не изменяются, т. е. сдвиги равны нулю: $\gamma_{xy} = 0,\ \gamma_{yz} = 0,\ \gamma_{zx} = 0$. Эти направления называют главными осями деформаций. Линейные деформации по главным осям носят название главных. Главные деформации обозначаются индексами 1, 2, 3. Индекс 1 присваивается наибольшему главному компоненту линейной деформации, а индекс 3 – наименьшему. Главные компоненты деформации подчиняются неравенству $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

5.9. Закон Гука при осевом растяжении (сжатии)

Допустим, что деформируемое тело однородно и изотропно. Тогда в силу однородности связи между напряжениями и деформациями во всех точках тела будут одинаковыми, а в силу изотропности при любом нагружении главные оси деформации совпадут с главными осями напряжений, а главные напряжения зависят только от главных деформаций. Поэтому можно записать:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \\ \varepsilon_2 = f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \\ \varepsilon_3 = f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \end{cases}$$

Линейная зависимость между деформациями и напряжениями, не превышающими определенного для каждого материала предела (предела пропорциональности), носит название закона Гука. Если деформации малы и справедлив закон Гука, то вступает в силу принцип независимости действия сил *(принцип суперпозиции)*, который можно сформулировать так: внутренние силы и деформации, возникающие в структуре под действием нескольких нагрузок, равны сумме усилий и деформаций, которые возникали бы при действии каждой из этих нагрузок по отдельности.

Отсюда вытекают два следствия:

1) если силы, действующие на тело, увеличить в некоторое число раз, то напряжения и деформации увеличатся в то же число раз;

2) напряжения и деформации в теле, находящемся под действием суммы сил, равны сумме напряжений и деформаций, возникающих под действием каждой из этих сил в отдельности.

Рассмотрим стержень, нагруженный внешними силами вдоль оси (рис. 5.3).

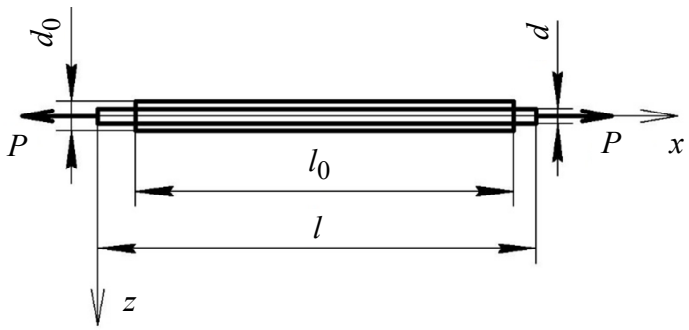


Рис. 5.3. Изменение размеров стержня в процессе растяжения

В этом случае относительная линейная деформация определяется выражениями: $\varepsilon_x = \dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\varepsilon_z = \dfrac{d - d_0}{d_0} = \dfrac{\Delta d}{d_0}$. Вдоль оси x под действием внешней силы P стержень удлиняется, вдоль оси z – укорачивается. Отношение абсолютного значения относительного сжатия к относительному удлинению называется коэффициентом Пуассона (ν). Для всех материалов коэффициент Пуассона изменяется в диапазоне от 0 до 0,5:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|.$$

Если рассматривать сечение в стержне, где возникают только главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то в случае линейного напряженного состояния закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Коэффициент пропорциональности E характеризует сопротивление материала линейной упругой деформации, его называют модулем нормальной упругости, а также модулем нормальной упругости первого рода, или модулем Юнга. Модуль нормальной упругости E и коэффициент Пуассона ν определяют экспериментально. Единица измерения E – паскаль (Па). В случае объемного напряженного состояния обобщенно закон Гука имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]; \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]; \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]. \end{cases}$$

5.10. Связь между составляющими деформаций и напряжений в окрестности точки тела

В результате преобразования выражений закона Гука при переходе от главных деформаций и главных напряжений к деформациям и напряжениям вдоль координатных осей получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]; \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]; \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}; \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}; \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G}. \end{cases}$$

Эти уравнения применяются при определении составляющих деформаций по известным значениям составляющих напряжений в окрестности точки деформируемого твердого тела.

Коэффициент пропорциональности касательного напряжения и относительного сдвига обозначается G, называется модулем нормальной упругости второго рода, или модулем сдвига, характеризует сопротивление материала деформации сдвига, измеряется в паскалях (Па), определяется экспериментально.

Связь между модулем нормальной упругости и модулем сдвига определяется выражением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

6. НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ, НАГРУЖЕННОМ ПО ТОРЦАМ

6.1. Условия статической эквивалентности

Когда определяют расчетные формулы для напряжений, действующих в прямоосном стержне при различных видах деформации, существенную роль играют интегральные соотношения между внутренними силами и напряжениями.

Рассмотрим часть стержня, находящуюся в равновесии. Из основных определений теории напряжений следует, что выражение вида $\sigma_x dF$ представляет собой бесконечно малую нормальную силу, приходящуюся на площадку dF, выделенную в окрестности произвольной точки поперечного сечения стержня. Если такие элементарные силы просуммировать по всей площади сечения, результирующая окажется нормальной силой *N*. Таким же образом элементарные силы $\tau_{xy} dF$ и $\tau_{xz} dF$ связаны с внутренними силами Q_y и Q_z. Так как суммирование элементарных сил по площади F эквивалентно интегрированию, то получены уравнения, которые называют условиями статической эквивалентности:

$$\iint_F \sigma_x dF = N;$$

$$\iint_F (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dF = M_x;$$

$$\iint_F \tau_{xy} dF = Q_y;$$

$$\iint_F \sigma_x z dF = M_y;$$

$$\iint_F \tau_{xz} dF = Q_z;$$

$$\iint_F \sigma_x y dF = -M_z.$$

6.2. Элементарное решение дифференциальных уравнений твердого деформируемого тела

Одна из задач прикладной механики заключается в исследовании напряженного состояния деформируемого твердого тела. Для решения этой задачи необходимо вычислить шесть компонент тензора напряжения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Для определения параметров напряженного состояния можно воспользоваться дифференциальными уравнениями равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{cases}$$

Однако этих уравнений недостаточно, так как уравнений три, а неизвестных функций шесть. Когда $g_x = g_y = g_z$, система становится системой однородных уравнений.

Для раскрытия статической неопределимости к решению привлекают уравнения, выражающие условия сплошности, из теории деформаций:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}; \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}; \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Условия сплошности будут выполнены, если напряжения представить в виде полиномов первой степени следующего вида:

$$\sigma_x = a_{10} + a_{11} y + a_{12} z;$$
$$\sigma_y = a_{20} + a_{21} z + a_{22} x;$$
$$\sigma_z = a_{30} + a_{31} x + a_{32} y;$$
$$\tau_{xy} = a_{40} + a_{41} z;$$
$$\tau_{yz} = a_{50} + a_{51} x;$$
$$\tau_{zx} = a_{60} + a_{61} y.$$

Составляющие деформаций, по закону Гука линейно связанные с напряжениями, также являются линейными функциями координат x, y, z. Приведенные выше уравнения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и условиям сплошности, называются элементарными решениями основных дифференциальных уравнений равновесия деформируемого твердого тела. Коэффициенты, входящие в эти уравнения, являются постоянными интегрирования, которые следует определять в каждом частном случае в зависимости от условий нагружения и геометрии рассматриваемого тела.

6.3. Геометрические характеристики сечений

Геометрическими характеристиками сечений являются:

1) площадь поперечного сечения;
2) статические моменты;
3) моменты инерции;
4) моменты сопротивления;
5) радиусы инерции.

6.3.1. Площадь поперечного сечения

Площадь поперечного сечения сложной формы равна сумме площадей простых фигур, из которых она состоит:

$$F = \int_F dF \,.$$

Наиболее распространенными простыми фигурами являются прямоугольник, круг и треугольник.

Формула для вычисления площади прямоугольника (рис. 6.1): $F = bh$.

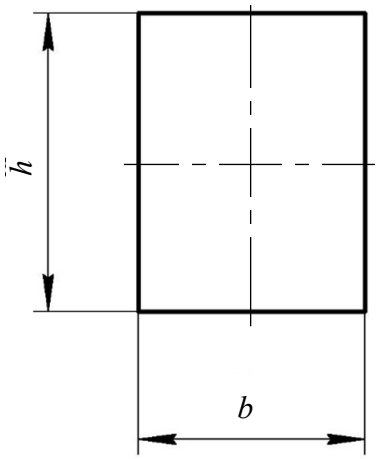


Рис. 6.1. Расчетная схема прямоугольника

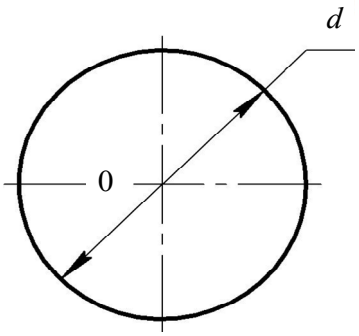


Рис. 6.2. Расчетная схема круга

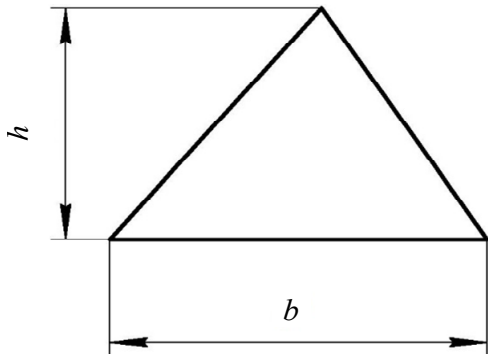


Рис. 6.3. Расчетная схема треугольника

Формула для вычисления площади круга (рис. 6.2): $F = \frac{\pi d^2}{4}$.

Формула для вычисления площади треугольника (рис. 6.3): $F = \frac{1}{2}bh$.

Единица измерения площади в системе СИ – м^2.

6.3.2. Статические моменты

Статический момент площади относительно оси $0x$ (S_x) равен произведению элементарных площадей *dF*, составляющих фигуру, на их расстояние до оси $0x$: $S_x = \int\limits_F ydF$. Аналогично статический момент относительно оси $0y$ (S_y) равен сумме произведений элементарных площадей**,** составляющих фигуру на их расстояние до оси $0y$: $S_y = \int\limits_F xdF$ (рис. 6.4).

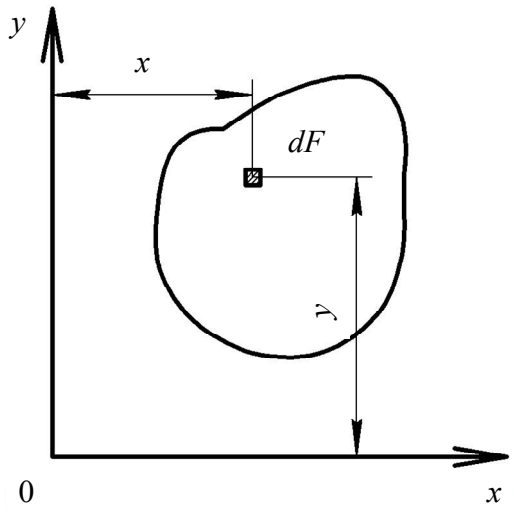


Рис. 6.4. Расчетная схема статического момента

Зная статические моменты фигуры относительно произвольной системы координат, можно вычислить координаты центра тяжести этой фигуры (x_c, y_c) $x_c = \frac{S_y}{F}$; $y_c = \frac{S_x}{F}$.

Единица измерения статического момента в системе СИ – м^3.

6.3.3. Алгоритм определения координат центра тяжести фигуры сложной формы

Алгоритм следующий:

1) поместить фигуру в прямоугольную систему координат $0xy$. Начало координат, как правило, совмещают с левой нижней точкой фигуры;

2) фигуру сложной формы разбивают на фигуры простой формы: прямоугольники, треугольники, окружности;

3) вычисляют площади простых фигур A_i;

4) вычисляют общую площадь фигуры сложной формы $A = \sum A_i$. Если в фигуре сложной формы есть вырез, его надо вычитать;

5) определяют положения центров тяжести простых фигур: у прямоугольников – на пересечении диагоналей; у треугольников – на пересечении медиан

или среднеарифметическое координат углов треугольника; у прямоугольных треугольников – также на пересечении линий, проведенных из точек, расположенных на расстояниях 1/3 длин катетов от общей вершины параллельно сторонам (катетам) треугольника;

6) вычисляют расстояния от центров тяжести простых фигур до координатной оси $0y$: x_1, x_2, x_i, x_n;

7) вычисляют расстояния от центров тяжести простых фигур до координатной оси $0x$: y_1, y_2, y_i, y_n;

8) вычисляют координаты центра тяжести фигуры сложной формы по формулам:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_i x_i + A_n x_n}{\sum A_i};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_i y_i + A_n y_n}{\sum A_i}.$$

В числителе формул расположены статические моменты.

Если необходимо определить центр тяжести изделия, состоящего из конструктивных элементов, изготовленных из разных материалов, то в формулах для определения центра тяжести необходимо вместо площадей использовать массы конструктивных элементов (m):

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_i x_i + m_n x_n}{\sum m_i};$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_i y_i + m_n y_n}{\sum m_i}.$$

6.3.4. Моменты инерции

Осевые, или экваториальные моменты инерции площади фигуры равны интегралам произведения элементарных площадей на квадрат их расстояния от осей x и y:

$$J_x = \int_F y^2 dF;$$

$$J_y = \int_F x^2 dF.$$

Центробежный момент инерции равен интегралу произведения элементарных площадок на их расстояние до координатных осей x и y:

$$J_{xy} = \int_F xydF \, .$$

Полярный момент инерции равен интегралу произведения элементарных площадок на квадрат расстояния от их полюса (точка *O*):

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = J_x + J_y \, .$$

Единица измерения моментов инерции в системе СИ – м^4.

Если начало системы координат $0xy$ совпадает с центром тяжести сечения, то координатные оси $0x$, $0y$ называются центральными осями сечения. Вычисленные относительно этих осей моменты инерции называются центральными моментами инерции.

Далее приведены формулы для расчета центральных моментов инерции простых фигур.

Центральные моменты инерции прямоугольника (рис. 6.5): $J_x = \frac{bh^3}{12}$, $J_y = \frac{hb^3}{12}$.

Центральные моменты инерции круга (рис. 6.6): $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$.

Центральные моменты инерции треугольника (рис. 6.7): $J_x = \frac{bh^3}{36}$, $J_y = \frac{hb^3}{48}$.

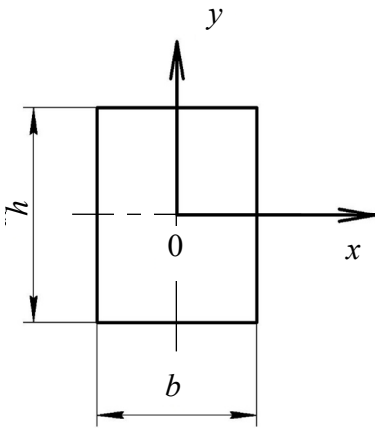


Рис. 6.5. Расчетная схема центрального момента инерции прямоугольника

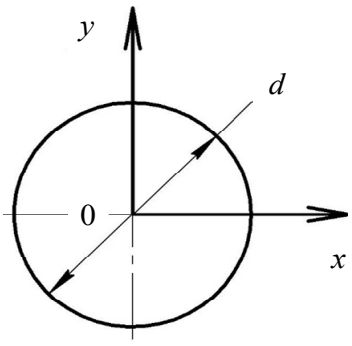


Рис. 6.6. Расчетная схема центрального момента инерции круга

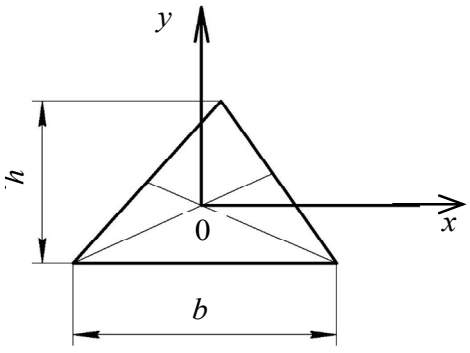


Рис. 6.7. Расчетная схема центрального момента инерции треугольника

При решении задач часто требуется вычислить момент инерции фигуры относительно координатных осей, расположенных параллельно центральным осям, но на некотором расстоянии от них (рис. 6.8).

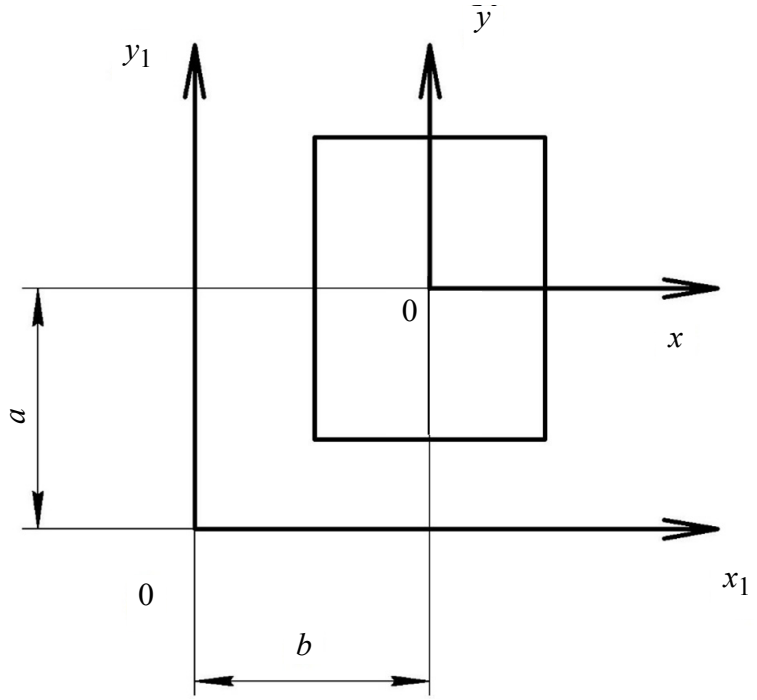


Рис. 6.8. Расчетная схема моментов инерции относительно осей, расположенных на некотором расстоянии от центральных осей

Для решения этих задач используются формулы:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F;$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 F;$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF;$$

$$J_{\rho_1} = J_\rho + (a^2 + b^2)F,$$

где F – площадь поперечного сечения фигуры; a – расстояние между координатными осями $0x$ и $0x_1$; b – расстояние между координатными осями $0y$ и $0y_1$.

