МИНОБРНАУКИ РОСИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

А. В. ТИТОВ, А.И. ЛЫСКОВ, Е. А. НИКОЛАЕВА

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2025

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Титов А. В., Лысков А.И., Николаева Е. А.

Т45 Олимпиадные задачи по сопротивлению материалов: учеб.- метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025. 72 с.

ISBN 000-0-0000-0000-0

Содержит примеры решения задач, предлагаемых на интернет-олимпиадах по сопротивлению материалов.

Предназначено для студентов технических ВУЗов, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика».

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Рецензент канд. техн. наук Тихоненкова О. В. (СПб гос. университет аэрокосмического приборостроения).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 000-0-0000-0000-0 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор – продольную растягивающую (сжимающую) силу N_x.

При решении задач используют метод сечений, заключающийся в том, что стержень мысленно рассекается на две части, одна из частей стержня отбрасывается. В месте рассечения стержня вводят положительную внутреннюю силу N_x, которую вычисляют из условия статического равновесия стержня.

Внутренняя сила N_x является положительной , если ее направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке рассечения стержня и отрицательной, если направление внутренней силы не совпадает с направлением внешней нормали.

Различают внешние силы сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенная силы $P,(H)$ - это сила, действующие на тело по малой площадке (условно считают, – приложена в точке). Распределенные силы - это силы, действующие на части объема, поверхности или линии. Распределенные силы характеризуются интенсивностью q, т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил, $\frac{H}{м^3}$), на единицу площади (в случае поверхностных сил, $\frac{H}{м^2}$), на единицу длины (в случае действия сил по линии, $\frac{H}{м}$).

Свободное тело в пространстве может совершать три линейных перемещения (в направлении трех взаимно перпендикулярных осей системы координат) и три угловых перемещения (повороты относительно осей системы координат). Чтобы закрепить стержень на плоскости, на него следует наложить три связи, в пространстве – шесть связей. Осуществление связей на практике достигается устройством опор. Опоры бывают трех типов: шарнирно-подвижные, шарнирно-неподвижные и жесткозащемленные. Закрепление стержней в пространстве выполняется аналогично, но уже в двух плоскостях.

Статически определимыми называют задачи, которые можно решать методами статики твердого тела, т. е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия. В статически неопределимых системах невозможно определить реакции опор из уравнений статического равновесия. В этих системах число неизвестных усилий в опорах (опорных реакций) превышает количество используемых для их нахождения уравнений равновесия. Поэтому статически неопределимыми называют задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, и для решения этих задач необходимо учитывать деформации тела, обусловленные внешними нагрузками. По числу лишних неизвестных устанавливают степень статической неопределимости системы.

Тело под действием прикладываемых к нему сил меняет свои форму и размеры – деформируется. При этом изменяется относительное расположение отдельных его частиц вследствие их перемещения в пространстве. Перемещение не всегда сопровождается деформацией. Однако деформация тела невозможна без перемещения его точек. Различают два вида деформации тела: относительное удлинение в окрестности точки ε_r и относительный сдвиг $\gamma_{r_1 r_2}$.

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность нормального напряжения (σ_n) относительному удлинению (ε_r): $\sigma_n = E\varepsilon_r$. Модуль нормальной упругости (модуль Ю́нга) E (МПа) – физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться растяжению, сжатию при упругой деформации, а модулем упругости при сдвиге G – это коэффициент пропорциональности касательного напряжения и относительного сдвига.

Коэффициент Пуассона ν или μ – константа, характеризующая величину отношения относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению. Этот коэффициент зависит не от размеров тела, а от природы материала, из которого изготовлен стержень. Коэффициент Пуассона и модуль Юнга полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала.

Задача 1.1. Конструкция состоит из абсолютно жесткого элемента KC и двух упругих стержней 1 и 2 (рис.1.1). Стержень 2 изготовлен короче проектного размера на величину Δ. После сборки конструкции значение продольной силы во втором стержне $N_2 = F$. Известны величины F, l, EA. Величина первоначального зазора Δ равна ___ $\frac{Fl}{EA}$.

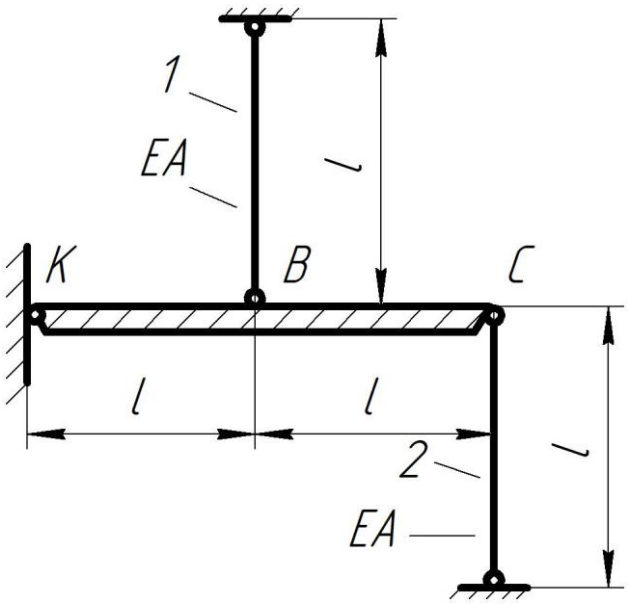


Рис.1.1. Постановка задачи

Решение. Абсолютно жесткий элемент КС расположен горизонтально; опирается на два стержня 1 и 2 шарнирно в точках В и С. Стержень 2 изготовлен короче проектного размера l на величину Δ. После сборки конструкции возникает новое положение жесткого элемента КС ввиду деформаций опорных стержней 1 и 2 (рис.1.2).

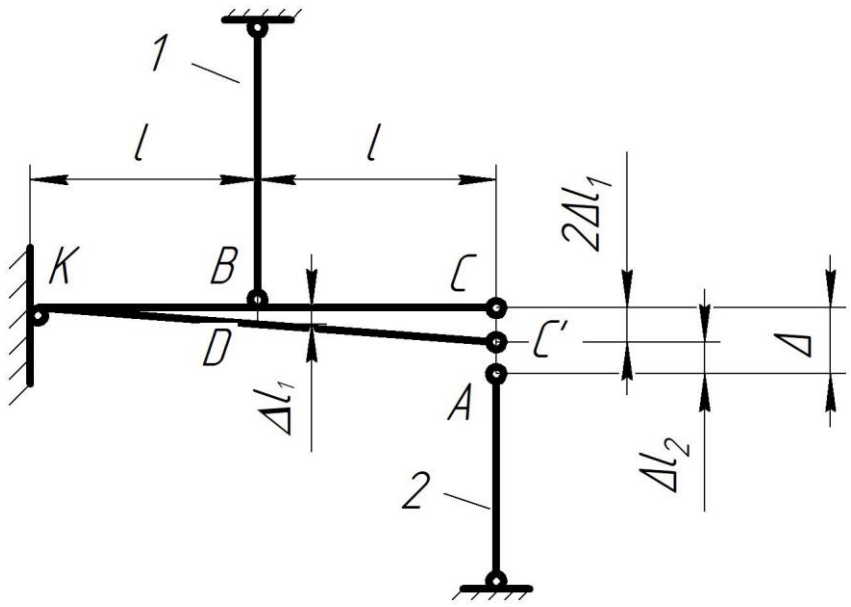


Рис.1.2. Расчетная схема

Новое положение точки С обозначено на рисунке 2 точкой C', т.е. жесткий элемент КС занимает положение КС'. В результате стержни 1 и 2 удлиняются, удлинение стержня 1 составляет Δl_1, а удлинение стержня 2 Δl_2 Первоначальный зазор Δ складывается из длин двух отрезков: $|AC'|$ и $|CC'|$. $|AC'| = \Delta l_2$, а длина отрезка $|CC'|$ определяется из подобия треугольников $\Delta KCC'$ и ΔKBD.

$$\frac{|CC'|}{|BD|} = \frac{|KC|}{|KB|} \Rightarrow |CC'| = \frac{|BD| \cdot |KC|}{|KB|} = \frac{\Delta l_1 \cdot 2l}{l} = 2\Delta l_1.$$

Тогда можно записать:

$$\Delta = 2\Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Удлинения стержней 1 и 2 определяем по закону Гука.

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A},$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A}.$$

Внутреннюю силу N_1 вычислим из условия равновесия системы (сумма моментов относительно полюса К равна нулю):

$$\Sigma M_i^k = 0,$$

т.к. стержни 1 и 2 растягиваются в противоположных направлениях, то внутренние силы N_1 и N_2 будут направлены также в противоположные стороны.

Следовательно, можно записать:

$$N_1 \cdot l - N_2 \cdot 2l = 0 \Rightarrow N_1 = 2N_2 = 2F\,.$$

Тогда:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{2F \cdot l}{EA}.$$

Теперь вычислим первоначальный зазор Δ:

$$\Delta = 2\frac{2F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = 5\frac{F \cdot l}{E \cdot A}\,.$$

Ответ: 5.

Задача 1.2. Абсолютно жесткий элемент BC подвешен на трех одинаковых стержнях (см. рис.1.3). После нагружения системы силой F продольная сила во втором стержне из-за неточности изготовления его длины оказалась равной нулю. Известны величины: $F = 27\,кН, l = 3\,м,$ $EA = 4 \cdot 10^4\,кН$. Стержень *2* был изготовлен длиннее проектного размера на _____ *мм*.

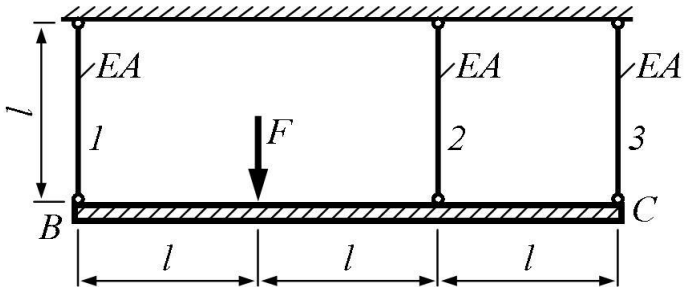


Рис.1.3. Постановка задачи

Решение. После того, как жесткий элемент ВС был нагружен силой F, в стержнях 1 и 3 появились внутренние силы N_1 и N_3, вследствие упругой деформации стержней. Стержень 2 отличается от стержней 1 и 3 тем, что он изначально был сделан длиннее, чем нужно, поэтому при сборке жесткого элемента ВС, стержень 2 пришлось силой укоротить и в нем после сборки конструкции возникла внутренняя сила N_2. Однако, после приложения к жесткому элементу силы F стержень 2 удлинился до исходных размеров и внутренняя сила N_2 стала равна нулю (рис.1.4).