Для определения осевых моментов инерции относительно осей u и v, расположенных под углом α относительно центральных осей (рис. 6.9) используются формулы:

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$J_v = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; ,$$

$$J_u + J_v = J_x + J_y..$$

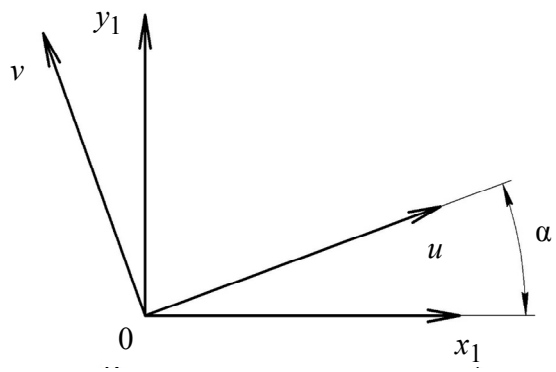


Рис. 6.9. Расчетная схема моментов инерции относительно осей, расположенных под углом относительно центральных осей

Если одна из координатных осей $0x$ или $0y$ является осью симметрии фигуры, то центробежный момент $J_{xy} = 0$.

Для определения осевых моментов инерции сечений, имеющих сложную форму, сечение разбивают на простые фигуры (прямоугольники, треугольники). Вычисляют моменты инерции простых фигур и суммируют их. При этом используется свойство определенного интеграла: интеграл по всему интервалу интегрирования равен сумме интегралов, вычисленных по интервалам, на которые можно разделить весь интервал. Для вычисления осевого момента инерции плоской фигуры можно записать:

$$J_x = J_x^1 + J_x^2 + J_x^3 + ... + J_x^n;$$

$$J_x = \int\limits_F y^2 dF = \int\limits_{F_1} y^2 dF + \int\limits_{F_2} y^2 dF + \int\limits_{F_3} y^2 dF + ... \int\limits_{F_n} y^2 dF.$$

Из формул следует, что момент инерции сложного сечения относительно какой-либо оси либо осей равен алгебраической сумме моментов инерции простых фигур, составляющих сложную фигуру относительно той же оси либо осей. Вывод применим к осевым, полярному и центробежному моментам инерции.

6.3.5. Моменты сопротивления

Момент сопротивления вычисляется по формулам:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}},$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}},$$

где J_x, J_y – осевые моменты инерции; $y_{\max}$ – расстояние от координатной оси x до наиболее удаленной точки поперечного сечения стержня; $x_{\max}$ – расстояние от координатной оси y до наиболее удаленной точки поперечного сечения стержня.

Единица измерения моментов сопротивления в системе СИ – м^3.

Момент сопротивления прямоугольника $b \times h$:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{hb^2}{6}.$$

Момент сопротивления круга: $W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$.

Момент сопротивления треугольника W_x вычисляется по разным формулам для волокон, расположенных выше $W_{x\text{в}}$ и ниже $W_{x\text{н}}$ оси $0x$:

$$W_{\text{в}x} = \frac{bh^2}{24};$$

$$W_{\text{н}x} = \frac{bh^2}{12};$$

$$W_y = \frac{hb^2}{12}.$$

6.3.6. Радиусы инерции

Радиусы инерции определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

Единица измерения радиусов инерции в системе СИ – метр (м).

Радиусы инерции прямоугольника $b \times h$:

$$i_x \approx 0,289h, i_y \approx 0,289b.$$

Радиусы инерции круга: $i_x = i_y = \frac{d}{4}$.

Радиусы инерции треугольника: $i_x = 0,236h, i_y \approx 0,204b.$

6.4. Гипотезы прочности

Для проверки прочности стержня необходимо вычислить наибольшее суммарное напряжение $p_{\max}$ и сравнить его с опасным напряжением $\sigma_{\text{оп}}$. В общем случае условие прочности выглядит так:

$$p_{\max} \le \sigma_{\text{оп}}.$$

При растяжении-сжатии и изгибе стержня опасное напряжение $\sigma_{оп}$ равно предельно допускаемому $[\sigma]$.

Предельно допускаемое напряжение для хрупких материалов вычисляется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{n},$$

где $\sigma_в$ – временное сопротивление; n – коэффициент запаса. Принимается в диапазоне от 2 до 10 в зависимости от условий работы конструкции.

Для пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n},$$

где $\sigma_т$ – предел текучести.

Значения временного сопротивления и предела текучести материала устанавливают опытным путем. В зависимости от вида линейной нагрузки используют значения, полученные при испытании образцов на растяжение $\sigma_{в.р}$ или сжатие $\sigma_{в.сж}$.

При кручении стержня опасное напряжение рассчитывают по формуле

$$\sigma_{оп} = (1+\nu)\tau_x^{max}.$$

При плоском и объемном напряженном состоянии по известным для линейного напряженного состояния значениям предельно допустимого напряжения устанавливают условия прочности при сложном напряженном состоянии.

Критерий прочности – это предположение о преимущественном влиянии на прочность материала при сложном напряженном состоянии того или иного фактора. Введение критерия позволяет перейти от сложного напряженного состояния к эквивалентному, равноопасному ему (с точки зрения прочности материала) простому одноосному растяжению.

Теория прочности – это общий метод расчета на прочность при любом виде сложного напряженного состояния на основе механических характеристик материалов, полученных в результате проведения ограниченного количества простейших механических испытаний.

Существует несколько теорий прочности. Рассмотрим важнейшие из них.

Теория первая. *В хрупких материалах разрушение в точке возникает, когда наибольшее нормальное напряжение в ней является растягивающим и достигает определенного для данного материала значения (хрупкое разрушение происходит путем отрыва от нормали).*

Поскольку наибольшее растягивающее нормальное напряжение соответствует главному напряжению σ_1, то условие прочности имеет вид:

$$\sigma_1 \le \frac{\sigma_{в.р}}{n} \text{ или } \sigma_1 \le [\sigma]_p,$$

где $[\sigma]_p$ – допускаемое напряжение растяжения.

По первой теории хрупкий образец не разрушается при сжатии. Поэтому было введено предположение, что хрупкое разрушение обуславливается наибольшими относительными удлинениями.

Теория вторая. *Хрупкое разрушение в точке возможно только при* $\varepsilon_1 > 0$ *и достигает характерного для данного материала критического значения.*

По закону Гука: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$.

При линейном напряженном состоянии (растяжении) $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ или $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{в.р}}{E}$. По второй теории прочности условием разрушения является следующее выражение: $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p$, причем $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$. Условие прочности можно записать так:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]_p.$$

Вторая теория, в отличие от первой, допускает возможность разрушения образца и при простом одноосном сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \ne 0$. При сжатии условие прочности принимает вид:

$$\nu\sigma_3 \le [\sigma]_p.$$

Отсюда следует, что временное сопротивление при растяжении $(\sigma_в = \sigma_{в.р})$ связано с временным сопротивлением при сжатии соотношением

$$\nu\sigma_{в.сж} = \sigma_{в.р}.$$

Этот вывод подтверждается тем известным фактом, что у хрупких материалов сопротивление разрушению при сжатии выше, чем при растяжении.

Для пластичных материалов введены третья и четвертая теории прочности.

Теория третья. *Пластическая деформация возникает, когда максимальное касательное напряжение достигает определенного для данного материала критического значения.*

Теория выведена из того факта, что пластическая деформация обуславливается необратимыми относительными сдвигами элементов структуры тела.

Всегда $\tau_{max} = \dfrac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$, а при растяжении $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1}{2}$. Тогда условие прочности описывается неравенством

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].$$

Теория четвертая. *Пластические деформации возникают, когда достигает некоторого предела удельная энергия формоизменения. Причем вклад в энергию деформации вносит только та часть работы, которая связана с упругой деформацией (остальная превращается в теплоту).*

По четвертой теории условие прочности характеризуется выражением

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma].$$

6.5. Исследование напряжений в стержне, нагруженном по торцам

Рассмотрим призматический стержень, который находится в равновесии под действием системы сил, приложенных к торцам. При исследовании напряженного состояния в таком стержне необходимо учитывать, что в любом поперечном сечении (рис. 6.10) $N = P,\ Q_y = Q_z = 0,\ M_x = M_3,\ M_z = M_2\ M_y = M_1,$ боковая поверхность стержня свободна от нагрузки, т. е. $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$. Стержень призматический, следовательно, в любой точке поверхности нормаль к этой поверхности перпендикулярна к оси $0x$, угол между осью стержня и нормалью к боковой поверхности $\alpha_n = \pi/2$.

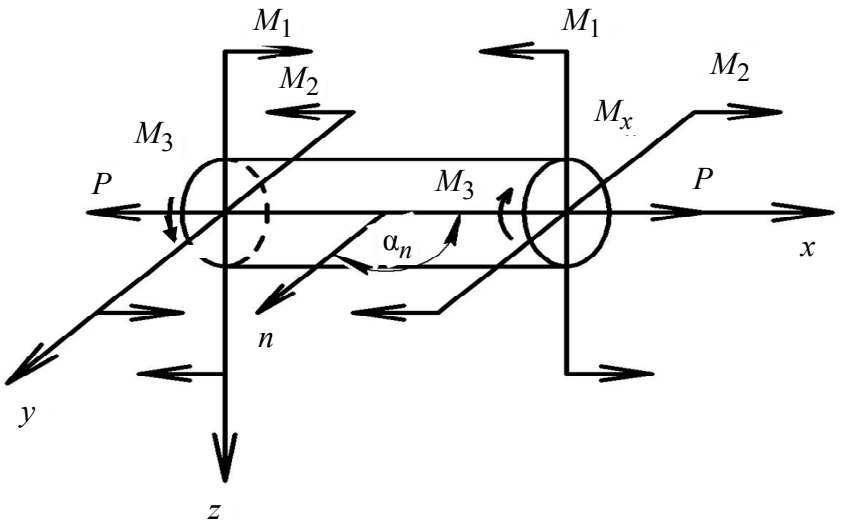


Рис. 6.10. Расчетная схема стержня, нагруженного по торцам

Определим компоненты тензора напряжений, возникающие в поперечном сечении стержня.

6.5.1. Нормальное напряжение σ_x

Воспользуемся условием статической эквивалентности, которое связывает между собой напряжение σ_x и внутренние силы:

$$\int_F \sigma_x dF = N.$$

Подставив в это выражение полином для σ_x и вычислив значения коэффициентов a_{10}, a_{11}, a_{12}:

$$\int_F (a_{10} + a_{11}y + a_{12}z)dF = a_{10}\int_F dF + a_{11}\int_F ydF + a_{12}\int_F zdF = a_{10} + a_{11}S_z + a_{12}S_y,$$

где $S_z = \int_F ydF$, $S_y = \int_F zdF$ – статические моменты площади относительно осей $0z$ и $0y$.

После математических преобразований получено следующие выражение:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}z - \frac{M_z}{J_z}y.$$

Эта формула справедлива при выполнении двух условий:

1) ось $0x$ проходит через центр тяжести сечения;

2) оси $0y$ и $0z$ – главные центральные оси инерции сечения.

6.5.2. Напряжения $\sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}$

Так как поверхностные силы на боковой поверхности стержня отсутствуют, уравнения Коши для точек на поверхности стержня имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos\alpha_n + \tau_{xy}\cos\beta_n + \tau_{xz}\cos\gamma_n = p_{nx} = 0; \\ \tau_{yx}\cos\alpha_n + \sigma_y \cos\beta_n + \tau_{yz}\cos\gamma_n = p_{ny} = 0; \\ \tau_{zx}\cos\alpha_n + \tau_{zy}\cos\beta_n + \sigma_z \cos\gamma_n = p_{nz} = 0, \end{cases}$$

где α_n, β_n, γ_n – углы между нормалью к боковой поверхности и осями x, y, z соответственно.

Для призматического стержня $\alpha_n = \pi/2$, $\cos\alpha_n = 0$. После преобразования системы уравнений с использованием полиномов для напряжений получены следующие условия:

$$\sigma_y = 0,\ \sigma_z = 0,\ \tau_{yz} = 0.$$

6.5.3. Касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz}

Касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} связаны между собой следующим уравнением:

$$\tau_{xy} = -\tau_{xz} \mathrm{tg}\beta_n,$$

где β_n – угол между осью $0y$ и нормалью к боковой поверхности n.

После преобразования этого уравнения с использованием условий статической эквивалентности и полиномов для касательных напряжений получены следующие математические зависимости:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{J_\rho} z;$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{J_\rho} y.$$

Полное касательное напряжение в окрестности точки на площадке с нормалью, совпадающей с осью $0x$, определяется выражением

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_x}{J_\rho}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{M_x}{J_\rho}\rho,$$

где ρ – текущий радиус поперечного сечения.

Уравнения выведены для стержня круглого поперечного сечения.

7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ОСНОВНЫХ СЛУЧАЕВ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ

7.1. Напряжения при осевом растяжении (сжатии) стержня

При осевом растяжении (сжатии) стержня возникает одна продольная внутренняя сила $N \neq 0$. Как следствие, из девяти компонент тензора напряжений не равно нулю только одно напряжение $\sigma_x = \frac{N}{F}$. В каждой точке сечения при растяжении: $\sigma_1 = \sigma_x > 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$ при сжатии: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,$ $\sigma_3 = \sigma_x < 0$, следовательно напряженное состояние является линейным. Главные площадки $(\sigma \neq 0, \tau = 0)$ лежат в поперечном сечении и составляют угол $\pi/2$ с осью x стержня. В наклонном сечении возникают и нормальные, и касательные напряжения:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha;$$
$$\tau_{nk} = (\sigma_x / 2) \sin 2\alpha.$$

7.1.1. Концентрация напряжений

В поперечном сечении стержня напряжения распределены равномерно, если по торцам приложена равномерно распределенная нагрузка и нет резкого изменения сечения тела. Теоретические исследования и эксперименты показывают, что наличие местных ослаблений (отверстий, выточек) существенно сказывается на напряженно-деформированном состоянии тела. Распределение напряжений в сечениях, близких к месту расположения ослаблений, становится неравномерным (рис. 7.1).

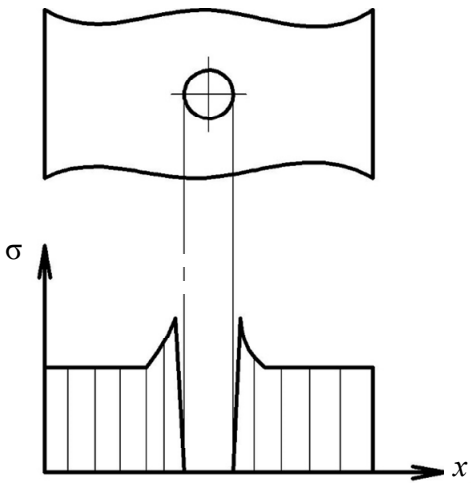


Рис. 7.1. Концентраторы напряжений

По мере удаления от сечений, проходящих через центр отверстия и выточки, эта неравномерность постепенно сглаживается (в пределах расстояния, примерно равного наибольшему поперечному размеру стержня). Факторами, обусловливающими концентрацию напряжений (концентраторами напряжений), являются отверстия, полости, трещины, выточки, надрезы, углы, выступы, острые края, резьба, а также различные неровности поверхности (риски, царапины, метки, сварные швы и т. п.). Для распределения напряжений в зоне концентрации характерно резкое увеличение напряжения (в не-

сколько раз), сопровождаемое быстрым затуханием при удалении от этой зоны. Чтобы обеспечить выполнение условия прочности в этом случае, приходится значительно увеличивать площадь поперечного сечения конструкции, что ведет к дополнительному расходу материала. При данном виде деформации оптимальной является сплошная форма сечения без вышеназванных концентраторов напряжения.

Местные напряжения можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{\text{м}} = \alpha_{\Sigma}\sigma_x,$$

где α_{Σ} – коэффициент концентрации напряжений.

7.1.2. Условие прочности

Условие прочности стержня в процессе растяжения (сжатия) имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \le [\sigma];$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n},\ n > 1.$$

Значение допустимого нормального напряжения $[\sigma]$ для каждого материала устанавливают на основании экспериментальных исследований прочности материала с учетом условий работы конструкции. Опасное напряжение $\sigma_{\text{оп}}$ зависит от состояния материала: для пластичного материала за $\sigma_{\text{оп}}$ принимают $\sigma_{\text{т}}$, для хрупкого состояния – $\sigma_{\text{в}}$ (временное сопротивление).

7.2. Напряжения при кручении стержня круглого поперечного сечения. Условие прочности и подбор сечений

Рассмотрим кручение призматического стержня, изображенного на рис. 7.2, с круглым поперечным сечением.