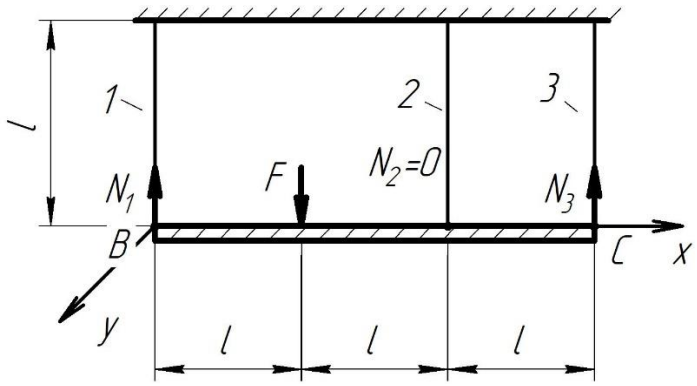


Рис.1.4. Расчетная схема

Значения продольных сил N_1 и N_3 вычислим из условий равновесия жесткого элемента BC (1.1,1.2):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{y_i}^{B} = 0, (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{y_i}^{C} = 0, (1.2)$$

где $M_{y_i}^{B}, M_{y_i}^{C}$ - изгибающие моменты относительно полюса B и C соответственно.

Силу N_3 вычислим по уравнению (1.1), а силу N_1 по уравнению (1.2):

$$1.1: \quad -F \cdot l + N_3 \cdot 3l = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{1}{3}F,$$

$$1.2: \quad -N_1 \cdot 3l + F \cdot 2l = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{2}{3}F.$$

Теперь вычислим удлинения стержней 1 и 3 по уравнениям, полученным из закона Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{2F \cdot l}{3E \cdot A} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 10^7} = \frac{54}{4} \cdot 10^{-4} = \frac{27}{2} \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{3E \cdot A} = \frac{27 \cdot 10^3 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 10^7} = \frac{27}{4} \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Изменение длины стержня 2 вычислим из геометрических соотношений (рис.1.5).

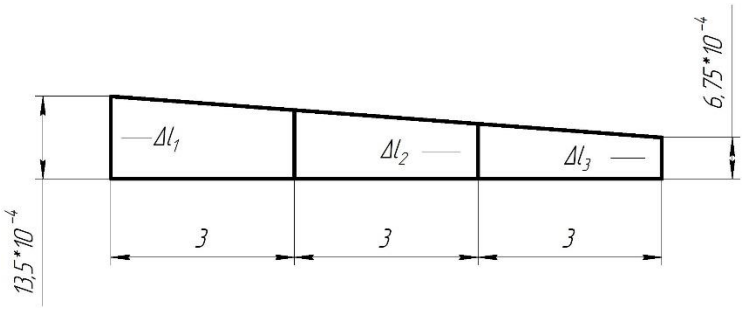


Рис.1.5. Схема для расчета изменения длины стержня 2

Вначале вычислим изменение длины стержня на единицу длины жесткого элемента.

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{9} = \frac{13{,}5 \cdot 10^{-4} - 6{,}75 \cdot 10^{-4}}{9} = \frac{6{,}75 \cdot 10^{-4}}{9} = 0{,}75 \cdot 10^{-4}\,м,$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 + 3 \cdot 0{,}75 \cdot 10^{-4} = 6{,}75 \cdot 10^{-4} + 2{,}25 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-4}\,м = 0{,}9мм.$$

Ответ: 0,9

Задача 1.3. На рисунке 1.6 показан стержень, нагруженный распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по линейному закону от нуля до q. Заданы величины: l, q, A – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала. Абсолютное удлинение стержня равно ____ $\frac{ql^2}{6EA}$.

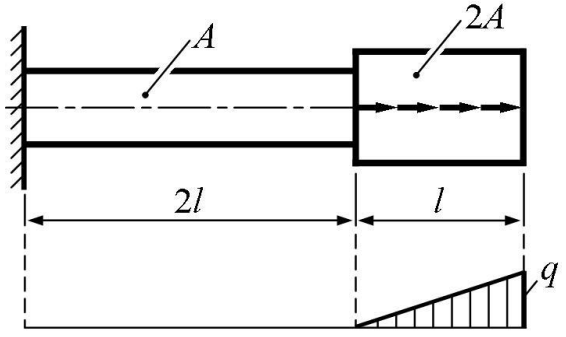


Рис.1.6. Постановка задачи

Решение. Обозначим ось 0X, реакцию в заделке, грузовые участки (рис.1.7).

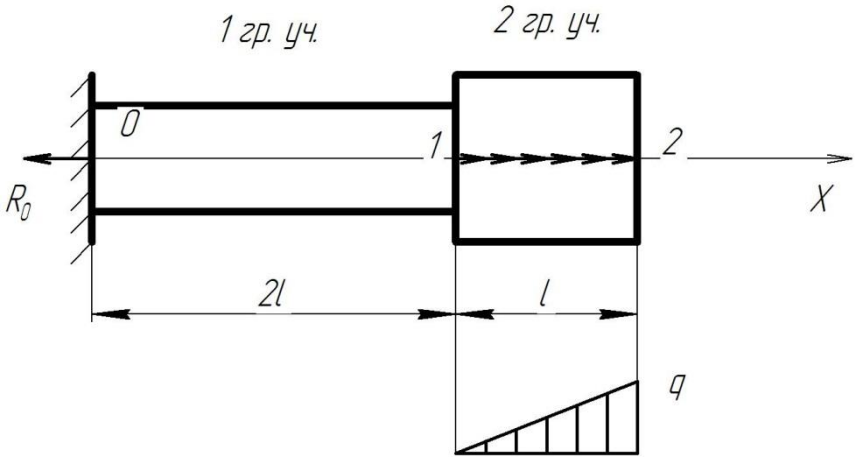


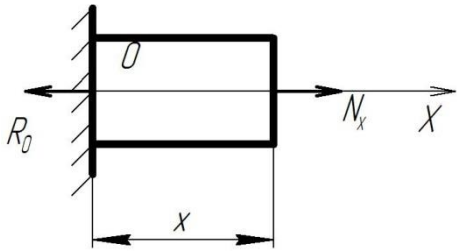
Рис.1.7. Расчетная схема

Реакцию в опоре определим из условия статического равновесия системы.

$$-R_0+\frac{1}{2}ql=0\Rightarrow R_0=\frac{1}{2}ql\,.$$

Далее вычислим внутреннюю силу N_x на 1-м и 2-м грузовых участках.

1-й грузовой участок



$$-R_0+N_x=0\Rightarrow N_x=R_0=\frac{1}{2}ql\,.$$

Рис.1.8. Расчетная схема 1-го грузового участка

2-й грузовой участок

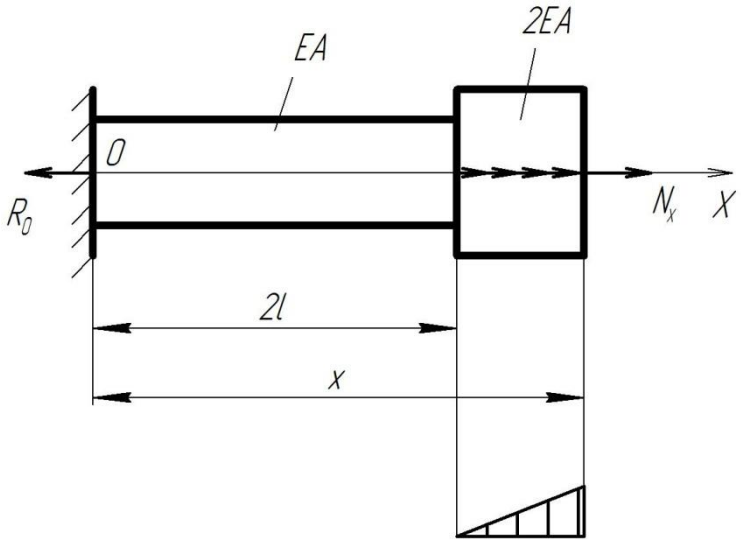


Рис.1.9. Расчетная схема 2-го грузового участка

$$-R_0 + N_x + \frac{q}{l}(x-2l)^2 = 0,$$

$$N_x = R_0 - \frac{q}{l}(x-2l)^2 = \frac{1}{2}ql - \frac{q}{l}(x-2l)^2.$$

Вычислим перемещение стержня в точке 1 (δ_1) и 2 (рис.1.7).

$$\delta_1 = \frac{1}{EA}\int_0^{2\cdot l} N(x)dx = \frac{1}{EA}\cdot\frac{1}{2}ql\cdot 2l = \frac{ql^2}{EA},$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{EA}\int_{2l}^{3l}(\frac{1}{2}ql - \frac{q}{l}(x-2l)^2)dx = \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[\int_{2l}^{3l}\frac{1}{2}qldx - \int_{2l}^{3l}\frac{q}{l}(x-2l)^2dx\right] =$$

$$= \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[\frac{1}{2}ql^2 - \frac{q}{l}\cdot\frac{(x-2l)^3}{3}\Bigg|_{2l}^{3l}\right] = \frac{ql^2}{EA} + \frac{1}{EA}\left[\frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{3}ql^2\right] =$$

$$= \frac{ql^2}{EA} + \frac{ql^2}{6EA} = \frac{7ql^2}{6EA}.$$

Ответ: 7.

Задача 1.4. На рисунке показан стержень, нагруженный силой F. Заданы величины F, l, E, A. Предел прочности материала стержня на сжатие $\sigma_{вс}$ связан с пределом прочности материала на растяжение $\sigma_{вр}$ соотношением $\sigma_{вс} = 5\sigma_{вр}$. При защемлении правого конца стержня его прочность уменьшится в ____ раз(-а).

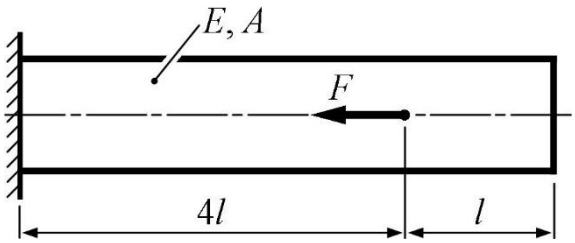


Рис.1.10. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатную ось и реакцию в заделке (рис.1.11):

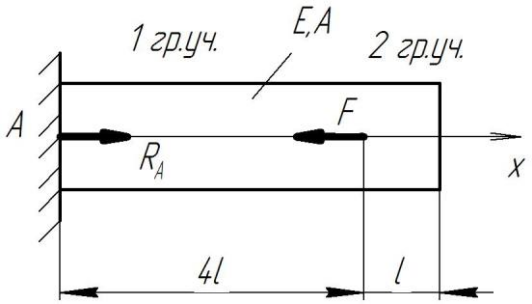


Рис.1.11. Расчетная схема

Из условия равновесия стержня вычислим реакцию в точке А (R_A), проецируя силы на ось x:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0,$$

$$R_A - F = 0 \Rightarrow R_A = F\,.$$

Вычислим значение внутренней силы N_x на первом и втором грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис.1.12)

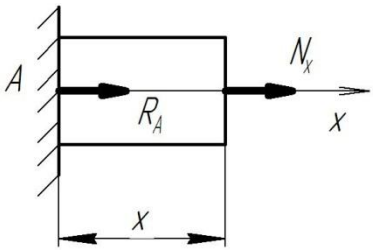


Рис.1.12. Расчетная схема первого грузового участка

Проецируем силы на ось x из условия равновесия стержня

$$R_A + N_x = 0 \Rightarrow N_x = -R_A = -F\,.$$

Второй грузовой участок (рис.1.13)

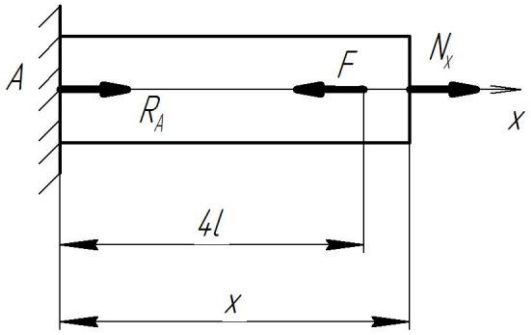


Рис.1.13. Расчетная схема второго грузового участка

$$R_A - F + N_x = 0 \Rightarrow N_x = F - R_A = F - F = 0.$$

При растяжении (сжатии) стержня возникает нормальное напряжение которое определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{N_x}{A}.$$

На первом грузовом участке возникают сжимающие нормальные напряжения $\sigma = -\frac{F}{A}$. Вычислим внутреннюю силу N_x, возникающую при защемлении правого конца стержня (рис.1.14).

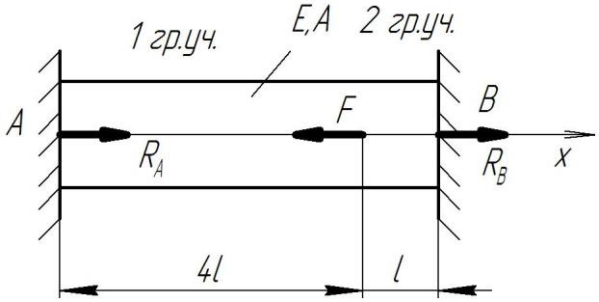


Рис.1.14. Расчетная схема стержня при защемлении правого конца

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$R_A - F + R_B = 0.$$

Задача статически неопределимая. Второе уравнение получим, используя метод перемещений. Условно отбрасываем левую заделку. В точке А стержень переместиться на δ_A, а под действием силы F перемещение составит δ_F. Т.к. на самом деле в точке А заделка существует, то суммарное перемещение стержня от действия сил R_A и F будет равно нулю.

$$\Delta l_A - \Delta l_F = 0,$$

$$\frac{R_A \cdot 5l}{EA} - \frac{Fl}{EA} = 0 \Rightarrow R_A \cdot 5l = Fl \Rightarrow R_A = \frac{F}{5},$$

$$R_B = F - R_A = F - \frac{F}{5} = \frac{4}{5}F.$$

Вычислим внутреннюю силу N_x на первом и втором грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис.1.12)

$$R_A + N_x = 0 \Rightarrow N_x = -R_A = -\frac{F}{5}.$$

На первом грузовом участке возникают сжимающие нормальные напряжения $\sigma = -\frac{F}{5A}$

Второй грузовой участок (рис.1.13)

$$R_A - F + N_x = 0 \Rightarrow N_x = F - R_A = F - \frac{F}{5} = \frac{4}{5}F.$$

На втором грузовом участке возникают растягивающие нормальные напряжения $\sigma = \frac{4F}{5A}$.

Для того, чтобы определить во сколько раз уменьшилась прочность стержня при защемлении его правого конца, сравним сжимающие напряжения на первом грузовом участке при отсутствии защемления стержня, с растягивающими напряжениями на втором грузовом участке при наличии защемления правого конца, с учетом равенства:

$$\sigma_{вс} = 5\sigma_{вр} \Rightarrow \frac{F}{A} = 5\frac{4}{5A}F.$$

Ответ: 4.

Задача 1.5. На рисунке 1.15 показан стержень, нагруженный осевой нагрузкой. Заданы величины l, EA, q. Длина стержня не изменится, когда значение силы F равно ___ ql.

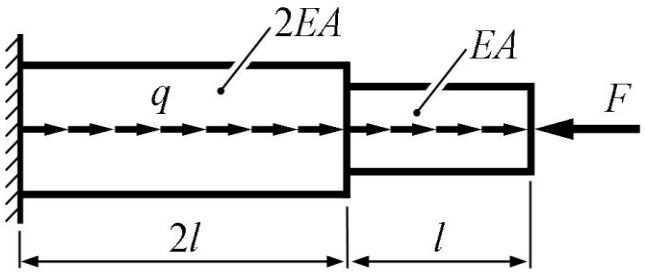


Рис.1.15. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатную ось, реакцию в заделке и грузовые участки (рис.1.16).

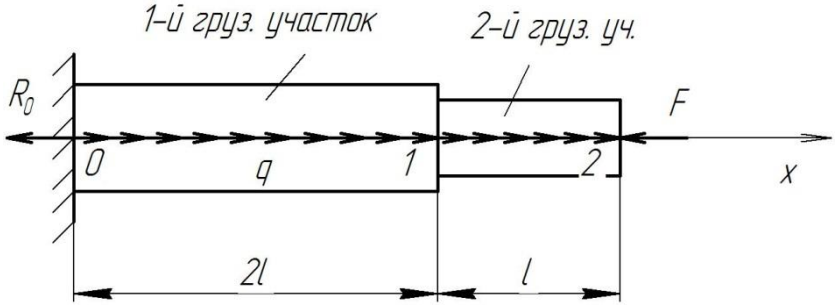


Рис.1.16. Расчетная схема

Из условия равновесия стержня, определим реакцию в заделке R_0.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0,$$

$$-R_0 + q \cdot 3l - F = 0 \Rightarrow R_0 = 3ql - F.$$

Вычислим внутреннюю силу на 1-м и 2-м грузовых участках.

1-й грузовой участок (рис.1.17):

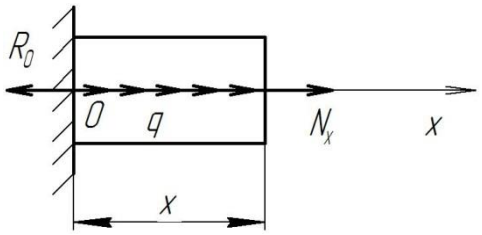


Рис.1.17. Расчетная схема 1-го грузового участка

$$-R_0 + qx + N_x = 0 \Rightarrow N_x = R_0 - qx = 3ql - F - qx,$$

$$x \in [0;2l]$$

2-й грузовой участок (рис.1.18):

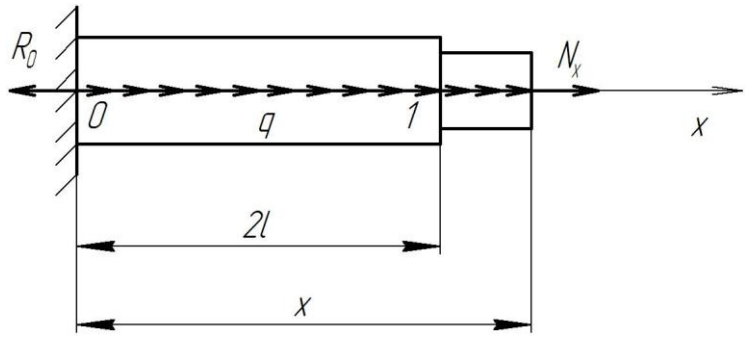


Рис.1.18. Расчетная схема 2-го грузового участка

$$-R_0 + q \cdot 2l + q(x-2l) + N_x = 0 \Rightarrow N_x = R_0 - 2ql - q(x-2l),$$

$$x \in [2l;3l],$$

$$N_x = 3ql - F - 2ql - q(x-2l) = ql - F - q(x-2l).$$

Определим перемещение стрежня в точке 1.

$$\delta_1 = \frac{1}{2EA}\int_0^{2l}(3ql - F - qx)dx = \frac{1}{2EA}\left[\int_0^{2l} 2qldx - \int_0^{2l} Fdx - \int_0^{2l} qxdx\right],$$

$$\delta_1 = \frac{1}{EA}\left[6ql^2 - 2Fl - \frac{qx^2}{2}\frac{qx^2}{2}\Big|_0^{2l}\right] = \frac{1}{EA}\left[6ql^2 - 2Fl - 2ql^2\right] = \frac{1}{2EA}[4ql^2 - 2Fl].$$

Вычислим перемещение стержня в точке 2.

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{EA}\int_{2l}^{3l}(ql - F - qx + 2ql)dx = \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[\int_{2l}^{3l} qldx - \int_{2l}^{3l} Fdx - \int_{2l}^{3l} qxdx + \int_{2l}^{3l} 2qldx\right] =$$

$$= \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[ql^2 - Fl - \frac{qx^2}{2}\Big|_{2l}^{3l} + 2ql^2\right] = \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[ql^2 - Fl - \frac{5ql^2}{2} + 2ql^2\right].$$

Из условия задачи приравняем перемещение стержня в точке 2 к нулю и вычислим значение силы F.

$$\delta_2 = \frac{1}{2EA}(4ql^2 - 2Fl) + \frac{1}{EA}(ql^2 - Fl - \frac{5ql^2}{2} + 2ql^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2EA}(4ql^2 - 2Fl) + \frac{1}{2EA}(2ql^2 - 2Fl - 5ql^2 + 4ql^2) = 0,$$

$$,4ql^2 - 2Fl + 2ql^2 - 2Fl - 5ql^2 + 4ql^2 = 0$$

$$5ql^2 = 2Fl + 2Fl = 4Fl \Rightarrow F = \frac{5}{4}ql = 1{,}25ql\,.$$

Ответ: 1,25.

Задача 1.6. На рисунке 1.19 показана шарнирно-стержневая система. Элемент BC абсолютно жесткий. Под действием силы F точка C получила полное перемещение $\delta = 0{,}4\,мм$. Известны величины: $l = 1\,м$, $A = 2\,см^2$, $E = 2\cdot 10^5\,МПа$. Значение силы F равно ____ $кН$.

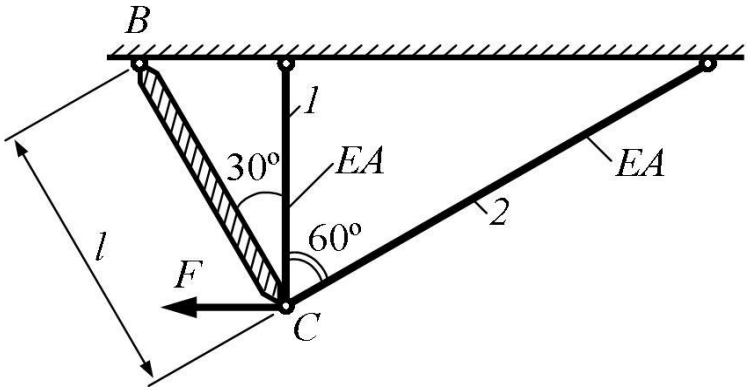


Рис.1.19. Постановка задачи

Решение. Абсолютная жесткость элемента BC, означает, что этот элемент не деформируется, в отличие от стержней 1 и2. В результате действия силы F точка C получает полное перемещение δ, при этом происходит растяжение стержней 1 и 2. Так как перемещение δ мало, то можно записать следующее приближенное равенство:

$$\delta \approx \Delta l_2\,, (1.3)$$

где Δl_2 - удлинение стержня 2 (рис.1.20).