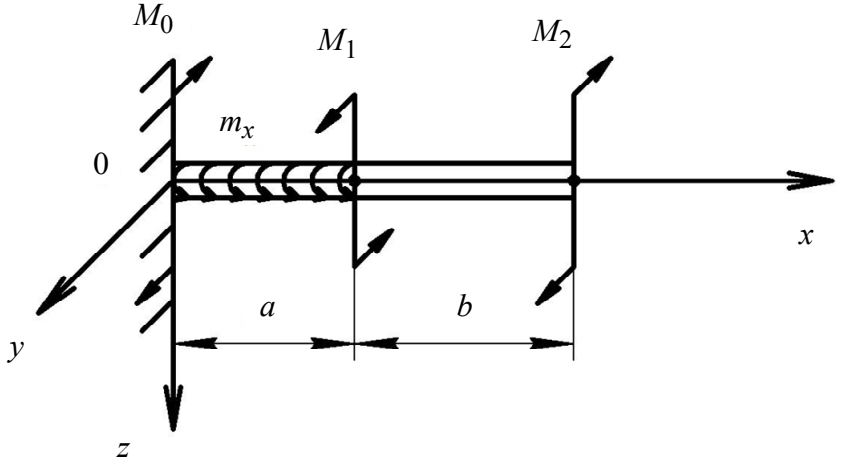


Рис. 7.2. Схема кручения стержня

При таком характере деформации из всех внутренних усилий только крутящий момент M_x отличен от нуля. В поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{J_\rho} z;$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{J_\rho} y.$$

Касательные напряжения составляют отличные от нуля компоненты в тензоре напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате главные напряжения при кручении равны:

$$\sigma_{1,3} = \pm\tau_x;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Таким образом, при кручении в точках поперечного сечения стержня возникает плоское напряженное состояние. Положение главных площадок можно определить, используя выражение:

$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tau_{nk}}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

При кручении $\tau_{nk} = \tau_x$, $\sin 2\alpha = \pm 1$. Следовательно, главные площадки составляют угол 45° с площадками, по которым действую касательные напряжения. Полное касательное напряжение, возникающее в окрестности точки поперечного сечения, равно:

$$\tau_x = \frac{M_x}{J_\rho}\rho, \qquad (7.1)$$

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF,$$

где ρ – радиус-вектор точки, в которой определяют напряжение. Полярный момент инерции круглого поперечного сечения равен:

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Так как $J_\rho = 2J_y = 2J_z$, то выражение для осевого момента инерции круглого сечения принимает вид

$$J_y = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Из выражения (7.1) следует, что τ_x изменяется по линейному закону вдоль радиуса сечения и принимает экстремальное значение в точках контура. Для расчета максимальных касательных напряжений используют следующее выражение:

$$\tau_x^{\max} = \frac{|M_x|^{\max}}{W_k},$$

$$W_k = \frac{J_\rho}{R} = \frac{\pi R^3}{2},$$

где W_k – момент сопротивления при кручении.

Принимают следующее условие прочности при кручении:

$$\tau_x^{\max} = \frac{|M_x|^{\max}}{W_k} \le [\tau],$$

где $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение. Значение $|M_x|^{\max}$ вводят в расчет после рассмотрения эпюры крутящих моментов.

Для подбора сечений из условия прочности стержня используют уравнение

$$\frac{|M_x|^{\max}}{W_k} = \frac{2|M_x|^{\max}}{\pi R^3} = [\tau].$$

7.3. Расчет напряжений при чистом сдвиге

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса. Изгиб называют чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении бруса (балки). При чистом сдвиге на стержень действуют пары сил, которые лежат в плоскости стержня. Все внутренние силы и моменты равны нулю, кроме M_y, следовательно, возникает только одно нормальное напряжение $\sigma_x = M_y / J_y$. Вдоль оси, параллельной оси *y*, напряжения σ_x распределяются равномерно; вдоль оси, параллельной оси *z*, – по линейному закону (рис. 7.3). При $z = 0$ $\sigma_x = 0$; при $z = z_{\max}$ $\sigma_x = \sigma_x \max$. Если $M_y > 0$, то нижние волокна растягиваются, а верхние сжимаются.

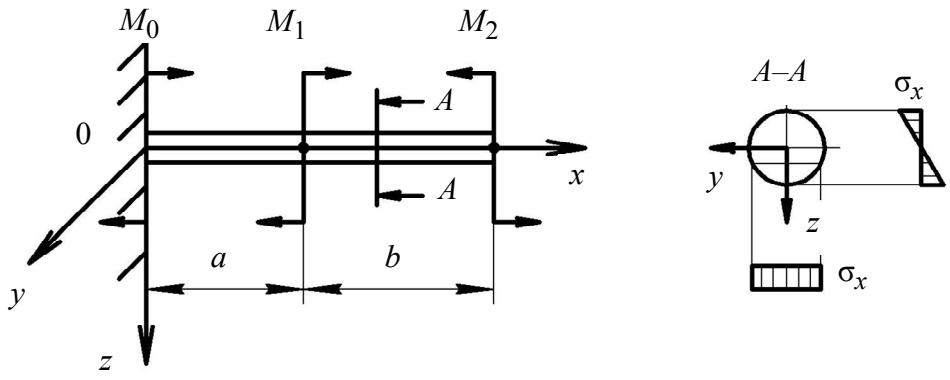


Рис. 7.3. Напряжения при чистом изгибе

В плоскости $0xy$ напряжения равны нулю. Эту плоскость называют нейтральной. Она разделяет сжатую и растянутую зоны стержня. След нейтральной плоскости на чертеже – нейтральная линия. В рассматриваемом случае она совпадает с осью $0x$.

В точках стержня при чистом изгибе реализуется линейное напряженное состояние, так как $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в нижних волокнах и $\sigma_3 = -\sigma_x$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ выше нейтральной линии.

Наибольшие напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от оси. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].$$

Момент сопротивления при изгибе W_y зависит от формы сечения, поэтому важно выбрать ее рационально.

Для прямоугольного сечения $W_y = J_y / z_{\max} = bh^2/6$. Два прямоугольника можно расположить по-разному. Наименьшими напряжения будут в том случае, если при $h > b$ высота h прямоугольника лежит в плоскости действия сил.

Чтобы при наименьшей затрате материала получить наибольшую прочность, рационально использовать коробчатое сечение, но оно неудобно в технологическом отношении. Можно расположить стенки в середине. Получится весьма рациональное сечение двутавр.

7.4. Напряжения при плоском поперечном изгибе. Формула Журавского

Изгиб называют поперечным, если в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения, то изгиб носит название *плоского*, или *прямого*.

При плоском поперечном изгибе стержня, нагруженного в плоскости $0xz$, в каждом сечении в общем случае отличны от нуля изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z. Следовательно, условия, при которых получена формула $\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y$, не выполняются. Однако в инженерной практике для определения нормальных напряжений используется та же формула, что и при чистом изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z.$$

Эта формула дает правильные значения в тех случаях, когда $Q_z = \text{const}$. Если Q_z изменяется по длине, то формула дает погрешность, которая зависит от отношения размеров поперечного сечения балки к длине пролета. Погрешность не превышает 1 % от $\sigma_x^{\max}$, и поэтому формула пригодна для расчетов.

При плоском поперечном изгибе касательное напряжение не равно нулю:

$$\int_F \tau_{xz} dF = Q_z \neq 0.$$

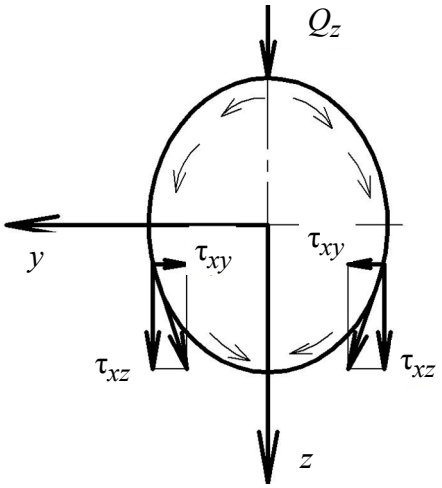


Рис. 7.4. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе

Рассмотрим поперечное сечение стержня с осью симметрии *z*. Касательные напряжения на поверхности направлены по касательной к контуру (рис. 7.4).

Каждое из этих напряжений может быть разложено на две составляющие: τ_{xy} и τ_{xz}. В каждой точке $\tau_{xy} \neq 0$, но в сумме они составляют ноль, а напряжения τ_{xz} суммируются**.** Формула для вычисления касательных напряжений τ_{xz} выведена при следующих допущениях: 1) нормальные напряжения распределяются по закону $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$; 2) вдоль любой прямой, параллельной оси $0y$, касательные напряжения τ_{xz} распределены равномерно.

Уравнение для расчета касательных напряжений τ_{xz} называется формулой Журавского:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{J_y b_z},$$

где S_y^* – статический момент площадки F^* относительно оси y; b_z – ширина поперечного сечения, соответствующая координате z.

Для наиболее распространенных форм поперечного сечения уравнение можно представить в следующем виде:

– для прямоугольного сечения высотой h и шириной b:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right];\ F = bh;\ \text{при}\ z = 0\ \tau_{xz}^{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F};$$

– для круглого сечения наружного радиуса R:

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2\right];\ F = \pi R^2;\ \text{при}\ z = 0\ \tau_{xz}^{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{F}.$$

Напряжение изменяется по высоте сечения по параболе. Формула Журавского не дает точного решения. При отношении $h/b = 2$ погрешность вычислений составляет около 3 %.

S_y^* – статический момент площади, которая лежит ниже рассматриваемого волокна. При вычислении τ_{xz} можно брать статический момент для части площади, лежащей выше рассматриваемого волокна. В этом случае статический момент вводится в формулу Журавского с обратным знаком. Зоны действия наибольших σ_x и τ_{xz} напряжений не пересекаются, поэтому размеры сечения при плоском поперечном изгибе обычно подбирают по нормальным напряжениям.

7.5. Уравнение нейтральной линии. Сложный изгиб

Рассмотрим случай, когда $N \neq 0, M_y \neq 0,\ M_z \neq 0,$ тогда

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y.$$

Представим моменты M_y и M_z в виде векторов L_y и L_z. Пара сил M_Σ, создающая вектор суммарного момента L_Σ, лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору L_Σ (рис. 7.5):

$$L_\Sigma = M_\Sigma = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

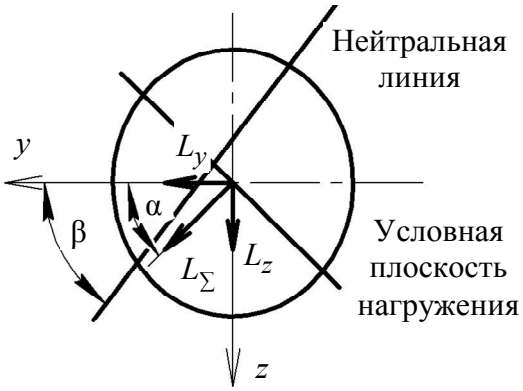


Рис. 7.5. Нейтральная линия

Величина вектора L_Σ зависит от соотношения векторов L_y и L_z.

В каждом сечении $\mathrm{tg}\alpha = M_z / M_y$, где α – угол между вектором L_Σ и осью $0y$. Считая N, M_y, M_z положительными, находим геометрическое место точек, где $\sigma_x = 0$:

$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = 0$$

– это уравнение нейтральной линии:

$$z = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} y - \frac{N}{M_y}\frac{J_y}{F};$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} = \frac{J_y}{J_z}\mathrm{tg}\alpha.$$

Можно выразить z через y:

$$z = y\mathrm{tg}\beta - a,$$

где β – угол между нейтральной линией и осью $0y$.

Получено уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Ордината, в которой нейтральная линия пересекает главную ось z сечения: $a = -(N/M_y)(J_y/F)$. Если $J_y \neq J_z$, то $\alpha \neq \beta$ – нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости нагружения. Она делит сечение на две части – растянутую и сжатую.

Если $N = 0$, то нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения. Этот случай называют сложным изгибом. Зная положение нейтральной линии, можно найти положение наиболее опасных точек.

Очевидно, что наиболее напряженными точками сечения при сложном изгибе будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. В одной из них действуют наибольшие растягивающие напряжения, а в другой – наибольшие сжимающие.

Условие прочности для опасного сечения имеет вид

$$\sigma_x^{\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \le [\sigma].$$

7.6. Совместное действие изгиба с кручением

Такой деформации обычно подвергаются валы (например, с закрепленными на них цилиндрическими прямозубыми колесами). Поскольку на каждое колесо действуют силы, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, строят эпюры крутящего M_x и двух изгибающих M_y, M_z моментов.

Перерезывающие силы Q_y и Q_z вызывают касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} в плоскости сечения. Наибольшее значение $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ возникает в центре тяжести сечения. От крутящего момента появляется касательное напряжение $\tau_x = (M_x / J_\rho)\rho$. Наибольшее значение $\tau_x = M_x / W_\rho$ – в точках контура.

Кроме того, в сечении возникают нормальные напряжения, которые лежат в плоскости, перпендикулярной к сечению. Поскольку $J_y = J_z$, то $\sigma_x^{\max}$ можно определить по формуле $\sigma_x^{\max} = M_u / W_u$, где $M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, $W_u = \pi R^3 / 4$. Таким образом, на контуре получены две точки, в которых одновременно действуют $\sigma_x^{\max}$ и $\tau_x^{\max}$ – точки A и B (рис. 7.6).

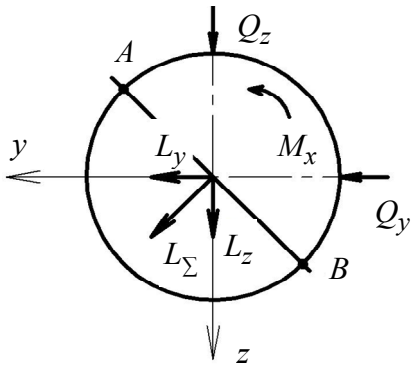


Рис. 7.6. Схема сил и моментов сил при кручении с изгибом

Чтобы проверить прочность стержня, надо найти предельное суммарное напряжение. Оно должно быть меньше допустимого: $\sigma_{\text{пр}} \le [\sigma]$. По третьей теории прочности $\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$.

Для плоского напряженного состояния

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2});$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2};$$

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_k}\right)^2} = \frac{1}{W_u}\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2} \le [\sigma].$$

7.7. Статически неопределимые задачи

Статически неопределимыми называют конструкции, в которых для определения опорных реакций либо внутренних сил одних только уравнений статики недостаточно, требуется совместное рассмотрение последних с дополнительными уравнениями, характеризующими деформацию системы.

Статическая неопределимость возникает из-за наличия дополнительных или лишних связей. Под словом лишняя понимаются дополнительные опоры (связи), добавление которых не влияет на геометрическую неизменяемость системы в целом. Дополнительные опоры увеличивают прочность и жесткость систем. Степень статической неопределимости n определяется по формуле

$$n = k - m,$$

где k – количество неизвестных сил (реакций связи); m – количество уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы сил.

Если $n = 1$ – однажды статически неопределимая система;

Если $n = 2$ – дважды статически неопределимая система и т. д.

В статически неопределимых задачах на изгиб стержня, как правило, не возникает трудностей с количеством уравнений равновесия. Однако при решении уравнений статического равновесия получаются решения вида 0 = 0.

Процесс определения реакций в опорах статически неопределимых задач называют раскрытием статической неопределимости.

Статическую неопределимость раскрывают, как правило, методами перемещений и сил; задачи на растяжение (сжатие) и кручение стержня – чаще методом перемещений; задачи на плоско-поперечный изгиб – методом сил.

7.7.1. Решение статически неопределимых задач при растяжении (сжатии) стержня

Рассмотрим пример. С двух сторон стержня – заделки, вдоль продольной оси стержня действует внешняя сила F (рис. 7.7).

Обозначим координатную ось и реакции в заделках (рис. 7.8).

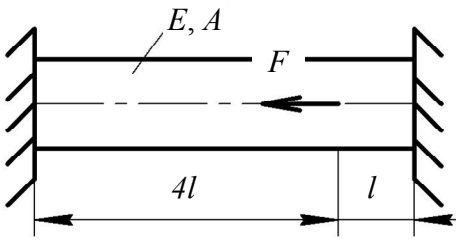


Рис. 7.7. Постановка задачи

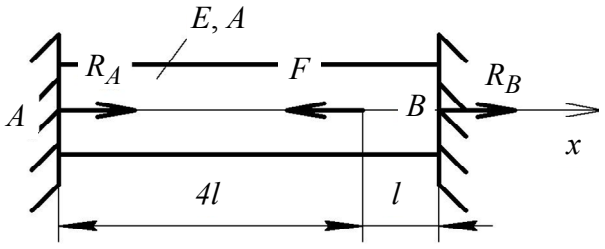


Рис. 7.8. Реакции в заделках

Составим уравнение равновесия стержня:

$$R_A - F + R_B = 0.$$

В уравнении равновесия два неизвестных R_A, R_B. Необходимо составить еще одно уравнение.

7.7.2. Метод перемещений

Мысленно представим, что слева от стержня нет заделки и запишем равенство нулю суммы перемещений стержня в точках A и F (рис. 7.9):

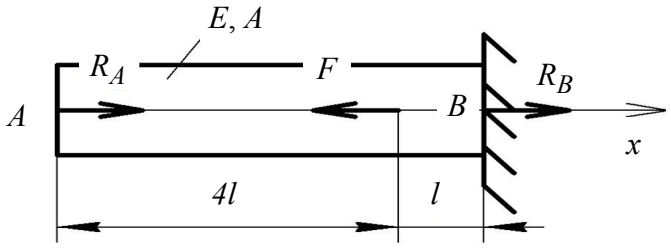


Рис. 7.9. Метод перемещений

$$\Delta l_A - \Delta l_F = 0. \tag{7.2}$$

Сумма перемещений стержня в точках A и F равна нулю, так как на самом деле в точке A есть заделка, которая не позволяет стержню изменить длину. Запишем уравнения для определения перемещений в точках A и F:

$$\Delta l_A = \frac{R_A 5l}{EA}; \tag{7.3}$$

$$\Delta l_F = -\frac{Fl}{EA}. \tag{7.4}$$

Подставим математические выражения (7.3), (7.4) в уравнение (7.2):

$$\frac{R_A 5l}{EA} - \frac{Fl}{EA} = 0 \Rightarrow R_A 5l = Fl \Rightarrow R_A = \frac{F}{5}.$$

Реакцию R_B вычислим из уравнения равновесия:

$$R_B = F - R_A = F - \frac{F}{5} = \frac{4}{5}F.$$

Далее задача решается методом сечений.

7.7.3. Решение статически неопределимых задач при кручении стержня

Рассмотри пример. С двух сторон круглый стержень закреплен защемлением. Пара единичных сил создает момент вращения вокруг оси $0x$, M_x (рис. 7.10).

Обозначим координатную ось и реакции в заделках (рис. 7.11).