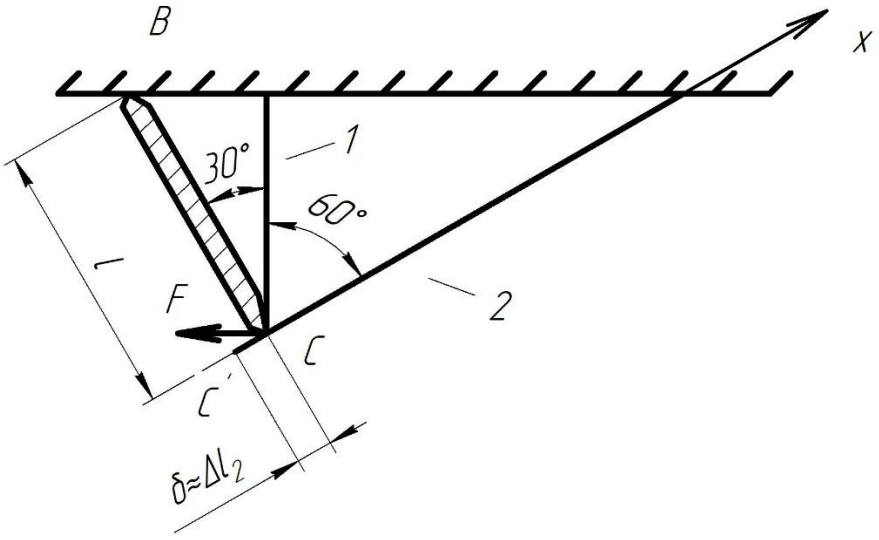


Рис.1.20. Расчетная схема

Далее запишем уравнение для определения удлинения стержня 2 по закону Гука:

$$\delta \approx \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A}, (1.4)$$

где N_2 - внутренняя сила в стержне 2;

l_2 - длина стержня 2;

E - модуль нормальной упругости;

A - площадь поперечного сечения стержня 2.

Тогда можно записать:

$$N_2 \approx \frac{\delta \cdot E \cdot A}{l_2}, (1.4a).$$

Длину стержня 2 (l_2) вычислим из тригонометрических соотношений треугольников.

$$l_1 = l \cdot \cos 30^\circ, (1.5)$$

где l_1 - длина стержня 1.

$$l_1 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} м,$$

$$l_2 \cdot \cos 60^\circ = l_1 \Rightarrow l_2 = \frac{l_1}{\cos 60^\circ}, (1.6)$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}, м.$$

Тогда:

$$N_2 \approx \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} = \frac{16 \cdot 10^3}{\sqrt{3}}, H.$$

Для того, чтобы определить значение силы F рассматриваем условие равновесия стержня 2 (1.7).

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, (1.7).$$

Проецируем силы на ось X:

$$-F \cdot \cos 30^\circ + N_1 \cdot \cos 60^\circ + N_2 = 0, (1.8)$$

где N_1 - внутренняя сила в стержне 1.

Для расчета силы N_1 используем закон Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} \Rightarrow N_1 = \frac{E \cdot A \cdot \Delta l_1}{l_1}, (1.9).$$

Для определения изменения длины стержня $1 (\Delta l_1)$ рассмотрим схему перемещения точки С (рис.1.21):

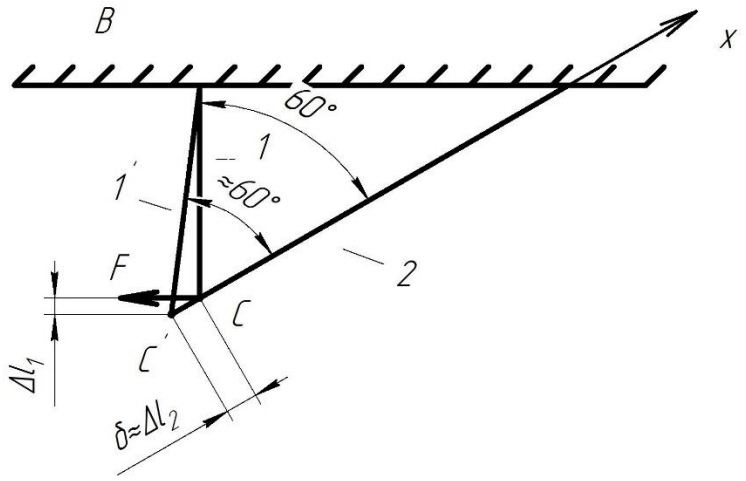


Рис.1.21. Схема перемещения точки С

Под действием силы F точка С займет новое положение C', но так как перемещения являются бесконечно-малыми, то угол между стержнями 1 и 2 остается равным 60 градусов. Тогда Δl_1 можно вычислить из тригонометрических соотношений.

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 10^{-4}\, м\,.$$

Тогда:

$$N_1 = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{16 \cdot 10^3}{\sqrt{3}},$$

$$F \cdot \cos 30^\circ = N_1 \cdot \cos 60^\circ + N_2 =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{16 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} = \frac{8 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} = \frac{24 \cdot 10^3}{\sqrt{3}},$$

$$F = \frac{24 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{48 \cdot 10^3}{3} = 16 \cdot 10^3, H\,.$$

Ответ: 16.

2. КРУЧЕНИЕ И СДВИГ

Кручением называют такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент, т. е. силовой фактор, вызывающий круговое перемещение сечения относительно оси, перпендикулярной этому сечению, либо препятствующий такому перемещению. Другими словами – деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных его оси приложить пару или пары сил.

Сдвигом (срезом) называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила. На сдвиг работают заклепки, болты шарнирных соединений, цапфы крепления стоек шасси, пальцы соединения тяг, поршневые пальцы, стенки лонжеронов крыла и др. элементы конструкций. Простейшим примером сдвига является резание ножницами. При сдвиге поперечные сечения бруса смещаются, оставаясь в параллельных плоскостях.

При кручении возникает внутренняя сила, крутящий момент M_x, который является положительным, когда пара сил стремится вращать брус против часовой стрелки, если смотреть с конца стрелки внешней нормали, проведенной на площадке рассечения бруса и отрицательным, когда пара сил стремится вращать брус по часовой стрелке, если смотреть с конца стрелки внешней нормали, проведенной на площадке рассечения бруса.

Различают моменты сил сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенный момент $M_x,(Н \cdot м)$ - это момент, действующий на тело по малой площадке (условно считают – приложен в точке). Распределенные моменты – это моменты, действующие на части объема, поверхности или линии. Распределенные моменты характеризуются интенсивностью m, т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил, $\frac{Н \cdot м}{м^3}$), на единицу площади (в случае поверхностных сил, $\frac{Н \cdot м}{м^2}$), на единицу длины (в случае действия сил по линии, $\frac{Н \cdot м}{м}$).

Модуль сдвига (G, МПа) — физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться сдвиговой деформации.

Задача № 2.1. На рис. 2.1 показан стержень круглого поперечного сечения, жестко защемленный по концам. Интенсивность распределенного момента по длине стержня изменяется по линейному закону – от нуля до m. Заданы величины G, I_ρ, l, m. Угол поворота среднего сечения стержня по абсолютной величине равен $\frac{ml^2}{GI_\rho}$.

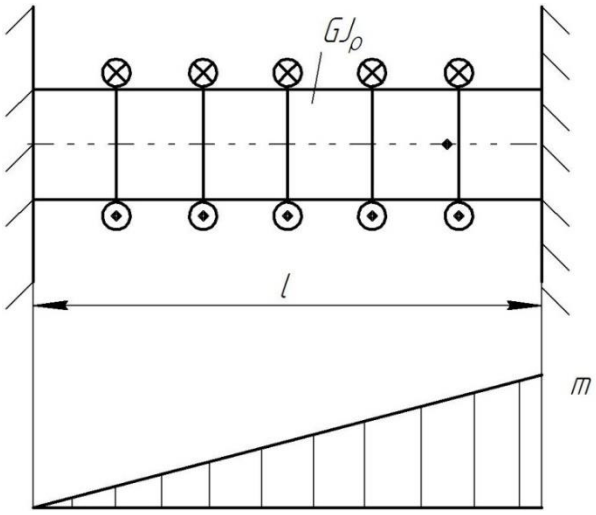


Рис. 2.1. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатную ось и реакции в заделках (рис. 2.2).

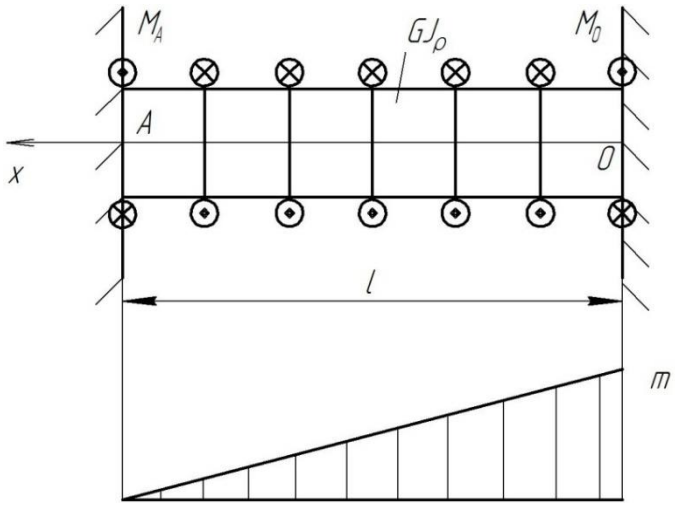


Рис.2.2. Расчетная схема задачи 2.1

Составим уравнение равновесия стержня.

$$-M_A + \frac{1}{2}ml - M_B = 0.$$

В одном уравнении два неизвестных параметра M_A, M_B. Задача является статически неопределимой. Для решения задачи необходимо составить второе уравнение, используя метод перемещений. Представим, что отсутствует левая заделка. Тогда поворот стержня в точке А обозначим φ_{M_A}, а поворот стержня от действия распределенного момента φ_m. Сумма этих углов поворота равна нулю, т.к. слева и справа на самом деле есть заделки.

$$\varphi_{M_A} + \varphi_m = 0,$$

$$\frac{1}{GJ_\rho}\left[-M_A l + \frac{1}{2} m l^2\right] = 0 \Rightarrow M_A = \frac{1}{2} m l.$$

Определим момент внутренних сил M_x.