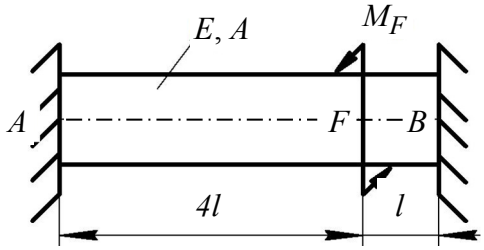


Рис. 7.10. Постановка задачи

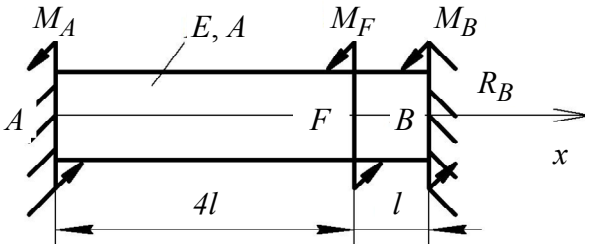


Рис. 7.11. Реакции в заделках

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A + M_F + M_B = 0.$$

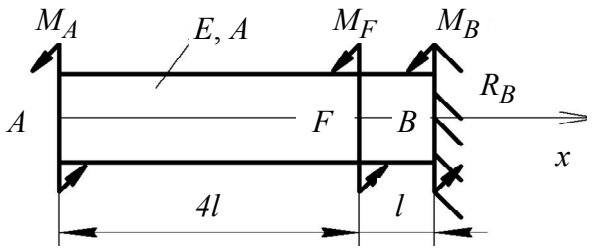


Рис. 7.12. Метод перемещений

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим сумму углов закручивания стержня от действия моментов сил M_A и M_F (рис. 7.12).

Сумма углов закручивания от действия этих моментов равна нулю, так как на самом деле левая заделка существует и не позволяет повернуть стержень вокруг оси $0x$:

$$\varphi_A + \varphi_F = 0;$$

$$\frac{M_A 5l}{GJ_\rho} + \frac{M_F l}{GJ_\rho} = 0 \Rightarrow M_A 5l + M_F l = 0;$$

$$M_A = -\frac{M_F}{5};$$

$$M_B = -M_A - M_F = +\frac{M_F}{5} - M_F = -\frac{4}{5} M_F.$$

Далее задача решается методом сечений.

7.7.4. Решение статически неопределимых задач при изгибе стержня

При изгибе стержня статически неопределимые задачи, как правило, решают методом сил. Рассмотрим пример. Один конец стержня закреплен защемлением, а второй конец – шарнирно-подвижной опорой. Перпендикулярно продольной оси стержня действует сосредоточенная сила P. Обозначим координатные оси и реакции в заделках (рис. 7.13).

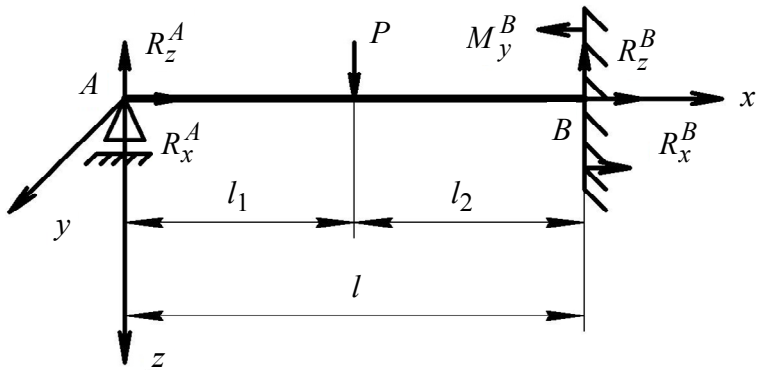


Рис. 7.13. Постановка задачи

На рис. 7.13 изображена один раз статически неопределимая задача.

Для раскрытия статической неопределимости применяем метод сил. Условно отбрасываем шарнирно-подвижную опору, в точке A прикладываем силу X_1 $(X_1 = R_z^A)$ (рис. 7.14).

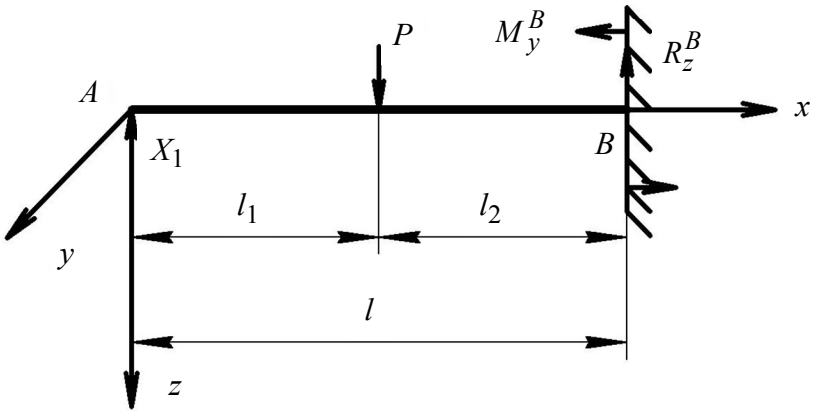


Рис. 7.14. Расчетная схема метода сил ($X_1 = R_z^A$)

Для раскрытия статической неопределимости необходимо решить уравнение

$$\Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

где Δ_{11} – перемещение стержня в точке A от силы X_1; Δ_{1P} – перемещение стержня в точке A от силы P.

Сумма перемещений Δ_{11} и Δ_{1P} равна нулю, так как в точке A расположена опора, не позволяющая стержню переместиться:

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1,$$

где δ_{11} – перемещение стержня в точке A от единичной силы $X_1 = 1$.

Тогда можно записать:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Следовательно:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = R_z^A.$$

Таким образом, для того чтобы раскрыть статическую неопределимость, необходимо вычислить перемещения δ_{11} и Δ_{1P}.

Эти перемещения вычисляем с использованием интегралов Мора:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_y} \int_0^l M_{y_1} M_{y_1} dx,$$

где M_{y_1} – изгибающий момент от единичной силы $X_1 = 1$.

Для того чтобы определить M_{y_1}, рассмотрим расчетную схему, на которой стержень нагружен только единичной силой $X_1 = 1$ (рис. 7.15).

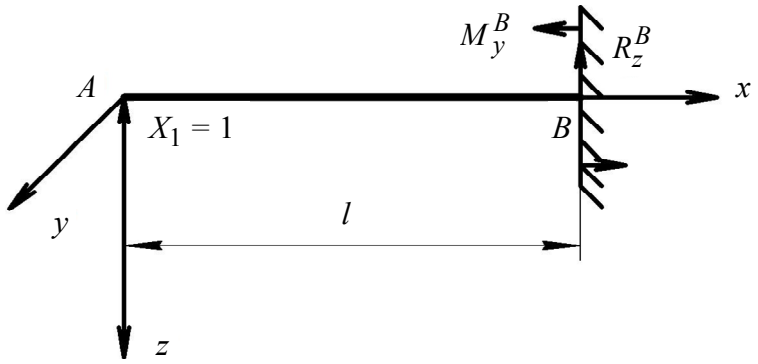


Рис. 7.15. Расчетная схема нагрузки стержня единичной силой $X_1 = 1$

В этом случае в стержне один грузовой участок (рис. 7.16).

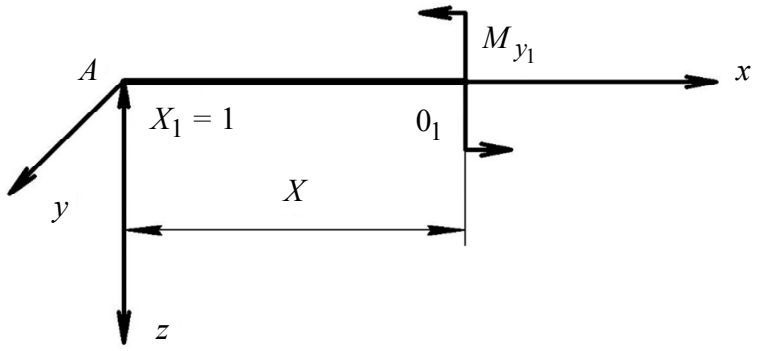


Рис. 7.16. Расчетная схема грузового участка

Уравнение равновесия изгибающих моментов M_y имеет вид:

$$-X_1 x + M_{y_1} = 0 \Rightarrow M_{y_1} = X_1 x = 1 \cdot x\,,\ x \in [0; l].$$

Тогда можно записать:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x dx = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{EJ_y}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{1}{EJ_y}\frac{l^3}{3},\ \text{м}.$$

Перемещение Δ_{1P} вычислим по формуле:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l M_{y_1} M_{y_P} dx,$$

где M_{y_P} – изгибающий момент от силы P.

Для определения момент M_{y_P} рассмотрим расчетную схему, на которой стержень нагружен только силой P (рис. 7.17).

В этом случае в стержне один грузовой участок l_2 (рис. 7.17). На участке стержня l_1 изгибающий момент $M_{y_P} = 0$. Расчетная схема грузового участка приведена на рис. 7.18.

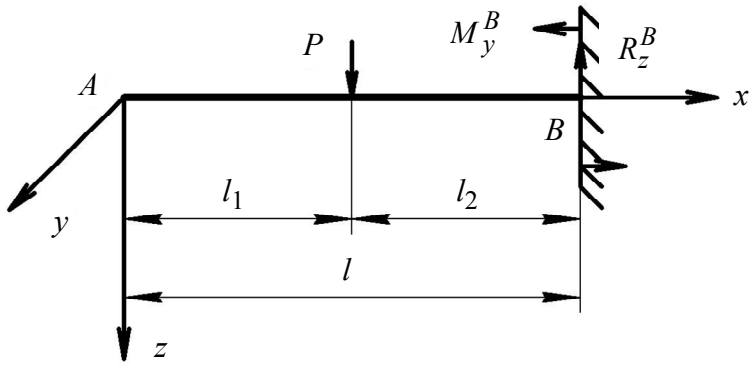


Рис. 7.17. Расчетная схема нагрузки стержня силой P

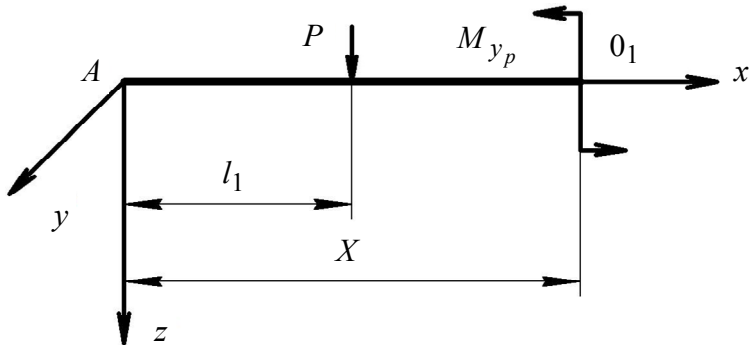


Рис. 7.18. Расчетная схема грузового участка

Уравнение равновесия изгибающих моментов M_y имеет вид:

$$M_{y_P} + P(x - l_1) = 0 \Rightarrow M_{y_P} = -P(x - l_1), \text{ Нм}, \; x \in [l_1; l_1 + l_2].$$

Так как изгибающие моменты M_{y_1} и M_{y_P} имеют разные грузовые участки, уравнение для определения перемещения Δ_{1P} необходимо разделить на две составляющие, по двум грузовым участкам стержня:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l M_{y_1} M_{y_P} dx = \frac{1}{EJ_y}\left[\int_0^{l_1} M_{y_1} M_{y_P} dx + \int_{l_1}^{l} M_{y_1} M_{y_P} dx\right].$$

Первое слагаемое в уравнении равно нулю, так как на участке стержня от 0 до l_1 $M_{y_P} = 0$. Тогда можно записать:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_y}\int_{l_1}^{l_1+l_2} M_{y_1} M_{y_P} dx = \frac{1}{EJ_y}\int_{l_1}^{l_1+l_2} 1x(-P(x - l_1))dx =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\int_{l_1}^{l_1+l_2} x(-P(x - l_1))dx = \frac{1}{EJ_y}[\int_{l_1}^{l_1+l_2} -Px^2 dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} Pl_1 x dx] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y}\left[-P\frac{x^3}{3}\Big|_{l_1}^{l} + Pl_1\frac{x^2}{2}\Big|_{l_1}^{l}\right] = \frac{1}{EJ_y}\left[-P\frac{(l^3 - l_1^3)}{3} + Pl_1\frac{(l^2 - l_1^2)}{2}\right], \text{ м.}$$

8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ СТЕРЖНЯ

8.1. Энергетические методы прикладной механики

Важной задачей сопротивления материалов является оценка жесткости конструкции – способности сопротивляться деформации. Расчет на жесткость стержневых конструкций заключается в определении наибольших угловых и линейных упругих перемещений их поперечных сечений при заданной нагрузке и сравнении этих значений с допускаемыми:

$$\theta \le [\theta];$$

$$\delta \le [\delta],$$

где θ, δ – соответственно, угловое и линейное перемещение рассматриваемого сечения под действием нагрузки; $[\theta]$, $[\delta]$ – соответственно, допускаемое угловое и линейное перемещение (назначается конструктором).

Изогнутой называют искривленную при изгибе ось стержня. Прогибом стержня δ называется перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси стержня. Стрелой прогиба называется наибольший прогиб. Углом поворота сечения называется угол θ, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению. Прогиб в плоскости $x0z$ считают положительным, если его направление совпадает с направлением оси z. Угол поворота считают положительным при повороте стержня против часовой стрелки.

При растяжении (сжатии) перемещение стержня вдоль оси определяют по формуле

$$\Delta l_i = \frac{N l_i}{EF},$$

где Δl_i – перемещение участка стержня l_i.

Если сила N переменная, то

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N(x)dx}{EF}.$$

Если число участков стержня равно k, то суммарное перемещение одного конца стержня относительно другого равно

$$\Delta l_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \Delta l_i .$$

Условие жесткости при растяжении (сжатии) стержня:

$$\Delta l_{\Sigma} \le [\Delta l],$$

где $[\Delta l]$ – предельно допускаемое удлинение стержня. Назначается конструктором или равно 1 % от длины стержня.

При кручении рассчитывают угол поворота стержня вокруг оси:

$$\varphi_i = \frac{M_x l_i}{GJ_{\rho}}.$$

Если крутящий момент M_x переменный по длине стержня, то угол поворота равен

$$\varphi_i = \int_0^{l_i} \frac{M(x)dx}{GJ_{\rho}}.$$

Если число участков стержня равно *k*, то угол закручивания конца стержня относительно заделки φ_{Σ} равен

$$\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i.$$

Условие жесткости при кручении стержня:

$$|\varphi_{\Sigma}| \le [\varphi],$$

где $[\varphi]$ – предельно допустимый угол закручивания стержня. Назначается конструктором или равен 1 % от длины стержня.

Существуют следующие методы определения перемещений при изгибе стержня:

1) метод прямого интегрирования;

2) метод начальных параметров;

3) метод Мора;

4) правило Верещагина;

5) метод на основе теоремы Костилиано.

Перечисленные методы называются энергетическими, потому что основаны на энергетических принципах.

8.2. Метод прямого интегрирования

Дифференциальное уравнение изгиба упругой оси балки имеет вид:

$$EJ_y = \frac{d^2 z}{dx^2} = M_y,$$

где $z = z(x)$ – уравнение изогнутой оси балки после деформации; M_y – изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки; EJ_y – жесткость балки на изгиб; J_y – осевой момент инерции относительно нейтральной оси y.

Интегрируя дифференциальное уравнение упругой оси балки, вычисляем угол поворота оси стержня (угловое перемещение) в произвольном поперечном сечении балки:

$$\theta = \frac{dz}{dx} = \int \frac{M_y}{EJ_y} dx + C, \tag{8.1}$$

где C – постоянная интегрирования.

Интегрируя уравнение (8.1), определяем прогиб (линейное перемещение) произвольного поперечного сечения балки:

$$z = \iint \frac{M_y}{EJ_y} dxdx + Cx + D,$$

где D – постоянная интегрирования. Постоянные интегрирования находят из граничных условий.

Рассмотрим пример.

На рис. 8.1 показана консольная балка, нагруженная силой F. Требуется определить площадь (ω), ограниченную упругой линией балки под действием силы F.

Решение. Задача решается методом прямого интегрирования. Обозначим оси координат и реакции в заделке (рис. 8.2).

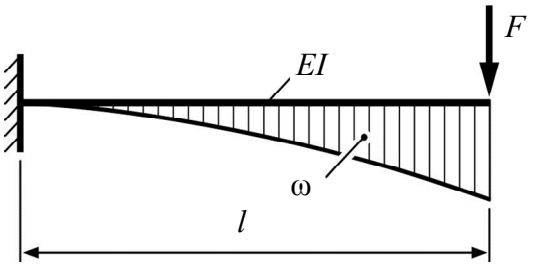


Рис. 8.1. Постановка задачи

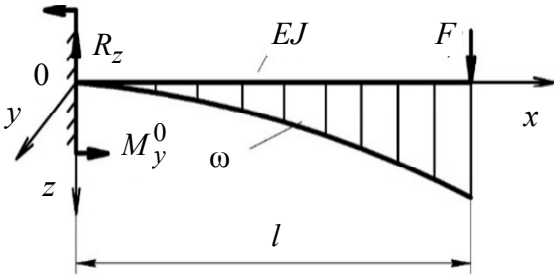


Рис. 8.2. Расчетная схема

Уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$EJ\frac{d^2z}{dx^2} = M.$$

Вначале рассчитаем реакции в жесткой заделке R_z и M_y^0 из условий равновесия балки

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i_z} = 0.$$

Проецируем внешние силы на ось 0z:

$$-R_z + F = 0 \Rightarrow R_z = F.$$

Теперь рассмотрим условие равенство нулю суммы моментов относительно полюса 0:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i_y}^0 = 0,$$

$$M_y^0 - Fl = 0 \Rightarrow M_y^0 = Fl.$$

На расчетной схеме есть только один грузовой участок, для которого запишем уравнение изгибающего момента $M_y^{0_1}$ (рис. 8.3):

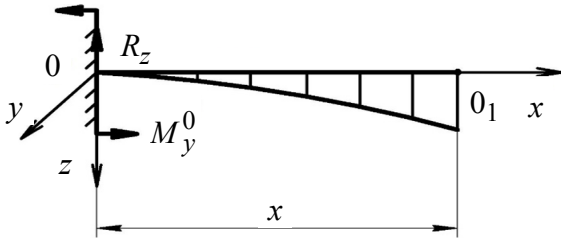


Рис. 8.3. Расчетная схема 1-го грузового участка

$$M_y^{0_1} = M_y^0 x^0 - R_z x = Flx^0 - R_z x.$$

При записи закона изменения изгибающего момента сосредоточенный момент $M_y^{0_1}$ необходимо брать с плечом в степени ноль x^0.

Уравнение изгиба упругой оси балки имеет вид:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_y^{0_1}}{EJ}.$$

Полученное математическое выражение проинтегрируем один раз. Результатом интегрирования является уравнение угла поворота балки $y' = \varphi$:

$$\varphi = z' = \frac{dz}{dx} = \int \frac{M_y^{0_1}}{EJ} dx + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Интегрируем уравнение ($M_y^{0_1}$) изгибающего момента:

$$\varphi = z' = \frac{1}{EJ}\left[Flx - F\frac{x^2}{2} \right] + C.$$

Постоянную интегрирования C вычислим из граничных условий.

При $x = 0$ $\varphi = 0$. Следовательно, $C = 0$.

Проинтегрируем теперь уравнение угла поворота балки и получим уравнение линейного перемещения произвольного поперечного сечения балки:

$$z = \frac{1}{EJ}\int\left[Flx - F\frac{x^2}{2} \right]dx = \frac{F}{EJ}\left[l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + D,$$

где D – постоянная интегрирования, которую вычислим из граничных условий.

При $x = 0$ $z = 0$. Следовательно, $D = 0$.

Для того чтобы определить площадь ω, ограниченную упругой линией балки под действием силы F, необходимо уравнение линейного перемещения произвольного поперечного сечения балки проинтегрировать по длине балки l:

$$\omega = \int_l z dx;$$

$$\omega = \frac{F}{EJ}\int_l\left[l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]dx = \frac{F}{EJ}\left[\frac{lx^3}{6}\Big|_0^l - \frac{x^4}{24}\Big|_0^l \right] =$$

$$= \frac{F}{EJ}\left[\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{24} \right] = \frac{F}{EJ}\left[\frac{4l^4}{24} - \frac{l^4}{24} \right] = \frac{Fl^4}{EJ}\frac{3}{24} = 0{,}125\frac{Fl^4}{EJ}.$$

9. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СТЕРЖНЯ УПРУГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

9.1. Составляющие потенциальной энергии

Расчет перемещений при помощи энергетических соотношений базируется на общем выражении для потенциальной энергии нагруженного стержня. В общем случае в поперечных сечениях стержня возникают шесть составляющих внутренних сил: $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$.

Полная потенциальная энергия элемента стержня может рассматриваться как сумма независимых работ каждого из шести силовых факторов:

$$d\Pi = d\Pi(M_x) + d\Pi(M_y) + d\Pi(M_z) + d\Pi(N) + d\Pi(Q_y) + d\Pi(Q_z),$$

где $d\Pi(M_x)$ – потенциальная энергия деформации кручения; $d\Pi(M_y)$, $d\Pi(M_z)$ – потенциальная энергия деформации изгиба в плоскостях $x0z$ и $x0y$ соответственно; $d\Pi(N)$ – потенциальная энергия растяжения (сжатия); $d\Pi(Q_y)$, $d\Pi(Q_z)$ – потенциальная энергия сдвига.

Составляющие полной потенциальной энергии определяются по формулам:

$$d\Pi(M_x) = \frac{M_x^2 dx}{2GJ_\rho};$$

$$d\Pi(M_y) = \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y};$$

$$\Pi(M_z) = \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z};$$

$$d\Pi(N) = \frac{N^2 dx}{2EF};$$

$$d\Pi(Q_y) = K_y \frac{Q_y^2 dx}{2GF};$$

$$\Pi(Q_z) = K_z \frac{Q_z^2 dx}{2GF},$$

где K_y, K_z – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения.

Сосредоточенную силу и сосредоточенный момент, вызывающие соответствующие перемещения, называют обобщенными, перемещение, вызванное этой силой, тоже называют обобщенным.

Потенциальная энергия всего стержня определяется уравнением:

$$П = \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_\rho} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + \int_l \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_l \frac{K_y Q_y^2 dx}{2GF} + \int_l \frac{K_z Q_z^2 dx}{2GF}.$$

9.2. Теорема Костильяно

Теорема Кастильяно – метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации.

Формулировка теоремы: частная производная от потенциальной энергии системы по сосредоточенной внешней нагрузке равна перемещению точки приложения этой нагрузки по направлению ее действия:

$$\delta_n = \frac{\partial П}{\partial P_n},$$

где P_n – обобщенная сила (n – номер грузового участка); δ_n – обобщенное перемещение .

Суть теоремы: работа, совершенная внешними силами, равна изменению потенциальной энергии системы. Если известны силы, действующие на конструкцию, и можно вычислить ее потенциальную энергию, то можно определить перемещения или внутренние реакции.

Применение теоремы Кастильяно: анализ простых и сложных систем, расчет деформаций в мостах, балках и других конструкциях.

Теорема Кастильяно не применима к системам, к которым нельзя применить принцип неизменности начальных размеров и принцип независимости действия сил.

Под перемещением в заданном направлении понимают проекцию полного перемещения на заданное направление.

Перемещение точки приложения силы по направлению силы – это проекция на направление силы полного перемещения этой точки. Применяя данную теорему для случая плоского поперечного изгиба стержня, обычно пренебрегают перерезывающими силами, так как их влияние невелико. Тогда для стержня, имеющего несколько грузовых участков, теорема Костильяно записывается в виде:

$$\delta_{zk} = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{M_{y_i}}{EJ_{y_i}} \frac{\partial M_{y_i}}{\partial P_{k_i}} dx. \qquad (9.1)$$

Для расчета по этой формуле составляют выражения для изгибающего момента на всех грузовых участках стержня, затем вычисляют производные

от них по соответствующей силе. Полученные значения подставляют в интегралы функции (9.1), после этого проводится суммирование вычисленных интегралов по всем участкам.

Теорема Костильяно позволяет определить перемещения только тех точек, к которым приложены внешние силы и только по направлению действия силы. Для вычисления перемещений и углов поворота в других сечениях стержня можно ввести дополнительную единичную силу или момент, приложив их в соответствующей точке.

9.3. Метод Максвелла–Мора

В общем случае для определения линейных и угловых перемещений используется формула Максвелла–Мора:

$$\delta_i = \int_l \frac{N\boldsymbol{N}}{EF}dx + \int_l \frac{M_x\boldsymbol{M}_x}{GJ_\rho}dx + \int_l \frac{M_y\boldsymbol{M}_y}{EJ_y}dx + \int_l \frac{M_z\boldsymbol{M}_z}{EJ_z}dx + k_z\int_l \frac{Q_z\boldsymbol{Q}_z}{GF}dx + k_y\int_l \frac{Q_y\boldsymbol{Q}_y}{GF}dx,$$

где $\bar{N}\ldots\bar{Q}_z$ – внутренние силы от единичной силы.

Применительно к задаче плоского поперечного изгиба формула для определения перемещений называется интегралом Мора, она имеет вид:

$$\delta_i = \int_l \frac{M_y\boldsymbol{M}_y}{EJ_y}dx \text{ или } \delta_i = \sum\int_{l_k} \frac{M\boldsymbol{M}_i}{EJ}dx.$$

9.4. Определение перемещений при помощи интеграла Мора

Для вычисления линейного перемещения $\delta_i = z_i$ в произвольной точке балки с помощью интеграла Мора необходимо последовательно выполнить следующие операции:

1) составить уравнения изгибающих моментов M от заданной нагрузки для каждого грузового участка;

2) к рассматриваемой балке приложить силу, равную единице, в той точке, где определяется перемещение. Единичная сила прикладывается по предполагаемому направлению этого перемещения;

3) составить уравнения изгибающих моментов $\boldsymbol{M}_i$ от единичной силы для каждого грузового участка балки;

4) вычислить сумму интегралов от произведения моментов M и $\boldsymbol{M}_i$, деленного на жесткость поперечного сечения балки (EJ).

Для вычисления угла поворота $\delta_i = \varphi_i$ поперечного сечения к рассматриваемой балке следует приложить единичный сосредоточенный момент, а затем составить уравнения изгибающих моментов $\boldsymbol{M}_i$.

9.5. Правило Верещагина

По способу (правилу) Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади первой эпюры *M* на ординату второй эпюры $\boldsymbol{M}_i$ под центром тяжести первой эпюры.

Примечание:

1) произведение площади одной эпюры на ординату другой считается положительным, если площадь и ордината находятся по одну сторону от оси балки;

2) если в пределах рассматриваемого грузового участка эпюры M и $\boldsymbol{M}_i$ линейны, то безразлично какой эпюры брать площадь, а на какой ординату;

3) если одна из эпюр (*M*) криволинейная, а вторая ломанная, следует разбить вторую эпюру $(\boldsymbol{M}_i)$ на отдельные участки, в пределах которых она линейна;

4) если обе эпюры ломаные и границы участков у них не совпадают, то надо разбить обе эти эпюры на одинаковое число линейных участков, чтобы в пределах полученных участков обе эпюры были линейные и границы участков совпадали;

5) если значение перемещения $\delta_i = z_i$ получилось со знаком минус, то это указывает, что реальное перемещение рассматриваемой точки противоположно выбранному направлению единичной силы; эпюру изгибающих моментов *M* от заданной нагрузки обычно называют грузовой, а эпюру $\boldsymbol{M}_i$ – единичной.

10. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

10.1. Понятие о температурных напряжениях

Большинство конструкций на этапах создания и эксплуатации подвергаются нагреву и при этом испытывают дополнительные нагрузки, связанные с появлением температурных деформаций и напряжений.

Решение задачи о температурных напряжениях существенно зависит от выбранной расчетной схемы, принятой математической модели, точности определения теплофизических характеристик. Зависимости между напряжениями, деформациями и температурой деформируемых тел изучает раздел механики *теория термоупругости*. Эта теория базируется на двух основных допущениях:

1) температурное поле тела не зависит от его напряженно-деформированного состояния;

2) упругая силовая деформация, обусловленная действием напряжений, и температурное расширение суммируются в соответствии с принципом суперпозиции.

Отношение изменения одного из размеров тела после нагревания к первоначальному и к интервалу изменения температур называют температурным коэффициентом линейного расширения α. Коэффициент α $К^{-1}$ – физическая характеристика материала, зависящая от абсолютной температуры тела. Для металлов он, как правило, увеличивается с повышением температуры. От абсолютной температуры тела зависят и такие характеристики материала, как модуль нормальной упругости E и коэффициент Пуассона ν. При небольшом изменении температуры (до 100 °С) обычно считают, что эти величины постоянные, и в справочниках, как правило, приводят их значения при температуре 20 °С. В прикладной механике принимают допущение, что α, E, ν не зависят от температуры.

10.2. Математическая модель термонапряженного состояния материала

Для определения пятнадцати функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние в точке тела и перемещения ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, u_x, u_y, u_z), необходимо использовать дифференциальные уравнения равновесия Навье, дифференциальные уравнения Коши, уравнения закона Гука.

В любом малом объеме тела при изменении температуры T возникают температурные деформации. Если деформации не встречают препятствий, то температурные напряжения отсутствуют. В изотропном однородном теле температурный коэффициент линейного расширения α не зависит от направления деформации и выбранной системы координат. Если предположить, что на коэффициент α не влияет температура, он будет постоянной величиной для данного материала. В этом случае деформации в теле одинаковы по всем направлениям, т. е. сдвига нет.

Следовательно: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T;\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$.

Однако частицы тела обычно препятствуют взаимным изменениям объема, вследствие этого возникают температурные напряжения.

Представим себе тело, разделенное на элементы, размеры которых стремятся к нулю, и подверженное неравномерному нагреву.

Допустим, что деформации этих элементов уравновешиваются приложением к каждому элементу равномерного давления p. Определим деформации из соотношений закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha T;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha T;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha T.$$

Деформации уравновешиваются равномерным давлением p, значит

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu}; \qquad (10.1)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Силы, приложенные к элементам, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия Навье и уравнениям Коши. Подставив в дифференциальные уравнения равновесия Навье выражения для напряжений (10.1), получим:

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}+g_x=0;$$
$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}+g_y=0;$$
$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}+g_z=0,$$

где g_x, g_y, g_z – объемные силы, которые необходимо приложить к телу, чтобы оно сохраняло первоначальный объем:

$$g_x=\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x};$$
$$g_y=\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y};$$
$$g_z=\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

На поверхности должно быть приложено давление p в соответствии с формулой (10.1). Предположим, что элементы тела соединены и следует устранить объемные силы и давление на поверхности тела. Для этого в дифференциальные уравнения равновесия необходимо ввести объемные силы g_x, g_y, g_z, а в уравнения Коши для поверхности тела – распределенную нагрузку $\alpha ET/(1-2\nu)$. В этом случае температурные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}=0;$$
$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}=0;$$
$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

Также удовлетворяют условиям для поверхности тела:

$$\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\cos\beta+\tau_{xz}\cos\gamma=\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\cos\alpha;$$
$$\tau_{yx}\cos\alpha+\sigma_y\cos\beta+\tau_{yz}\cos\gamma=\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\cos\beta;$$
$$\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\cos\beta+\sigma_z\cos\gamma=\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\cos\gamma.$$

Кроме этого, температурные напряжения удовлетворяют и уравнениям совместимости. Практически математическая модель термонапряженного состояния описывается известными уравнениями из общей теории напряженно-деформированного состояния твердого тела. Температурные напряжения в незакрепленном теле при его равномерном нагреве не возникают.

При этом:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T;$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Для определения функции T, не вызывающей напряжений, рассмотрим уравнения совместности деформаций Сен-Венана. В уравнения совместности входят вторые производные от линейных деформаций, следовательно, эти уравнения тождественно удовлетворяются, если температура T постоянна или является линейной функцией координат:

$$T = \text{const},$$

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z\,.$$

В этом случае температурные напряжения не возникают и перемещения будут непрерывными функциями.

10.3. Температурные напряжения в стержневых конструкциях при растяжении (сжатии)

Рассмотрим призматический стержень (рис. 10.1), находящийся под действием внешней силы P и температурного поля $T = T(x, y, z)$.

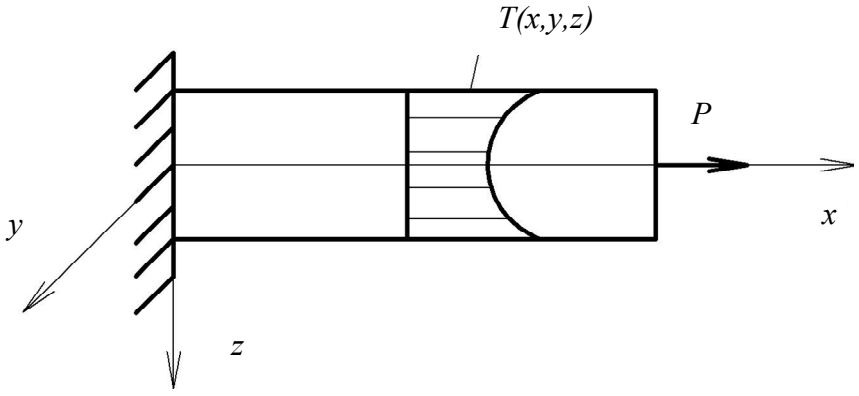


Рис. 10.1. Температурное поле

Поскольку $T = T(x, y, z)$, то в общем случае параметры $E, \alpha, \varepsilon^T, \sigma$ могут изменяться как по длине стержня, так и в пределах поперечного сечения. Если сечение стержня имеет ось симметрии и распределение температуры симметрично относительно этой оси, то после нагружения и нагрева сечения стержня

остаются плоскими и перпендикулярными к этой оси. В этом случае деформация $\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x$ одинакова для всех точек поперечного сечения.

Воспользуемся уравнениями упругости для записи относительного удлинения по направлению оси x в случае линейного напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E + \varepsilon_x^T,$$

$$\varepsilon_x^T = \alpha \Delta T.$$

Отсюда нормальное напряжение

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_x^T).$$

Подставив в условие статического равновесия $\int\limits_F \sigma_x dF = N$ выражение для σ_x, получим выражение для относительного удлинения

$$\varepsilon_x = \frac{N}{\int\limits_F EdF} + \frac{\int\limits_F E\varepsilon^T dF}{\int\limits_F EdF}$$

и напряжения

$$\sigma_x = \frac{EN}{\int\limits_F EdF} + E\left(\frac{\int\limits_F E\alpha\Delta T dF}{\int\limits_F EdF} - \alpha\Delta T \right).$$

Нормальная сила N зависит в статически определимом стержне только от внешних сил. Второе слагаемое в правой части выражения для σ_x представляет температурные напряжения в стержне при воздействии на него симметричного температурного поля.

10.4. Температурные напряжения в стержневых конструкциях при плоском изгибе

Рассмотрим призматический стержень (рис. 10.2) с плоскостью симметрии $0xz$.