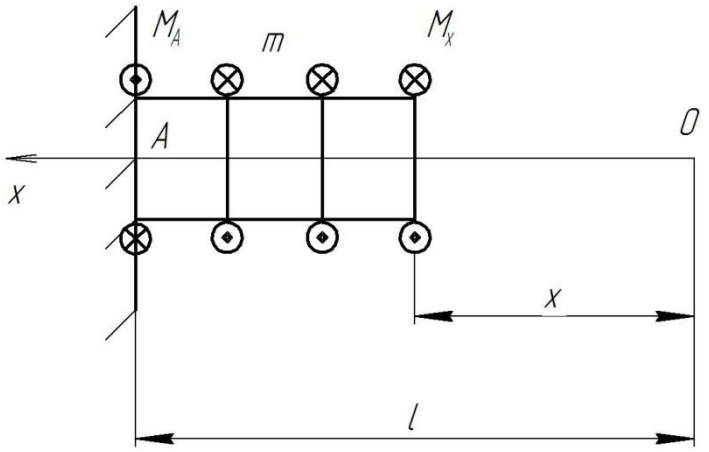


Рис.2.3. Расчетная схема грузового участка

Запишем уравнение равновесия грузового участка

$$-M_A + m(l-x) + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M_A - m(l-x) = \frac{1}{2} m l - m(l-x).$$

Теперь определим угол поворота среднего сечения стержня. Т.к. в середине стержня распределенный момент равен $\frac{m}{2}$, то это значение подставляем в уравнение.

$$\varphi = \frac{1}{GJ_\rho}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{m}{2} l - \frac{m}{2} l + \frac{m}{2} x\right)dx = \frac{1}{GJ_\rho}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(-\frac{ml}{4} + \frac{m}{2} x\right)dx = \frac{1}{GJ_\rho}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{ml}{4} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{m}{2} x dx\right],$$

$$\varphi = \frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{4}ml\frac{l}{2}+\frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{l}{2}}\right]=\frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{8}ml^2+\frac{m}{4}\frac{l^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{8}ml^2+\frac{1}{16}ml^2\right]=\frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{2}{16}ml^2+\frac{1}{16}ml^2\right]=-\frac{1}{16}\frac{ml^2}{GJ_\rho}=-0{,}0625\frac{ml^2}{GJ_\rho}.$$

Ответ: 0,0625 $\frac{ml^2}{GI_\rho}$.

Задача 2.2. Круглый стержень, показанный на рисунке 2.4, жестко защемлен по концам и нагружен двумя моментами со значением M. Все три участка стержня будут равнопрочными, когда коэффициент k равен …

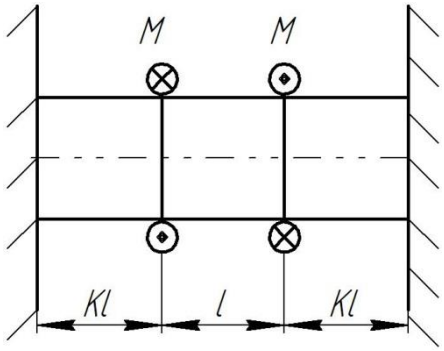


Рис.2.4. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатную ось, реакции в заделках и грузовые участки (рис.2.5).

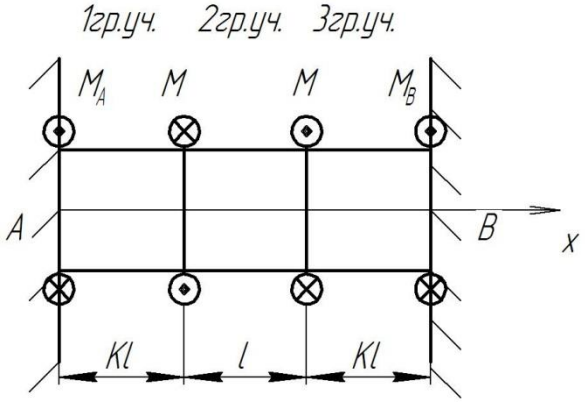


Рис.2.5. Расчетная схема

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A - M + M + M_B = 0 \Rightarrow M_A = -M_B .$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A и двух моментов M (рис.2.6).

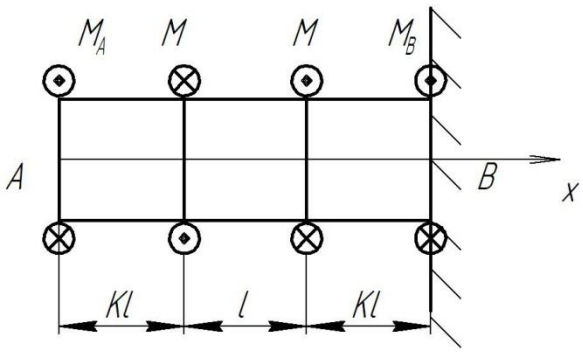


Рис.2.6. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов должна быть равна нулю.

$$\varphi_A + \varphi_M^1 + \varphi_M^2 = 0,$$

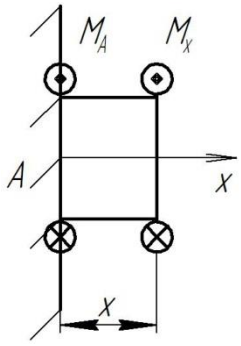
$$M_A(kl + l + kl) - M(kl + l) + Mkl = 0 \Leftrightarrow 2M_A kl + M_A l - Mkl - Ml + Mkl = 0,$$

$$M_A(2kl + l) = Ml \Rightarrow M_A = \frac{Ml}{2kl + l} = \frac{Ml}{l(2k+1)} = \frac{M}{2k+1},$$

$$M_B = -\frac{M}{2k+1}.$$

Теперь рассчитаем крутящий момент внутренних сил M_x последовательно на трех грузовых участках.

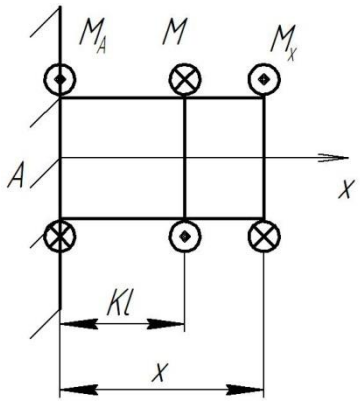
Первый грузовой участок (рис.2.7)



$$M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{M}{2k+1}.$$

Рис.2.7. Расчетная схема первого грузового участка

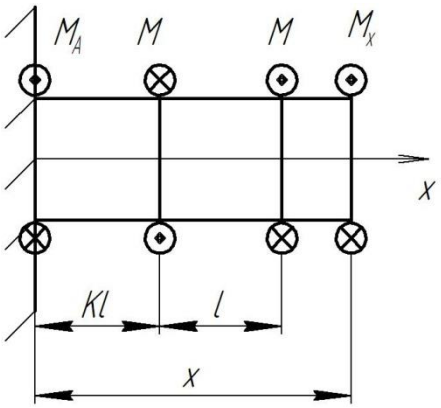
Второй грузовой участок (рис.2.8)



$$M_A - M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M - M_A = M - \frac{M}{2k+1}.$$

Рис.2.8. Расчетная схема второго грузового участка

Третий грузовой участок (рис.2.9)



$$M_A - M + M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{M}{2k+1}.$$

Рис.2.9. Расчетная схема третьего грузового участка

Участки стержня равнопрочны, если выполняется условие:

$$\left|\tau_{1гр.уч.}\right| = \left|\tau_{2гр.уч.}\right| = \left|\tau_{3гр.уч.}\right|,$$

$$\left|\tau_{гр.уч._i}\right| = \frac{|M_{xi}|}{W_k},$$

$$\frac{M}{2k+1} = M - \frac{M}{2k+1} \Rightarrow \frac{2M}{2k+1} = M \Rightarrow 2M = M(2k+1) = 2Mk + M \Rightarrow$$
$$2 = 2k + 1 \Rightarrow 1 = 2k \Rightarrow k = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 2.3. На рисунке 2.10 показан стержень круглого поперечного сечения, жестко защемленный по концам. Сечение C после нагружения стержня моментом M поворачивается на угол $\varphi_C = 0{,}01\,рад$. Известны величины: $d = 4см,\ \ l = 16см,\ \ G = 8 \cdot 10^4\,МПа,\ \ \tau_т = 120МПа$ – предел текучести материала стержня при чистом сдвиге. Коэффициент запаса прочности стержня равен …

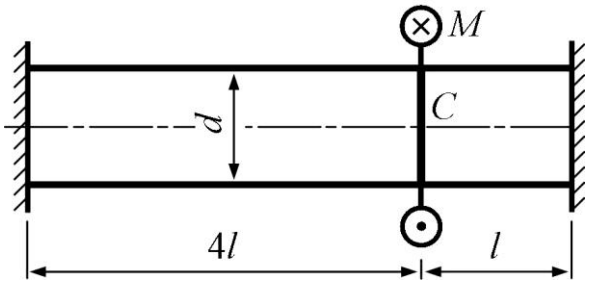


Рис.2.10. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатную ось, реакции в заделках и грузовые участки (рис.2.11).

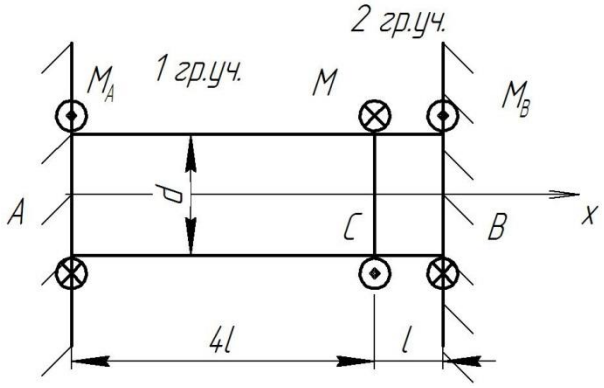


Рис.2.11. Расчетная схема

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A - M + M_B = 0, \text{ (2.1)}.$$

Вычислим значение момента М в сечении С.

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A и M (рис.2.12).

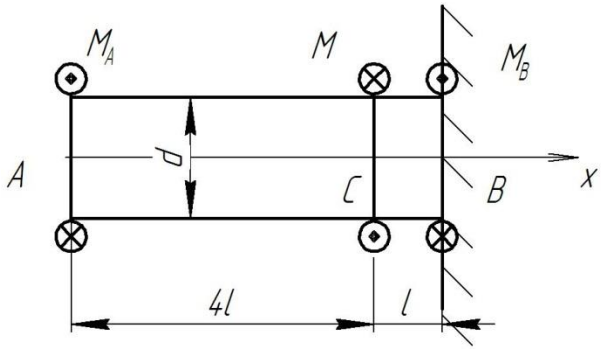


Рис.2.12. Расчетная схема метода перемещений

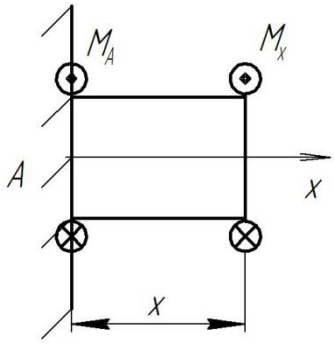
Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов сил будет равна нулю.

$$\varphi_A - \varphi_C = 0 \Rightarrow \frac{M_A \cdot 5l}{GJ_\rho} - \frac{Ml}{GJ_\rho} = 0 \Rightarrow M_A \cdot 5l = Ml \Rightarrow M_A = \frac{M}{5},$$

$$M_B = M - M_A = M - \frac{M}{5} = \frac{4}{5}M.$$

Теперь рассчитаем крутящий момент внутренних сил M_x последовательно на двух грузовых участках.