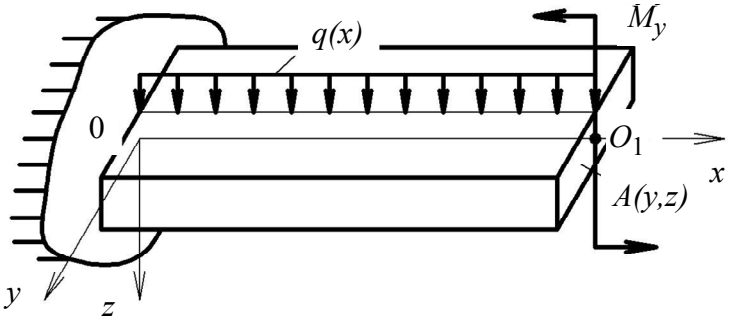


Рис. 10.2. Расчетная схема

Поперечные нагрузки действуют в этой плоскости, а температуры распределены симметрично относительно нее. В соответствии с гипотезой плоских сечений перемещение точки O_1 сечения $A(y,z)$ вдоль оси $0x$ равно

$$u_x = u_{x0} + \Theta z, \tag{10.1}$$

где u_{x0} – осевое перемещение точки O_1; Θ – угол поворота сечения относительно оси y.

Следовательно, относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{du_{x0}}{dx} + \frac{d\Theta}{dx} z.$$

Воспользовавшись уравнениями термоупругости, выражение для линейного напряженного состояния представим в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon^T.$$

Из уравнения для расчета ε_x получим выражение для нормального напряжения:

$$\sigma_x = E\left(\frac{du_{x0}}{dx} + \frac{d\Theta}{dx} z - \varepsilon^T \right).$$

Подставим уравнение для определения σ_x в условия статической эквивалентности:

$$\int_F \sigma_x dF = 0;$$

$$\int_F \sigma_x z dF = M_y.$$

После математических преобразований получена следующая формула для вычисления нормального напряжения σ_x:

$$\sigma_x = E\frac{M_y z}{\int_F E z^2 dF} + E\left(\frac{\int_F E\alpha\Delta T dF}{\int_F E dF} + \frac{z\int_F E\alpha\Delta T z dF}{\int_F E z^2 dF} - \alpha\Delta T \right).$$

Второе слагаемое последнего уравнения представляет напряжения, возникающие от воздействия на стержень поля температур. Если температура изменяется только по высоте стержня и зависит от z, то

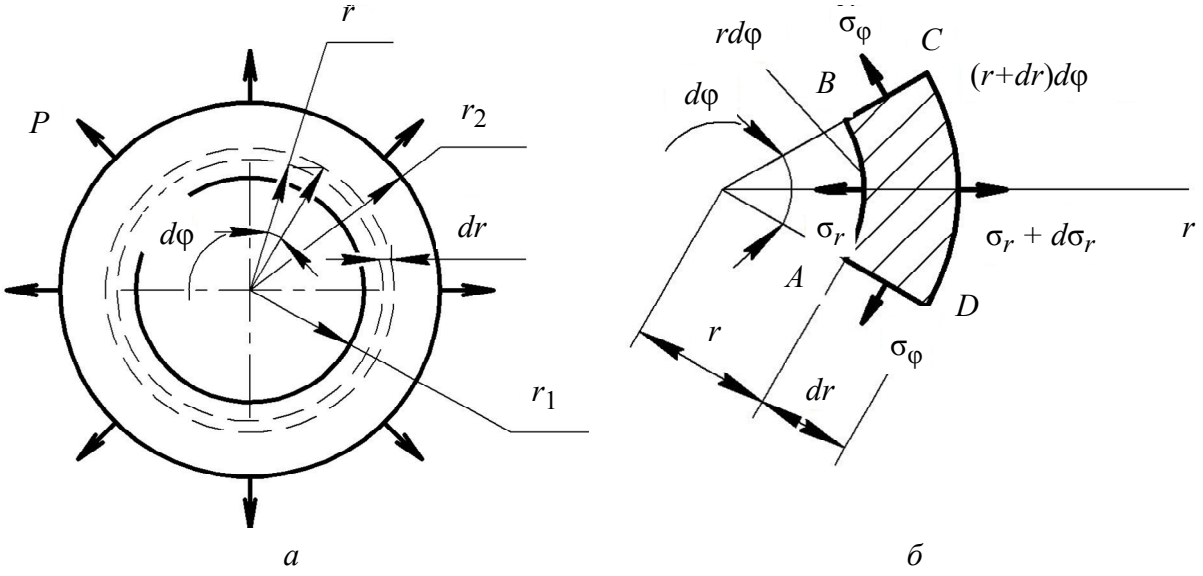
$$\sigma_x = E\left(\frac{\int_{-h/2}^{h/2} E\alpha\Delta T dF}{\int_{-h/2}^{h/2} E dF} + \frac{z\int_{-h/2}^{h/2} E\alpha\Delta T z dF}{\int_{-h/2}^{h/2} E z^2 dF} - \alpha\Delta T \right).$$

10.5. Температурные напряжения в многослойных элементах конструкций

При температурных воздействиях на цилиндрические составные конструкции, элементы которых изготовлены из разных материалов и имеют разные температурные коэффициенты линейного расширения, возникают контактные давления, вызывающие напряжения в элементах конструкций.

Сначала рассмотрим основные уравнения деформации толстостенных цилиндрических конструкций, находящихся под действием давления. Допустим, что однородный полый цилиндр нагружен так, что внешняя нагрузка осесимметрична и вдоль оси цилиндра не меняется. Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок, напряжения и деформации будут также симметричны относительно его оси.

При деформации каждая точка цилиндра перемещается. По условиям симметрии перемещения происходят в радиальных плоскостях. Каждая точка может перемещаться по направлению радиуса и вдоль образующей. Двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра и находящимися друг от друга на расстоянии, равном единице, вырежем кольцо (рис. 10.3, *а*).



а *б*

Рис. 10.3. Напряжения в толстостенном цилиндре

Затем двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол $d\varphi$, и двумя соосными цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r+dr$ выделим в этом кольце элемент $ABCD$. Вследствие осевой симметрии цилиндра и осесимметричного нагружения элемент не будет перекашиваться и, значит, по его граням не возникнут касательные напряжения. Действующие по гранями в радиальном и окружном направле-

ниях нормальные напряжения будут главными (рис. 10.3, *б*). Окружные напряжения σ_φ в силу осевой симметрии одинаковы, а радиальные напряжения σ_r изменяются в зависимости от радиуса.

Выражения для усилий на гранях элемента представим в следующем виде:

$$\sigma_\varphi dr \cdot 1;\ \ \sigma_r r d\varphi \cdot 1;$$

$$\left(\sigma_r + d\sigma_r\right)\left(r + dr\right)d\varphi \cdot 1 = \left(\sigma_r r + \sigma_r dr + d\sigma_r r + d\sigma_r dr\right)d\varphi \cdot 1.$$

Слагаемыми $d\sigma_r dr$ пренебрежем в силу малости. Составим уравнение равновесия выделенного элемента:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$-\sigma_r r d\varphi + \sigma_r r d\varphi + \sigma_r dr d\varphi + d\sigma_r r d\varphi - 2\sigma_\varphi dr \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Разделив полученное уравнение на $dr d\varphi$, получим:

$$\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_\varphi = 0. \qquad (10.2)$$

Полученное уравнение связывает параметры напряжений σ_r и σ_φ. Задача статически неопределима, поэтому следует ввести дополнительное уравнение совместимости перемещений. Под действием давления точки перемещаются в радиальном направлении на *u*. Точка, отстоящая от оси элемента на *r*, после деформации будет отстоять на *r* + *u*. Точки A и B перемещаются на величину *u*, точки C и D – на величину $u + du$.

Относительное удлинение в радиальном направлении равно

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr},$$

где du – удлинение элемента BC длиной dr.

По закону Гука для плоского напряженного состояния имеем:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\varphi\right);\ \ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r\right).$$

Удлинение в окружном направлении происходит из-за изменения радиуса. Относительное окружное удлинение ε_φ определяется равенством:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}.$$

Закон Гука можно записать в обратной форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right); \tag{10.3}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right). \tag{10.4}$$

Получим три уравнения с тремя неизвестными, так как ε_r и ε_φ определяют через u. Подставив выражения для σ_r и σ_φ из уравнений закона Гука (10.3), (10.4) в уравнение равновесия (10.2) и разделив полученные уравнения на r, получим:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

или

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right] = 0.$$

Решение такого уравнения можно проверить подстановкой

$$u(r) = Cr + D\frac{1}{r}.$$

Произвольные постоянные C и D определяют из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Зная u, легко определить значения σ_r и σ_φ.

Рассмотрим толстостенный цилиндр, находящийся под действием внешнего и внутреннего давления (решение Лямэ) (рис. 10.4).

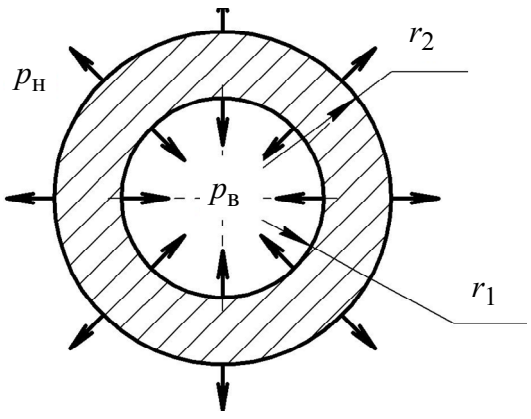


Рис. 10.4. Толстостенный цилиндр

Цилиндр можно считать толстостенным, если толщина его стенки $\delta > D/20$ (D – наружный диаметр цилиндра). Внешнюю и внутреннюю нагрузку будем считать растягивающей. Граничные условия для определения постоянных интегрирования:

при $r = r_1$ – $\sigma_r = p_в$,

при $r = r_2$ – $\sigma_r = p_н$.

Выражения для σ_r и σ_φ имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(C - \frac{D}{r^2} + \nu C + \frac{D}{r^2}\nu\right) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)C - (1-\nu)\frac{D}{r^2}\right];$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(C + \frac{D}{r^2} + \nu C - \frac{D}{r^2}\nu\right) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)C + (1-\nu)\frac{D}{r^2}\right].$$

Выполняя граничные условия, получаем:

$$\sigma_r\big|_{r=r_1} = \frac{E}{1-\nu}C - \frac{E}{1+\nu}\frac{D}{r_1^2} = p_\text{в};$$

$$\sigma_r\big|_{r=r_2} = \frac{E}{1-\nu}C - \frac{E}{1+\nu}\frac{D}{r_2^2} = p_\text{н}.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{1-\nu}{E}\frac{p_\text{н}r_2^2 - p_\text{в}r_1^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$D = \frac{1+\nu}{E}\frac{p_\text{н} - p_\text{в}}{r_2^2 - r_1^2}r_1^2 r_2^2.$$

Зная значения C и D, можно вычислить σ_r и σ_φ.

Проанализируем, как изменяются значения σ_r и σ_φ при изменении толщины стенки цилиндра. Для простоты рассмотрим случай, когда цилиндр нагружен только внутренним давлением: $p_\text{н} = 0;\ p_\text{в} = -p$:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)\frac{(1-\nu)pr_1^2}{E\left(r_2^2 - r_1^2\right)} - (1-\nu)\frac{(1+\nu)p}{E\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right] =$$

$$= \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right).$$

Аналогично находим

$$\sigma_\varphi = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right).$$

При $r_2^2 / r_1^2 > 1$ радиальное напряжение отрицательно, т. е. в этом направлении происходит деформация сжатия, а окружное напряжение положительное – здесь возникает деформация растяжения.

В цилиндре с малой толщиной стенки окружные напряжения распределены по толщине стенки равномерно. Радиальные напряжения меньше окружных в той же мере, в какой толщина δ меньше радиуса.

При увеличении толщины стенки при том же давлении наибольшие напряжения уменьшаются. При δ, стремящемся к бесконечности:

$$\sigma_r = -p\frac{r_1^2}{r^2};$$

$$\sigma_\varphi = p\frac{r_1^2}{r^2}.$$

На практике можно считать, что цилиндр имеет бесконечно большую толщину стенки при $r_2 / r_1 > 4$. Погрешность вычислений приблизительно составляет 5–6 %.

При расчете составной конструкции каждый цилиндр следует рассматривать отдельно. По контактной поверхности действует давление p, которое определяют из условия совместности перемещений (рис. 10.5).

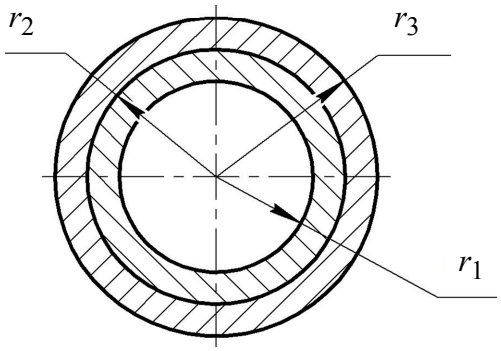


Рис. 10.5. Составная конструкция цилиндров

Граничные условия для первого цилиндра имеют вид: при $r = r_1$ – $\sigma_r = p_1 = p_в$, при $r = r_2$ – $\sigma_r = p$.

Граничные условия для второго цилиндра: при $r = r_2$ – $\sigma_r = p$, при $r = r_3$ – $\sigma_r = p_2 = p_н$.

Условия совместности перемещений характеризуются выражением

$$u_I(r)\big|_{r=r_2} = C_I r + \frac{D_I}{r} = u_{II}(r)\big|_{r=r_2} = C_{II} r + \frac{D_{II}}{r},$$

где $u_I(r)$, $u_{II}(r)$ – текущие перемещения в первом и втором цилиндре соответственно.

Значения C_I, C_{II}, D_I, D_{II} находим, подставляя в выражение для C и D величины ν, E и значения радиусов. Приравнивая $u_I(r), u_{II}(r)$, получаем уравнение с одним неизвестными p. Вычисляя контактное давление, определяем σ_r и σ_φ в обоих цилиндрах.

При определении температурных напряжений каждый из элементов составной конструкции также рассматривают, устанавливая для каждого в отдельности граничные условия.

Поскольку цилиндрические элементы составной конструкции выполняют из разных материалов, то вследствие разницы температурных коэффициентов линейного расширения и деформироваться эти цилиндры будут по-разному. На контактной поверхности возникнет давление $p(T)$.

Граничные условия для первого цилиндра: при $r = r_1$ – $\sigma_r = 0$; при $r = r_2$ – $\sigma_r = p(T)$; для второго цилиндра: при $r = r_2$ – $\sigma_r = p(T)$; при $r = r_3$ – $\sigma_r = 0$.

Условие совместности перемещений по контактной поверхности выражается в том, что при $r = r_2$ – $u_{\text{I}}(r) = u_{\text{II}}(r)$, т. е.

$$C_{\text{I}} r + \frac{D_{\text{I}}}{r} + \alpha_{\text{I}} r \Delta T \Big|_{r=r_2} = C_{\text{II}} r + \frac{D_{II}}{r} + \alpha_{\text{II}} r \Delta T \Big|_{r=r_2}.$$

11. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

11.1. Основные положения

К наиболее распространенным видам динамических воздействий относят вибрации и удары.

Удар – такой вид воздействия, при котором внешняя сила имеет вид коротких импульсов (единицы – десятки миллисекунд).

Вибрация – такой вид воздействия, при котором сила измеряется по гармоническому закону.

При динамических воздействиях внутри конструкции возникают динамические (изменяющиеся во времени) напряжения.

Разрушение наступает быстрее и зависит от количества циклов нагрузки и амплитудного значения ускорения. Причина разрушения – возникновение циклических пластических деформаций, которые, накапливаясь, вызывают усталость материала.

Основной характеристикой при динамических воздействиях является предел выносливости σ_{-1} – это наибольшее по модулю напряжение цикла нагружения σ_{max}, при котором конструкция не разрушается до базового количества цикла (обычно $1\cdot10^6...1\cdot10^7$). Так, например, для стали $\sigma_{-1}\approx 0{,}5\sigma_в$, для цветных металлов и пластмасс $\sigma_{-1}\approx(0{,}25...0{,}5)\sigma_в$.

Условие прочности при динамических воздействиях:

$$|\sigma_{max}|\le[\sigma]_д=\frac{\sigma_{-1}}{K_з},$$

где $[\sigma]_д$ – максимально допустимое динамическое напряжение; $K_з$ – коэффициент запаса прочности (обычно 1…3).

Условие жесткости при динамических воздействиях:

$$|W_{max}|\le[W_д],$$

где $|W_{max}|$ – максимальный по модулю прогиб цикла; $[W]_д$ – допустимый динамический прогиб.

11.1.1. Расчетные схемы

Будем рассматривать конструкцию как колебательную систему со сосредоточенными параметрами (рис. 11.1).

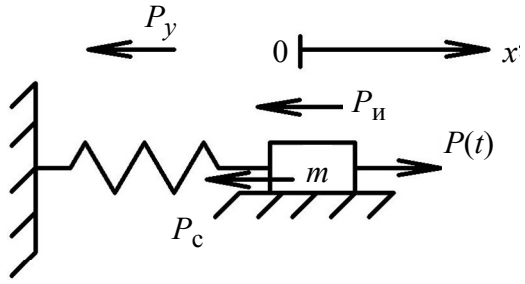


Рис. 11.1. Расчетная схема

Баланс динамических сил при колебаниях определяется уравнением:

$$P_и + P_с + P_у = P(t), \qquad (11.1)$$

где $P_и$ – инерционная сила ($P_и = m\ddot{a}$); $P_с$ – сила сопротивления трению ($P_с = k\dot{x}$); $P_у$ – сила упругости ($P_у = cx$).

Баланс динамических сил при колебаниях соответствует силовому возбуждению, когда внешняя динамическая сила $P(t)$ приложена к инерционному элементу. С учетом выражений для сил уравнение движения (11.1) принимает вид:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = P(t).$$

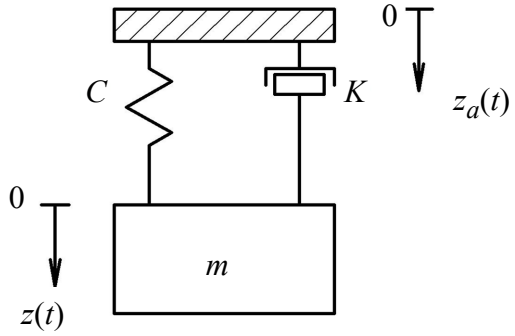


Рис. 11.2. Перемещение инерционного элемента относительно основания

На практике чаще встречается случай, когда внешняя сила приложена к основанию конструкции и вызывает ее перемещение $z_a(t)$ – кинематическое возбуждение (рис. 11.2).