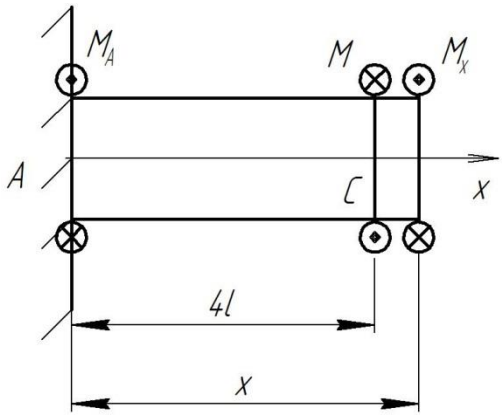
Первый грузовой участок (рис.2.13)



$$M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{M}{5}.$$

Рис.2.13. Расчетная схема первого грузового участка

Второй грузовой участок (рис.2.14)



$$M_A - M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M - \frac{M}{5} = \frac{4}{5}M.$$

Рис.2.14. Расчетная схема второго грузового участка

Запишем уравнение для расчета угла поворота стержня в точке С.

$$\varphi_c = \int_0^{4l} \frac{M_x dx}{G \cdot J_\rho} = -\frac{M \cdot 4l}{5 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 25{,}12 \cdot 10^{-8}} = -\frac{M \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10^2 \cdot 25{,}12} = 0{,}01,$$

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14(4 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 256 \cdot 10^{-8}}{32} = 25{,}12 \cdot 10^{-8}\ м^4.$$

Выразим чему равен момент M в точке С.

$$M = -\frac{0{,}01 \cdot 40 \cdot 10^2 \cdot 25{,}12}{4 \cdot 16 \cdot 10^{-2}} = -0{,}157 \cdot 10^4 = -1570 H \cdot м.$$

Рассчитаем значение наибольшего касательного напряжения.

$$\tau_{x_{\max}} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_k} = \frac{|4M| \cdot 16}{5\pi d^3} = \frac{4 \cdot 1570 \cdot 16}{5 \cdot 3{,}14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^3} = \frac{4 \cdot 1570 \cdot 16}{5 \cdot 3{,}14 \cdot 64 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 100 \cdot 10^6 \frac{H}{м^2}.$$

За предельно допустимое касательное напряжение $[\tau]$ принимаем значение предела текучести материала стержня при чистом сдвиге.

Коэффициент запаса прочности стержня вычислим используя равенство:

$$\tau_{x_{\max}} = \frac{[\tau]}{n} \Rightarrow n = \frac{[\tau]}{\tau_{x_{\max}}} = \frac{100}{80} = 1{,}2\,.$$

Ответ: 1,2.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Задача 3.1 На рисунке 3.1 показан равносторонний треугольник. Размер b задан. Осевой момент инерции треугольника относительно оси z равен ____ $\frac{\sqrt{3}\,b^4}{96}$.

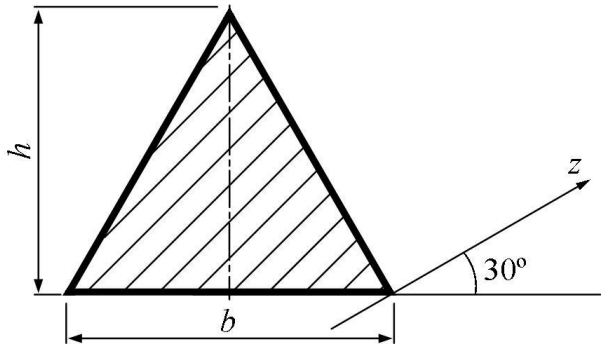


Рис.3.1. Постановка задачи

Решение. На рис.3.2 приведена расчетная схема задачи

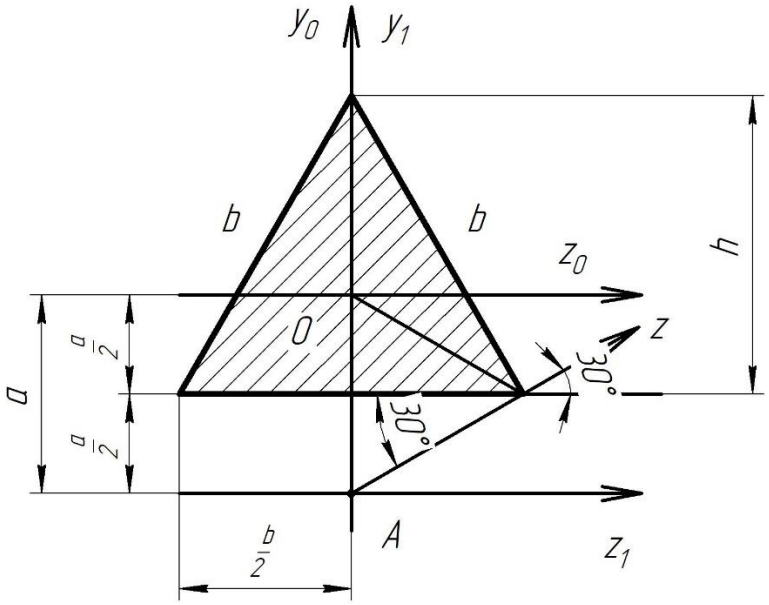


Рис.3.2. Расчетная схема

Отметим центр тяжести треугольного сечения (точку 0). Точка 0 лежит на оси симметрии сечения, на расстоянии $\frac{1}{3}h$ от нижнего основания треугольника. Оси $0z_0, 0y_0$ проходят через центр тяжести сечения и называются центральными осями. Осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, называются центральными моментами инерции. Для треугольного сечения определяются по формулам:

$$J_{y_0} = \frac{h \cdot b^3}{48},$$

$$J_{z_0} = \frac{b \cdot h^3}{36}.$$

Выразим высоту h треугольного сечения через сторону b, используя теорему Пифагора.

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

Выразим центральные моменты инерции через длину стороны треугольного сечения b.

$$J_{z_0} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{b}{36} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}b^3 = \frac{\sqrt{3}}{96}b^4,$$

$$J_{y_0} = \frac{h \cdot b^3}{48} = \frac{\sqrt{3}}{2}b \cdot \frac{b^3}{48} = \frac{\sqrt{3}}{96}b^4.$$

Продлим ось z влево до пересечения с осью y_0 (точка А). Т.к. угол между осью z и основанием треугольника составляет 30°, то расстояние от центральной оси z_0 до основания треугольника равно расстоянию от основания треугольника до точки А. Обозначим это расстояние $\frac{a}{2}$. Через точку А проведем систему координат Az_1y_1. Ось z_1 параллельно оси z_0 на расстоянии a, а ось y_2 совпадает с осью y_0. Теперь вычислим осевой момент инерции треугольного сечения относительно оси z_1 по формуле:

$$J_{z_1} = J_{z_0} + a^2 \cdot F,$$

где a - расстояние от центральной оси z_0 до оси z_1;

F - площадь треугольного сечения.

Вычислим площадь треугольного сечения и выразим ее через параметр b

$$F = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2.$$

Выразим расстояние a через длину стороны треугольного сечения b, используя следующую зависимость:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}b \Rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{1}{\sqrt{3}}b.$$

Тогда можно записать:

$$J_{z_1} = J_{z_0} + a^2 \cdot F = \frac{\sqrt{3}}{96} b^4 + \frac{b^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = \sqrt{3} b^4 (\frac{1}{96} + \frac{1}{12}) = \frac{9}{96} \cdot \sqrt{3} b^4.$$

Ось z проходит через точку А и повернута относительно оси z_1 против часовой стрелки на угол $\alpha = 30^\circ$.Тогда осевой момент инерции относительно оси z вычислим по формуле:

$$J_z = J_{z_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \sin^2 \alpha + J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha,$$

где $J_{z_1 y_1}$ - центробежный момент инерции.

$$J_{y_1} = J_{y_0}.$$

Центробежный момент инерции равен нулю, если хотя бы одна из координатных осей является осью симметрии сечения. В нашем случае координатная ось y_1 является осью симметрии треугольного сечения, следовательно $J_{z_1 y_1} = 0$.

Тогда можно записать

$$J_z = \frac{9}{96} \cdot \sqrt{3} b^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{96} b^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{96} b^4 (\frac{27}{4} + \frac{1}{4}) = 7 \frac{\sqrt{3}}{96} b^4.$$

Ответ: 7 .

Задача 3.2. На рисунке 3.3 показана фигура, составленная из двух кругов диаметрами $d = 2 см.$ Осевой момент инерции фигуры относительно оси u равен ____ $\pi \, см^4$.

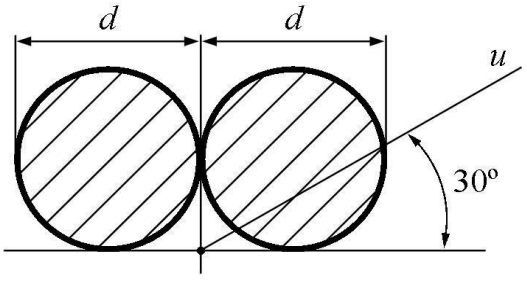


Рис.3.3. Постановка задачи

Решение. Обозначим координатные оси x, y , проходящие через точку 0_3 ,от которой на рисунке 3.3 задано направление u, а также центральные оси инерции каждого круга в отдельности (x_{0_1}, y_{0_1}), (x_{0_2}, y_{0_2}) и фигуры в целом (x_0, y_0) рис.3.4.

Примечание. Центральные оси инерции – это оси, проходящие через центр тяжести сечения.

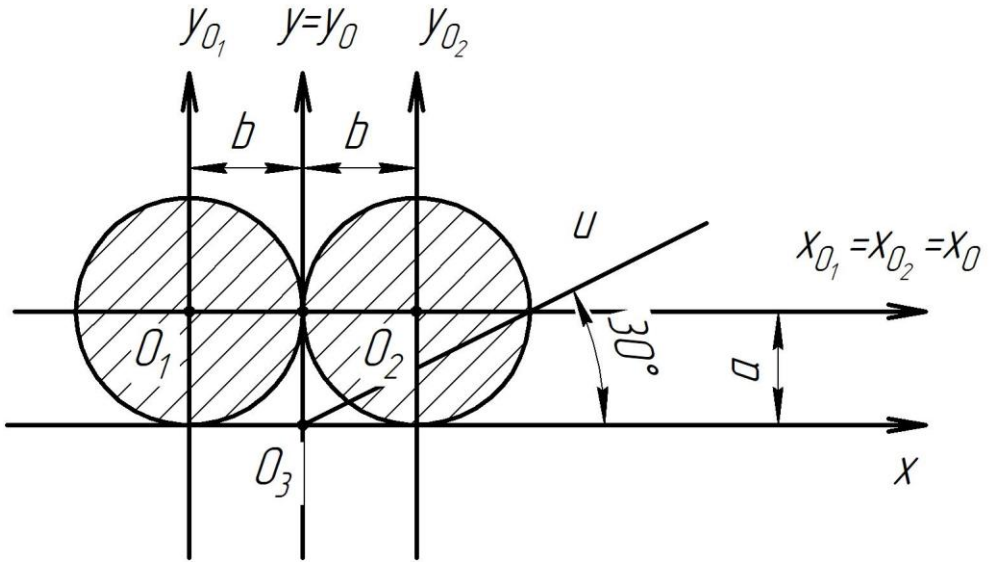


Рис.3.4. Расчетная схема

Для вычисления момента инерции относительно оси y, в общем случае используется формула (3.1):

$$J_y = J_{y_{0_1}} + b^2 \cdot F, (3.1)$$

где $J_{y_{01}}$ - центральный момент инерции круга относительно оси y_{0_1};

b – расстояние от оси y до оси y_{0_1};

F - площадь круга.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что фигура составлена из двух кругов, поэтому правая часть уравнения (3.1) должна быть умножена на два:

$$J_y = 2 \cdot (J_{y_{0_1}} + b^2 \cdot F), (3.1а).$$

Для сечения в форме круга $J_{0_{y1}} = J_{0x1} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$.

Из условия задачи следует, что: $b = R$; $F = \pi \cdot R^2$.

$$J_y = 2(\frac{\pi \cdot R^4}{4} + R^2 \cdot \pi \cdot R^2) = 2(\frac{\pi \cdot R^4}{4} + \pi \cdot R^4) = \frac{5\pi \cdot R^4}{2}.$$

Вычислим осевой момент инерции относительно оси x, J_x по формуле:

$$J_x = 2(J_{x_{0_1}} + a^2 \cdot F), (3.2)$$

где J_{x0_1} - центральный момент инерции круга относительно оси x ;

a - расстояние от оси x до оси x_{0_1}.

Из условия задачи следует, что: $a = R$. Тогда:

$$J_x = 2(\frac{\pi \cdot R^4}{4} + R^2 \cdot \pi \cdot R^2) = \frac{\pi \cdot R^4}{2} + 2\pi \cdot R^4.$$

При повороте координатных осей (рис.3.5) осуществляется преобразование моментов инерции в соответствии с формулами (3.3-3.6)

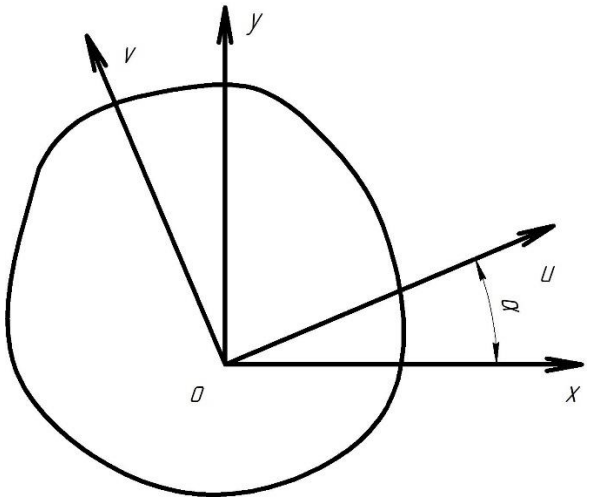


Рис.3.5. Поворот координатных осей

$$J_u = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \text{ ,(3.3)}$$

$$J_v = J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \text{ ,(3.4)}$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{xy} \cdot \cos 2\alpha \text{ ,(3.5)}$$

$$J_u + J_v = J_x + J_y \text{ ,(3.6).}$$

Момент инерции фигуры относительно оси u вычислим по формуле:

$$J_u = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha \text{ ,(3.7)}$$

где J_{xy}- центробежный момент инерции относительно осей x, y ;

α - угол наклона оси u к оси x.

Центробежный момент инерции равен нулю, если, хотя бы одна из координатных осей является осью симметрии сечения. В нашем случае координатная ось y является осью симметрии сечения, следовательно, $J_{xy} = 0$. Тогда

$$J_u = \frac{5\pi \cdot R^4}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5\pi \cdot R^4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15\pi \cdot R^4}{8} + \frac{5\pi \cdot R^4}{8} = \frac{20\pi \cdot R^4}{8} =$$

$$= 2{,}5\pi \cdot R^4.$$

Ответ: 2,5.

4. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Расчетные зависимости:

Растяжение (сжатие)

Площадки перпендикулярные оси стержня (ось x) являются главными. Нормальные напряжения вдоль оси x:

$$\sigma_x = \frac{N}{F},$$

где N - Продольная внутренняя сила (вдоль оси x);

F - площадь поперечного сечения стержня.

Расчет нормальных и касательных напряжений на площадке, расположенной под углом α к оси x.

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha\,;\ \tau_{nk} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha\,.$$

Расчет главных напряжений:

$$\sigma_{1,3} = 0{,}5(\sigma_x \pm |\sigma_x|)\,.$$

Кручение

В стержне, испытывающем деформацию кручения, в поперечных сечениях возникают касательные напряжения:

$$\tau_x = \frac{M_x}{W_k}, W_k = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}},$$

где W_k - момент сопротивления при кручении, $м^3$;

J_ρ -полярный момент инерции, $м^4$;

$\rho_{\max}$ - максимальное расстояние от оси стержня до наружной поверхности, м.

Плоский поперечный изгиб

Нормальные напряжения вдоль оси x:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{W_y}, W_y = \frac{J_y}{z_{\max}},$$

где M_y - изгибающий момент;

W_y - момент сопротивления относительно оси y;

J_y - осевой момент инерции относительно оси y;

$z_{\max}$ - максимальное расстояние от оси стержня до наружной поверхности по оси z, м.

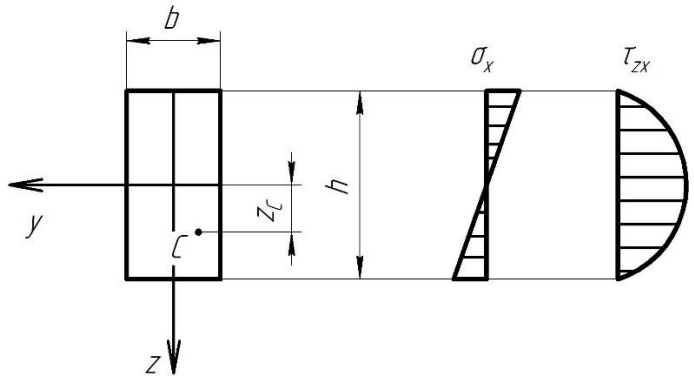


Рис.4.1. Эпюры напряжений в процессе плоского поперечного изгиба.

Расчет напряжения в точке C опасного сечения:

$$\sigma_x = \frac{M_{yc}}{J_y} \cdot z_c,$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y^*}{b_z \cdot J_y},$$

где Q_z - поперечная сила;

S_y^* - статический момент относительно оси y;

b_z - ширина заготовки, соответствующая на координате z_c.

Для прямоугольного сечения

$$S_y^* = \frac{b \cdot h^2}{8}\left[1 - (\frac{2z}{h})^2\right].$$

Наибольшего значения касательные напряжения достигают на нейтральной линии, где z=0:

$\tau_{zx\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh}$ - для прямоугольного сечения,

$$\tau_{zx\max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{\pi \cdot R^2}$$ - для круглого сечения.

С учетом касательных напряжений при плоском поперечном изгибе главные напряжения (они являются наибольшими нормальными напряжениями в точке тела) определяются выражением:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x + 4\tau_{xz}}\right].$$

Расчет напряжений, составляющих угол α с осью x:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha.$$

Положение главных площадок определяют по формуле:

$$tg2\beta = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x}; 2\beta = arctg(-\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x}); \beta_2 = \beta_1 + 90^\circ.$$

Если в некоторой точке тела известны главные напряжения, то нормальные и касательные напряжения на произвольно ориентированной площадке, проведенной через эту точку, можно выразить через главные напряжения:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha,$$

$$\tau_{nk} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Касательные напряжения будут максимальными при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. на площадках, составляющих угол 45° с главными площадками. При этом:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}.$$

Напряженное состояние в точке деформированного тела полностью определяется тензором напряжений T_σ.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{pmatrix}.$$

При этом $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx}$.

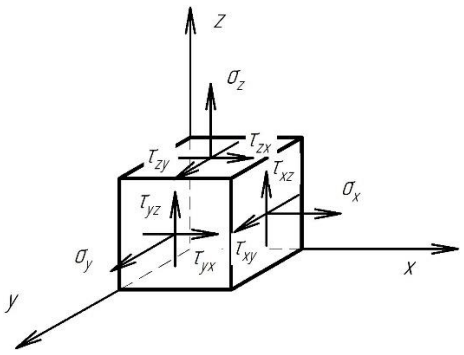


Рис.4.2. Напряжения на основных площадках.

Гипотезы (теории) прочности

Теория первая (для хрупких материалов)

$$\sigma_1 \le \frac{\sigma_{в.р.}}{n} \quad \text{или} \quad \sigma_1 \le [\sigma]_p,$$

где $[\sigma]_p$ - допускаемое напряжение на растяжение;

$\sigma_{в.р.}$ - временное сопротивление на растяжение;

n - коэффициент запаса.

Теория вторая (для хрупких материалов)

$$\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]_p,$$

где ν - коэффициент Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{попер.}}{\varepsilon_{прод.}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right|.$$

В случае простого одноосного сжатия, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 \ne 0$ условие прочности имеет вид:

$$\nu \cdot \sigma_3 \le [\sigma]_p.$$

Связь между временным сопротивлением при растяжении и сжатии определяется равенством:

$$\nu \cdot \sigma_{в.сж.} = \sigma_{в.р.}$$

Теория третья (для пластичных материалов)

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma],$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Четвертая третья (для пластичных материалов):

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \le [\sigma].$$

В сплошной однородной и изотропной среде связь между напряжениями и деформациями описывается с помощью закона Гука. Для линейного напряженного состояния при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности, закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

где ε - относительная линейная деформация по направлению действия напряжения σ;

E - модуль нормальной упругости, Па.

Закон Гука, для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3), \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu \cdot \sigma_1),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ - главные деформации;

ν - коэффициент Пуассона. $\nu = \left| \frac{\varepsilon_{попер.}}{\varepsilon_{прод.}} \right| = \left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right|$.

В случае объемного напряженного состояния, когда наряду с нормальными напряжениями σ, действую касательные напряжения τ закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, Па.