Инерционный элемент испытывает перемещение $z(t)$. Однако опасным является перемещение инерционного элемента относительно основания: $z_1 = z - z_a$.

В этом случае уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{z}_1 + k\dot{z}_1 + cz_1 = -m\ddot{z}_a.$$

Рассмотрим вначале решение этого дифференциального уравнения для случая свободных колебаний без потерь ($\ddot{z}_a = 0$ и $k = 0$).

Обозначим соотношение $c/m = \omega_0^2$, где ω_0 – частота свободных колебаний.

Тогда уравнение движения примет вид:

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = 0.$$

Решением этого уравнения являются незатухающие колебания

$$z_1 = A\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где A – наибольшая амплитуда колебаний; α – начальная фаза.

Если в системе имеются механические потери $(k \neq 0)$, то решением уравнения движения является функция:

$$z_1 = Ae^{-nt}\sin(w_1 t + \alpha)\ \text{(затухающие колебания)},$$

где $n = k/2m$, $w_1 = \sqrt{w_0^2 - n^2}$.

При малых потерях $w_1 \approx w_0$.

11.1.2. Случай вынужденных колебаний

Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + w_0^2 z_1 = -\ddot{z}_a .$$

11.2. Расчеты на прочность и жесткость при вибрациях

При вибрациях ускорение внешней вынуждающей силы имеет вид:

$$\ddot{z}_a = \ddot{z}_{am}\sin wt ,$$

где w – частота вынуждающей силы. Решение уравнения движения:

$$z_1 = z_{1m}\sin(wt + \varphi) = \mu z_{am}\sin(wt + \varphi),$$

где φ – начальная фаза; $\mu = z_{1m}/z_{am}$ – коэффициент динамичности.

При вибрациях коэффициент динамичности равен

$$\mu = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \gamma^2\eta^2}},$$

где $\eta = w/w_0$ – относительная частота; $\gamma = 2n/w_0$ – коэффициент механических потерь.

Графическая зависимость μ от η показана на рис. 11.3.

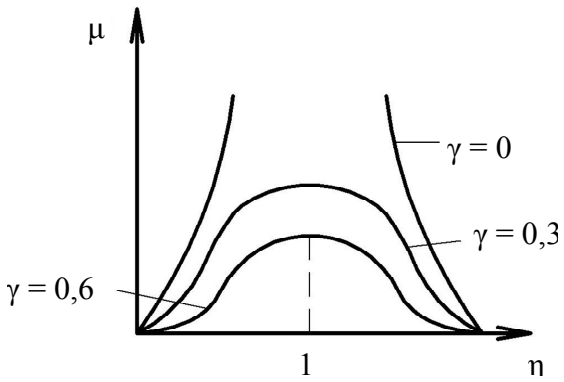


Рис. 11.3. Зависимость коэффициента динамичности от коэффициента динамических потерь

Наибольшего значения коэффициент динамичности μ достигает при резонансе, когда $\eta = 1$. При расчетах на прочность учитывают не только статическую силу, но и динамическую:

$$P_{\text{д}} = m\ddot{z}_1 = m\mu\ddot{z}_{am}.$$

При расчетах на жесткость статическое перемещение суммируют с динамическим:

$$z_{1m} = \mu_{\max} z_{am} = \frac{\mu_{\max}\ddot{z}_{am}}{w_0^2}.$$

11.3. Расчеты на жесткость и прочность при ударах

Будем считать, что ударное ускорение $\ddot{z}_a(t)$ воздействует на корпус прибора через основание, при этом трение учитывать не будем ($k = 0$). В реальных конструкциях, где $(k \neq 0)$, возникающие динамические напряжения будут меньше, что эквивалентно введению дополнительного коэффициента запаса прочности. Стандартами на динамическую ударную прочность нормируются, как правило, два вида ударных импульсов – прямоугольный и синусоидальный (рис. 11.4).

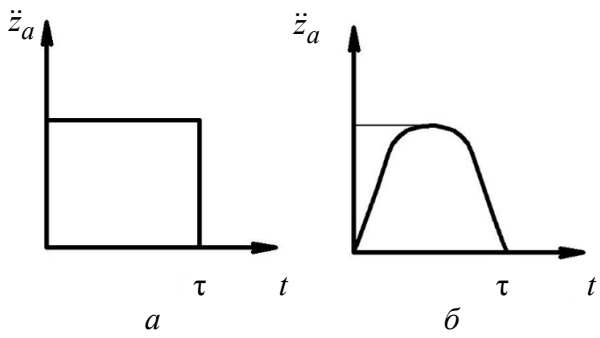


Рис. 11.4. Прямоугольный (*а*) и синусоидальный (*б*) ударные импульсы

Подход к решению уравнения движения такой же, как и при вибрациях. Однако следует учитывать различные интервалы времени: 1) момент воздействия ударного импульса $0 < t < \tau$, когда масса движется по закону вынужденных колебаний; 2) интервал времени после окончания ударного импульса $t > \tau$, когда масса совершает свободные колебания.

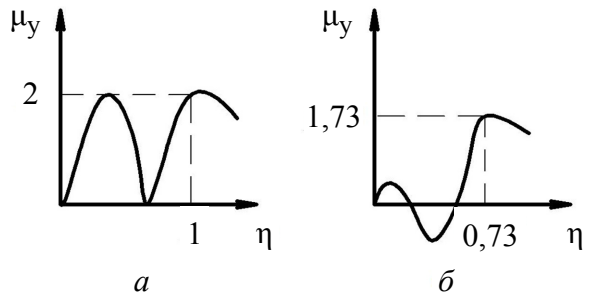


Рис. 11.5. Зависимость коэффициента динамичности при ударах μ_y от условной частоты ударного импульса η для прямоугольного (*а*) и синусоидального (*б*) импульса

Зависимость коэффициента динамичности при ударах μ_y от условной частоты ударного импульса $\eta = \dfrac{1}{2\tau f_0}$ для прямоугольного и синусоидального импульса показана на рис. 11.5, *а* и *б* соответственно.

Аналитически эта зависимость выражается следующим образом:

а) для прямоугольного импульса $\mu_y = 2\left|\sin\dfrac{\pi}{2\eta}\right|$;

б) для синусоидального импульса $\mu_y = \dfrac{2\eta}{\eta^2 - 1}\cos\dfrac{\pi}{2\eta}$.

Далее расчет динамической прочности и жесткости ведется аналогично случаю вибраций.

11.4. Общие методы повышения динамической прочности и жесткости

Для исключения резонанса необходимо вывести собственную частоту конструкции w_0 из области возможных частот вибрации $w_{\min}...w_{\max}$, что обеспечит невысокое значение коэффициента динамичности $\mu_{\max}$. Это можно сделать, например, изменив крепление деталей на более жесткое (шарнир на заделку). Можно также установить дополнительное ребро жесткости, однако это усложнит конструкцию. Эффективным является и применение антивибрационных покрытий с высоким коэффициентом механических потерь, но в этом случае конструкция становится неремонтопригодной. Выбор конкретного метода остается за конструктором.

12. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ

12.1. Основные понятия

Современное массовое производство невозможно без обеспечения взаимозаменяемости деталей.

Взаимозаменяемость – это свойство элементов конструкции, изготовленных с определенной точностью геометрических, механических и иных параметров, обеспечивать заданные эксплуатационные показатели вне зависимости от времени и места изготовления при сборке, ремонте и замене этих элементов.

Взаимозаменяемость обеспечивается определенной точностью выполнения размеров, формы, расположения и шероховатости поверхностей, выбором материала и покрытия.

Реальная деталь отделяется от окружающей среды поверхностями. Следует различать поверхности сопрягаемые и несопрягаемые.

Сопрягаемыми называются поверхности, по которым детали соединяются в сборочные единицы, а последние – в готовые изделия.

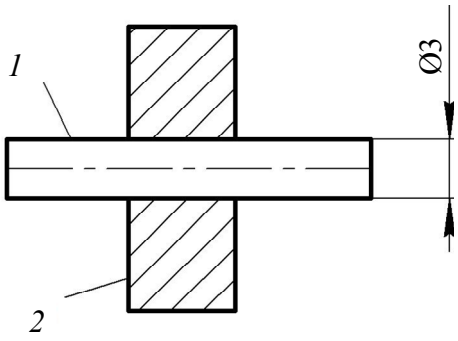


Рис. 12.1. Сопрягаемые и несопрягаемые поверхности

Несопрягаемые, или свободные – это конструктивно необходимые поверхности, не предназначенные для соединения с поверхностями других деталей. На рис. 12.1 показан круглый стержень (*1*), перемещающийся в подшипнике (*2*). Наружная цилиндрическая поверхность стержня диаметром 3 мм и внутренняя поверхность подшипника диаметром 3 мм являются сопрягаемыми поверхностями, а плоские торцы стержня и подшипника – несопрягаемыми.

Фундаментальными понятиями основ взаимозаменяемости являются отверстие и вал, которые распространяются не только на цилиндрические поверхности.

Вал – термин, условно применяемый для обозначения наружных элементов деталей, включая нецилиндрические элементы.

Отверстие – термин, условно применяемый для обозначения внутренних элементов деталей, включая нецилиндрические элементы.

На рис. 12.2 показаны примеры валов, отверстий и элементов, не относящихся ни к валам, ни к отверстиям.

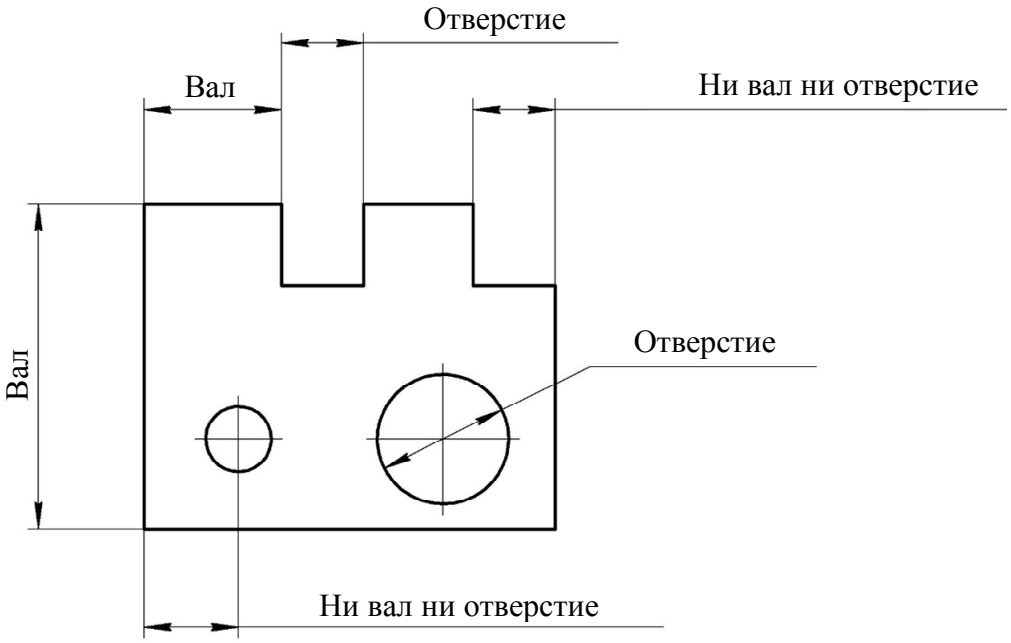


Рис. 12.2. Схема валов и отверстий

Различают следующие типы размеров.

Действительный размер – размер элемента, установленный измерением.

Предельные размеры – два предельно допустимых размера элемента, между которыми должен находиться или которому может быть равен действительный размер.

Наибольший предельный размер – наибольший допустимый размер элемента.

Наименьший предельный размер – наименьший допустимый размер элемента.

Номинальный размер – размер, относительно которого определяются отклонения. Номинальный размер существует только на чертеже. Значения номинальных размеров должны быть округлены и соответствовать ГОСТ 6636–69. Не подлежат округлению значения, полученные расчетным путем, или размеры, полученные суммированием нескольких номинальных размеров.

12.2. Отклонения и допуски

Для указания точности выполнения размера используют предельные отклонения, которые определяются относительно номинального размера.

Отклонение – алгебраическая разность между размером (действительным или предельным и соответствующим номинальным размерами). *Действительное отклонение* – алгебраическая разность между действительным и соответствующим номинальным размерами.

Предельное отклонение – алгебраическая разность между предельным и соответствующим номинальным размерами. Различают верхнее и нижнее предельное отклонение.

Верхнее отклонение (*ES* – для отверстия, *es* – для вала) – алгебраическая разность между наибольшим предельным и соответствующим номинальным размерами.

Нижнее отклонение (*EI* – для отверстия, *ei* – для вала) – алгебраическая разность между наименьшим предельным и соответствующим номинальным размерами.

Основное отклонение – одно из двух предельных отклонений (верхнее или нижнее), определяющее поле допуска относительно нулевой линии. В системе допусков и посадок основным является отклонение, ближайшее к нулевой линии.

Нулевая линия – линия, соответствующая номинальному размеру, от которой откладываются отклонения размеров при графическом изображении допусков и посадок. Если нулевая линия расположена горизонтально, то положительные отклонения откладываются вверх от нее, а отрицательные – вниз.

Допуск (T) – разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями. Допуск – это абсолютная величина без знака.

Стандартный допуск (*IT*) – любой из допусков, установленный системой допусков и посадок. В дальнейшем под термином «допуск» будем понимать стандартный допуск.

Поле допуска – поле, ограниченное наибольшим и наименьшим предельными размерами и определяемое величиной допуска и его положением относительно номинального размера. При графическом изображении поле допуска заключено между двумя линиями, соответствующими верхнему и нижнему отклонениям относительно нулевой линии (рис. 12.3).

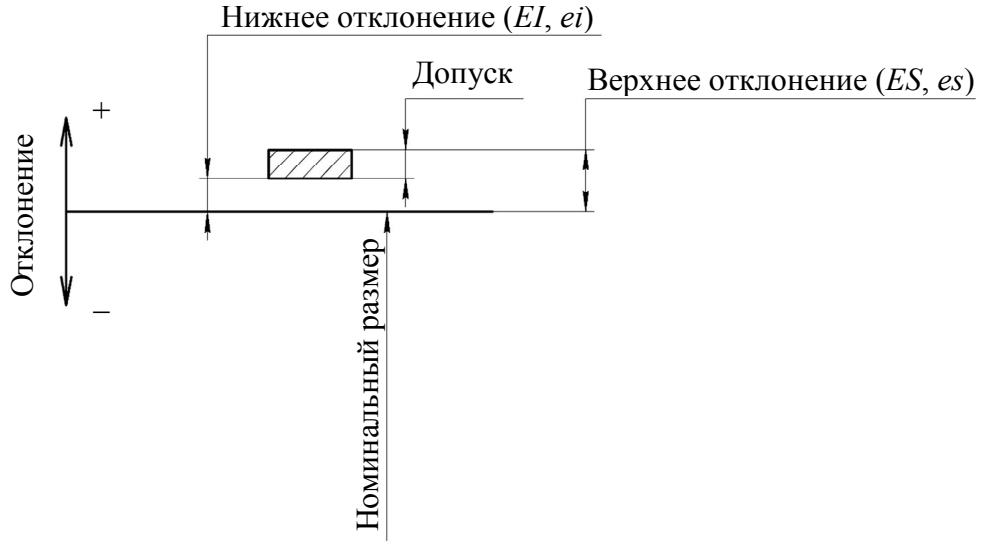


Рис. 12.3. Схема отклонений

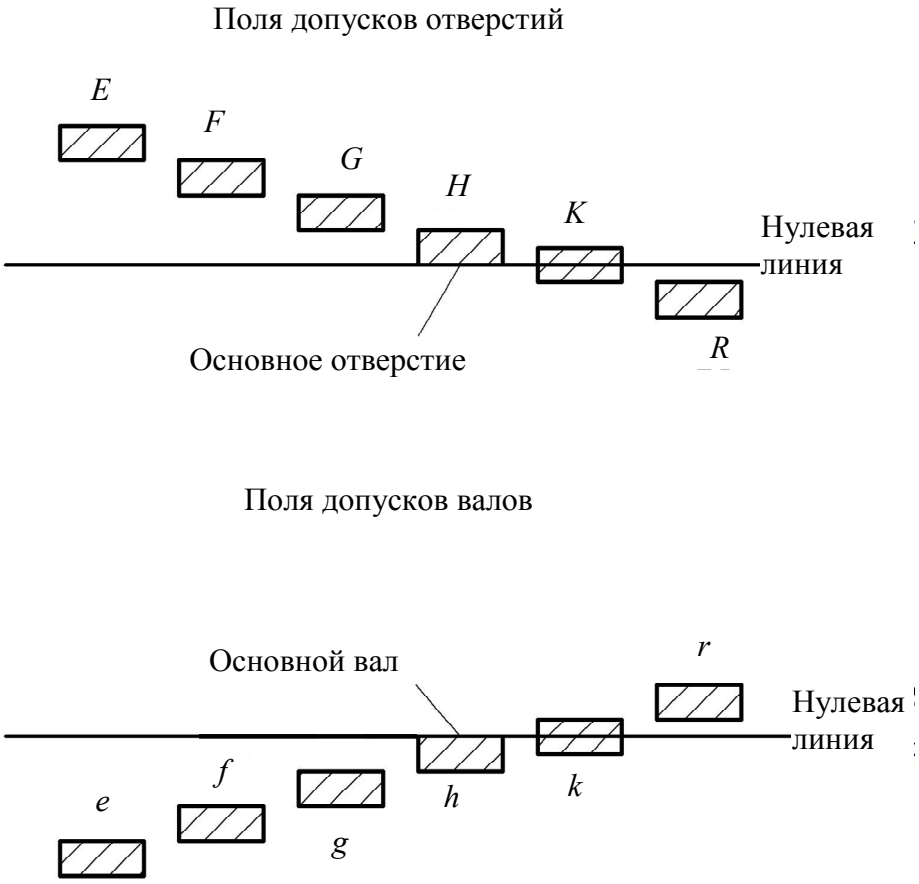


Рис. 12.4. Схема расположения полей допусков

На рис. 12.4 изображена схема расположения полей допусков.

Предельные отклонения отверстий и валов определяются ГОСТ 25347–2013.

12.3. Квалитеты

Точность выполнения размеров определяется допуском: чем меньше допуск, тем выше точность. Для задания точности вводится понятие квалитета.

Квалитет (степень точности) – совокупность допусков, рассматриваемых как соответствующие одному уровню точности для всех номинальных размеров. Стандартная система допусков содержит 20 квалитетов, обозначаемых числами 01, 0, 1, 2, …, 18. Чем меньше число, тем выше точность. Квалитеты 01, 0, 1, 2, 3, 4, 5 применяются преимущественно для изготовления мер длины и калибров. Величины допусков в зависимости от квалитета и номинального размера определяются из таблиц ГОСТ 25346–2013.

12.3.1. Основные отклонения отверстий и валов

ГОСТ 25346–2013 устанавливает определенное положение полей допусков и отверстий относительно нулевой линии. Для каждого номинального размера установлен ряд полей допусков, образующихся сочетанием 20 квалитетов и 28 основных отклонений. Основные отклонения обозначаются одной или

двумя буквами латинского алфавита, заглавными – для отверстий, строчными – для валов. Например: A, B, C, CD, P, E.

Поля допусков обозначают сочетанием основного отклонения (буква) и допуск по квалитету (число). Например: $H14$ (отверстие), $k8$ (вал). Из всех возможных полей допусков на практике применяют их ограниченное число в соответствии с ГОСТ 25346–2013.

12.3.2. Обозначение предельных отклонений на чертежах

На чертеже все размеры, подлежащие выполнению по этому чертежу, должны иметь предельные отклонения, которые указывают сразу после номинального размера (в миллиметрах) в соответствии с ГОСТ 2307–2011 одним из трех способов:

1) условным обозначением – $20p6$, $ø15H12$;

2) числовым значением в миллиметрах: $ø30 \pm 15$, $ø15^{+0,18}$, $ø20^{+0,035}_{+0,022}$;

3) условным обозначением с указанием в скобках числовых значений: $20p6\left(^{+0,032}_{+0,022}\right)$, $ø15H12\left(^{+0,18}\right)$.

Пояснения:

– при несимметричных отклонениях верхнее помещают над нижним и записывают шрифтом, размер которого меньше основного;

– число знаков в верхнем и нижнем отклонениях должно быть одинаковым;

– отклонения, равные нулю, допускается не указывать;

– симметричные отклонения указывают основным шрифтом.

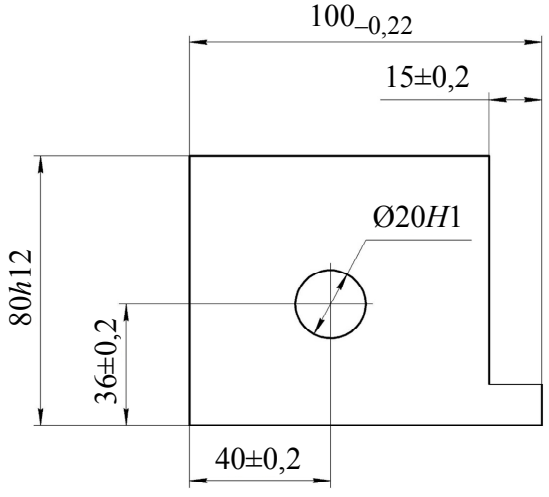


Рис. 12.5. Изображение предельных отклонений на чертежах

На чертежах допустимые отклонения рекомендуется указывать первым способом. Допускается не указывать предельные отклонения для размеров фасок, радиусов скругления и гибки, ширину и глубину канавок для выхода инструмента, размеров зон шероховатости, термообработки, покрытия, рифления и насечки, а также сварочных размеров. На сборочных чертежах предельные отклонения указывают для всех присоединительных и установочных размеров. Габаритные размеры указывают без предельных отклонений. Пример обозначения предельных отклонений указан на рис. 12.5.

12.4. Посадки

Реальные изделия состоят из сборочных единиц и деталей, соединенных между собой. В одних случаях детали должны соединяться между собой свободно (с зазором), в других – неподвижно (с натягом) (рис. 12.6).



Рис. 12.6. Соединение деталей с натягом (*а*) и зазором (*б*)

Посадка – это характер соединения двух деталей, определяемый разностью их размеров до сборки. Обе детали, входящие в посадку (вал и отверстие), должны иметь одинаковый номинальный размер. Номинальный размер посадки – это номинальный размер, общий для отверстия и вала, составляющих соединение.

Зазор S – это разность между размерами отверстия и вала до сборки, если размер отверстия больше размера вала.

Натяг N – разность между размерами вала и отверстия до сборки, если размер вала больше размера отверстия.

Посадка с зазором – посадка, при которой всегда образуется зазор в соединении, т. е. наименьший предельный размер отверстия, который больше наибольшего предельного размера вала или равен ему. При графическом изображении полей допуска поле отверстия расположено над полем допуска вала (рис. 12.7).

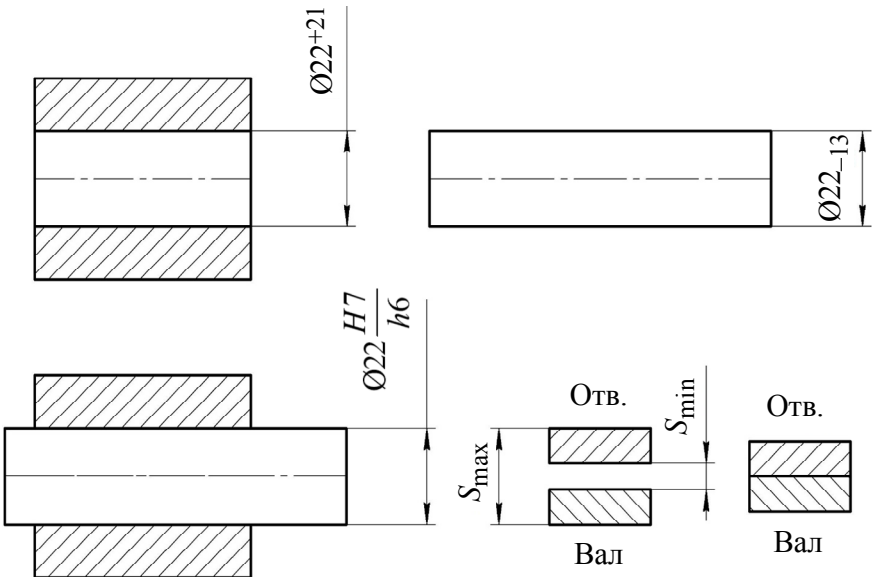


Рис. 12.7. Посадка с зазором

Посадка с натягом – посадка, при которой всегда образуется натяг в соединении, т. е. наибольший предельный размер отверстия меньше наименьшего предельного размера вала или равен ему. При графическом изображении поле допуска отверстия расположено ниже поля допуска вала (рис. 12.8).

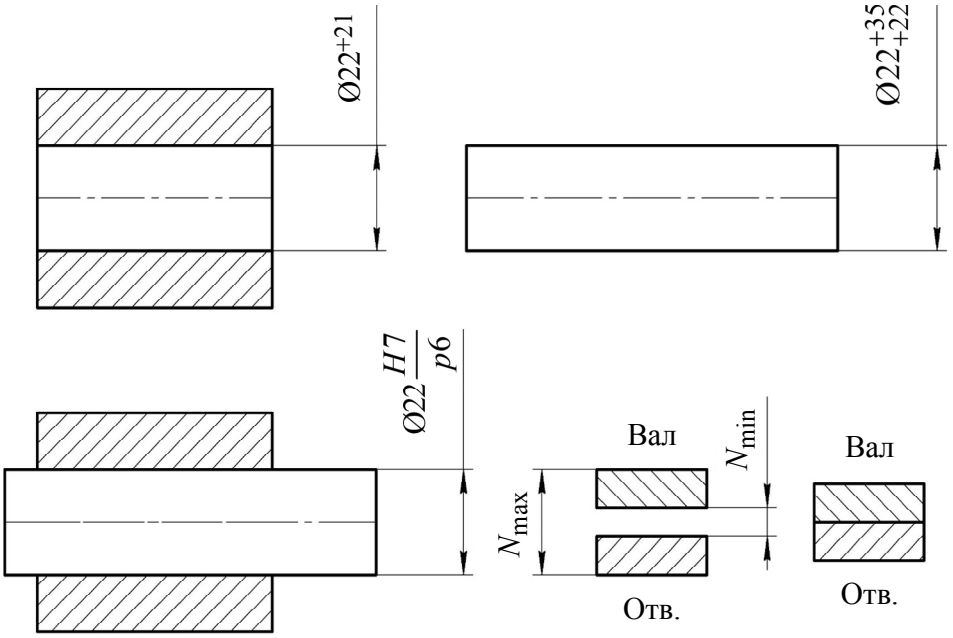


Рис. 12.8. Посадка с натягом

Переходная посадка – посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга в соединении, в зависимости от действительных размеров отверстия и вала. При графическом изображении поля допусков отверстия и вала перекрываются частично или полностью (рис. 12.9).

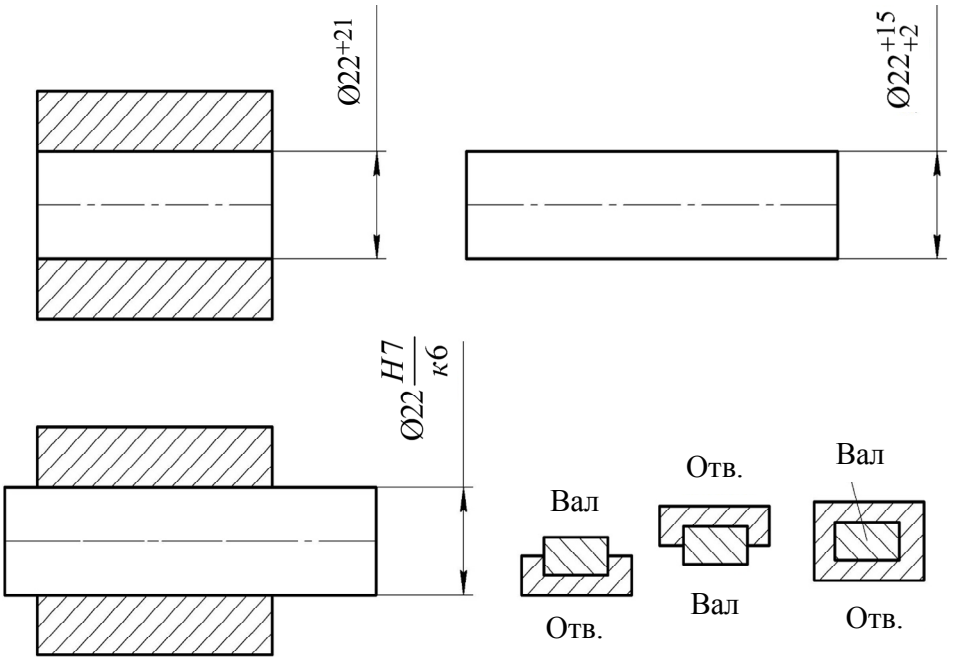


Рис. 12.9. Посадка переходная

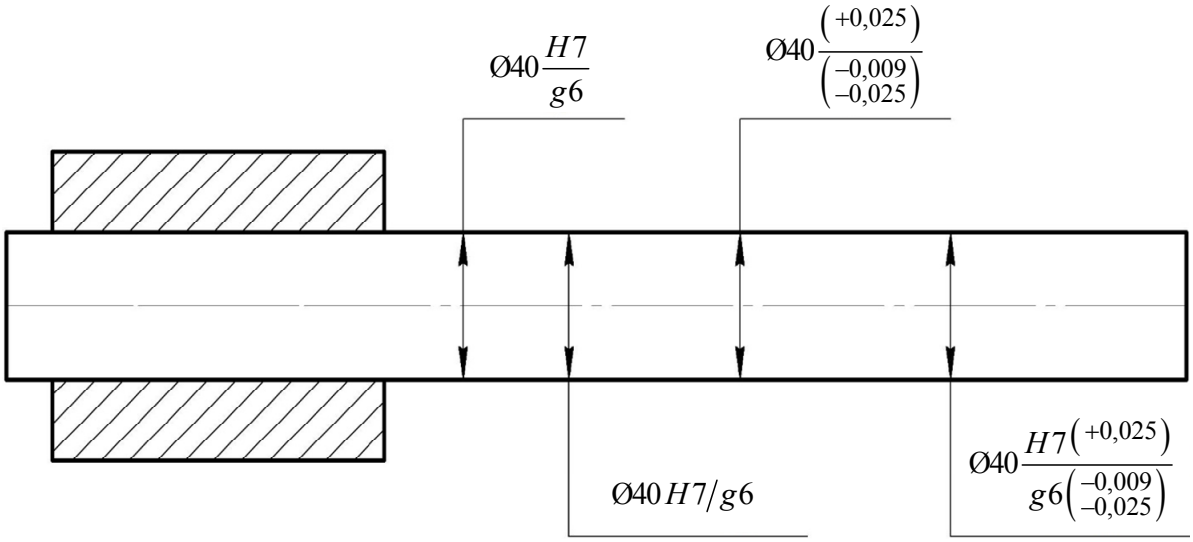


Рис. 12.10. Обозначение посадки на чертежах

На чертежах посадка обозначается дробью, в числителе которой указывается обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе – обозначение для поля допуска вала. Обозначение посадки указывается после номинального размера посадки. На рис. 12.10 указаны варианты обозначения посадки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бегун П. И., Кормилицын О. П. Прикладная механика: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Политехника, 2006.

Соляник-Красса К. В. Введение в механику деформируемого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

Титов А. В., Лысков А. И., Николаева Е. А. Олимпиадные задачи по сопротивлению материалов: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ 3
1.1. Предмет изучения прикладной механики 3
1.2. Свойства твердых тел 4
1.3. План решения основной задачи сопротивления материалов 9
1.4. Классификация внешних сил 10
1.5. Расчетные схемы элементов конструкций 13
2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ 17
2.1. Метод сечений 17
2.2. Правило знаков внутренних сил 19
2.3. Рабочая модель строения деформируемого твердого тела 21
3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА 22
3.1. Напряжения на основных площадках 22
3.2. Правило знаков напряжений. Тензор напряжений 23
3.3. Напряжения на наклонной площадке 25
3.4. Напряжения в близлежащих точках твердого тела 27
3.5. Дифференциальные уравнения равновесия 28
4. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА 30
4.1. Виды напряженного состояния в окрестности точки 31
4.2. Определение главных напряжений и положения главных площадок 32
5. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ 33
5.1. Функции перемещений точек. Начальные и текущие координаты 33
5.2. Понятие о малой и конечной деформациях 33
5.3. Относительное удлинение и относительный сдвиг. Составляющие деформации 34
5.4. Правило знаков компонентов деформации 35
5.5. Связь между компонентами деформаций и перемещений 35
5.6. Условия сплошности материала 36
5.7. Определение относительных удлинений и сдвигов 37
5.8. Главные деформации и главные оси деформаций 37
5.9. Закон Гука при осевом растяжении (сжатии) 37
5.10. Связь между составляющими деформаций и напряжений в окрестности точки тела 39

6. НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ, НАГРУЖЕННОМ ПО ТОРЦАМ 41
6.1. Условия статической эквивалентности 41
6.2. Элементарное решение дифференциальных уравнений твердого деформируемого тела 41
6.3. Геометрические характеристики сечений 43
6.4. Гипотезы прочности 49
6.5. Исследование напряжений в стержне, нагруженном по торцам 52
7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ОСНОВНЫХ СЛУЧАЕВ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ 55
7.1. Напряжения при осевом растяжении (сжатии) стержня 55
7.2. Напряжения при кручении стержня круглого поперечного сечения. Условие прочности и подбор сечений 56
7.3. Расчет напряжений при чистом сдвиге 58
7.4. Напряжения при плоском поперечном изгибе. Формула Журавского 59
7.5. Уравнение нейтральной линии. Сложный изгиб 61
7.6. Совместное действие изгиба с кручением 63
7.7. Статически неопределимые задачи 63
8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ СТЕРЖНЯ 70
8.1. Энергетические методы прикладной механики 70
8.2. Метод прямого интегрирования 71
9. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СТЕРЖНЯ УПРУГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА 75
9.1. Составляющие потенциальной энергии 75
9.2. Теорема Костильяно 76
9.3. Метод Максвелла–Мора 77
9.4. Определение перемещений при помощи интеграла Мора 77
9.5. Правило Верещагина 78
10. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ 79
10.1. Понятие о температурных напряжениях 79
10.2. Математическая модель термонапряженного состояния материала 79
10.3. Температурные напряжения в стержневых конструкциях при растяжении (сжатии) 82
10.4. Температурные напряжения в стержневых конструкциях при плоском изгибе 83
10.5. Температурные напряжения в многослойных элементах конструкций 85

11. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ 91
11.1. Основные положения 91
11.2. Расчеты на прочность и жесткость при вибрациях 93
11.3. Расчеты на жесткость и прочность при ударах 94
11.4. Общие методы повышения динамической прочности и жесткости 95
12. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ 96
12.1. Основные понятия 96
12.2. Отклонения и допуски 97
12.3. Квалитеты 99
12.4. Посадки 101
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 104

Титов Андрей Валерьевич
Николаева Елена Александровна
Кукаев Александр Сергеевич

Прикладная механика

Учебное пособие

Редактор Е. А. Ушакова

Компьютерная верстка Е. С. Рыбец

Подписано в печать 25.12.25. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 6,75.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 100 экз. Заказ 165.

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197022, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5Ф