В случае объемного напряженного состояния, для главных площадок закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)].$$

В процессе упругой деформации происходит изменение объема тела. Относительное изменение объема тела вычисляется по формуле:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - относительная линейная деформация вдоль осей OX,OY,OZ соответственно.

Задача 4.1. На рисунке 4.3 показан сплошной цилиндр, установленный на гладкой поверхности. Заданы величины: h – высота, A – площадь поперечного сечения, γ, E, $\mu = 0{,}25$ – удельный вес, модуль упругости, коэффициент Пуассона материала цилиндра. Силы трения при расчете не учитывать. Абсолютное изменение объема цилиндра под воздействием собственного веса без учета знака равно ___ $\frac{\gamma A h^2}{E}$.

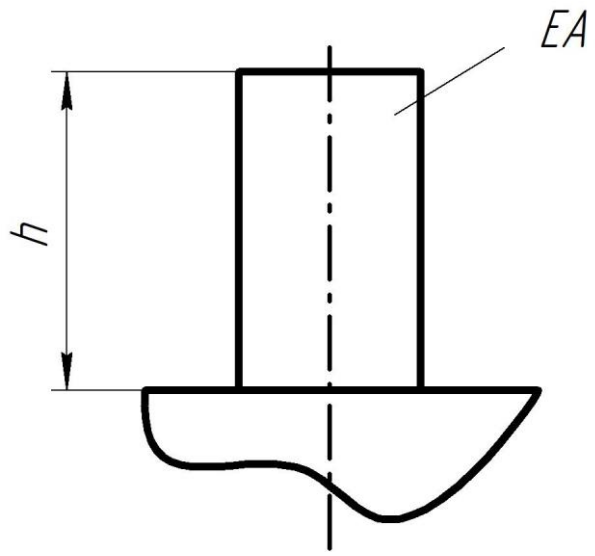


Рис.4.3. Постановка задачи

Решение. Относительное изменение объема цилиндра определяется по формуле:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - относительная линейная деформация вдоль осей OX,OY,OZ соответственно.

Удельный вес γ - это отношение веса P к объему V, занимаемому веществом в пространстве, размерность $\gamma(\frac{H}{м^3})$.

Относительная деформация ε_x определяется по формуле:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta h}{h},$$

где Δh - абсолютное изменение высоты цилиндра(мм).

Этот параметр определяется по закону Гука:

$$\Delta h = \frac{N \cdot h}{E \cdot A},$$

где N - осевая сила (Н).

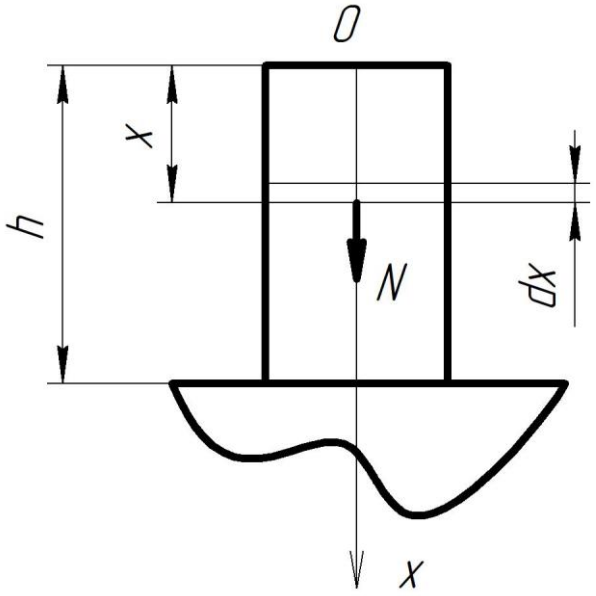


Рис.4.4. Расчетная схема

Абсолютное изменение высоты цилиндра Δh вычислим по формуле:

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\gamma \cdot A \cdot x}{E \cdot A} dx = \int_0^h \frac{\gamma \cdot x}{E} dx = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\gamma \cdot h^2}{2E}.$$

Для того, чтобы диск высотой dx сохранял форму должно быть выполнено условие:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \cdot \varepsilon_x.$$

Тогда относительное изменение объема сплошного цилиндра равно:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x - \mu \cdot \varepsilon_x - \mu \cdot \varepsilon_x = \varepsilon_x(1-2\mu) = \varepsilon_x(1-2\cdot 0{,}25) = 0{,}5\varepsilon_x,$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0{,}5\varepsilon_x = 0{,}5\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{2}\frac{\gamma \cdot h^2}{2E \cdot h} = \frac{\gamma \cdot h}{4E}.$$

Тогда можно записать:

$$\Delta V = \frac{\gamma \cdot h}{4E} \cdot V.$$

Объем сплошного цилиндра определяется по формуле:

$$V = A \cdot h.$$

Тогда абсолютное изменение объема сплошного цилиндра равно:

$$\Delta V = \frac{\gamma \cdot h}{4E} \cdot A \cdot h = 0{,}25\frac{\gamma \cdot A \cdot h^2}{E}.$$

Ответ: 0,25

Задача 4.2. На рисунке 4.5 показаны два одинаковых стержня круглого поперечного сечения диаметром d, изготовленные из хрупкого материала. Задана величина: $\sigma_{вр} = 0{,}25\sigma_{вс}$, где $\sigma_{вр}$ и $\sigma_{вс}$ – пределы прочности материала стержней при растяжении и сжатии. Коэффициенты запаса прочности стержней равны, когда отношение $\frac{M_1}{M_2}$ равно …

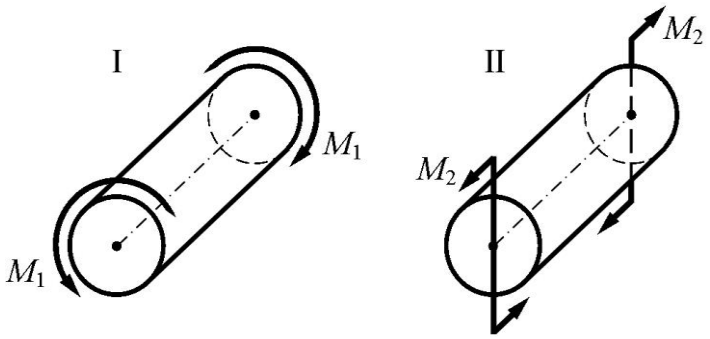


Рис.4.5. Постановка задачи

Решение. Для решения задачи используем теории прочности. Для хрупких материалов применяются первая и вторая теории прочности. В первой теории прочности утверждается, что разрушение в точке возникает, когда наибольшее нормальное напряжение в ней является растягивающим и достигает определенного для данного материала значения. Математическая запись первой теории прочности:

$$\sigma_1 \le \frac{\sigma_{в.р.}}{n} = [\sigma]_p, \quad (4.1)$$

где σ_1 - наибольшее главное нормальное напряжение;

$\sigma_{в.р.}$ - временное сопротивление при растяжении;

n - коэффициент запаса;

$[\sigma]_p$ - предельно допустимое напряжение при растяжении.

Во второй теории прочности утверждается, что хрупкое разрушение в точке возможно при $\varepsilon_1 > 0$, когда оно достигает характерного для материала критического значения.

В общем случае условие прочности имеет вид:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]_p, \text{ (4.2)}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные компоненты деформации;

ν - коэффициент Пуассона.

Также справедлива следующая зависимость:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \nu) \cdot \tau_x = \sigma_{оп}, \text{ (4.3)}$$

где τ_x - касательное напряжение;

$\sigma_{оп}$ - опасное напряжение.

Из уравнения (5.3) можно записать:

$$\tau_x = \frac{\sigma_{оп}}{1 + \nu}, \text{(4.3а).}$$

Связь между временным сопротивлением при растяжении $\sigma_{в.р.}$ и сжатии $\sigma_{в.сж.}$ определяется равенством:

$$\sigma_{в.р.} = \nu \cdot \sigma_{в.сж.}, \text{ (4.4).}$$

Из уравнения (4.4) и условия задачи следует, что ν=0,25.

Напишем уравнения для определения опасного напряжения $\sigma_{оп}$ при кручении и изгибе стержня.

При кручении стержня $\sigma_{оп} = \tau_x^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_k}$, (4.5)

где $\tau_x^{\max}$ - наибольшие касательные напряжения;

$M_x^{\max}$ - наибольший крутящий момент;

W_k - момент сопротивления при кручении.

Для стержня круглого сечения диаметром d, момент сопротивления равен:

$$W_k = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, (4.6).$$

В соответствии со схемой, представленной на рис.5.1 обозначим:

$$M_x^{\max} = M_I .$$

При изгибе стержня $\sigma_{on} = \sigma_x^{\max} = \frac{M_y^{\max}}{W_y}$,(4.7)

где $\sigma_x^{\max}$ - наибольшие нормальные напряжения при изгибе;

$M_y^{\max}$ - наибольший изгибающий момент;

W_y - момент сопротивления при изгибе вокруг оси у.

Для стержня круглого сечения диаметром d, момент сопротивления равен:

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32},(4.8).$$

Из уравнений (4.4) и (4.6) следует:

$$W_k = 2W_y,(4.9).$$

В соответствии со схемой, представленной на рис.5.1 обозначим:

$$M_y^{\max} = M_{II} .$$

Условие прочности при кручении стержня имеет вид:

$$[\sigma]_p \geq \frac{\tau_x^{\max}}{n_I} = \frac{M_I}{W_k} \Rightarrow M_I = \frac{\tau_x^{\max} \cdot W_k}{n_I} = \frac{\sigma_{on} \cdot 2W_y}{(1+\nu) \cdot n_I} = \frac{\sigma_{on} \cdot 2W_y}{1{,}25 n_I},(4.10)$$

где n_I - коэффициент запаса при кручении стержня.

Условие прочности при изгибе стержня:

$$[\sigma]_p \geq \frac{\sigma_x^{\max}}{n_{II}} = \frac{M_{II}}{W_y} \Rightarrow M_{II} = \frac{\sigma_x^{\max} \cdot W_y}{n_{II}} = \frac{\sigma_{on} \cdot W_y}{n_{II}} ,(4.11)$$

где n_{II} -коэффициент запаса при изгибе стержня.

Полагая в уравнениях (4.10) и (4.11) $n_I = n_{II}$ вычислим соотношение моментов:

$$\frac{M_I}{M_{II}} = \frac{\sigma_{on} \cdot 2W_y \cdot n_{II}}{1{,}25 n_{II} \cdot \sigma_{on} \cdot W_y} = \frac{2}{1{,}25} = 1{,}6 .$$

Ответ: 1,6.

Задача 4.3

Цилиндрическое тело помещено без зазора в жесткую обойму и нагружено равномерно распределенной по площади сжимающей нагрузкой интенсивностью p (см. рис.4.6). Деформация тела происходит в пределах упругости. Силы трения в расчетах не учитывать. Заданы величины: p, E, h, $\mu = 0{,}2$ – коэффициент Пуассона материала тела. Высота цилиндра после нагружения уменьшится по абсолютной величине на ___ $\frac{p\,h}{E}$.

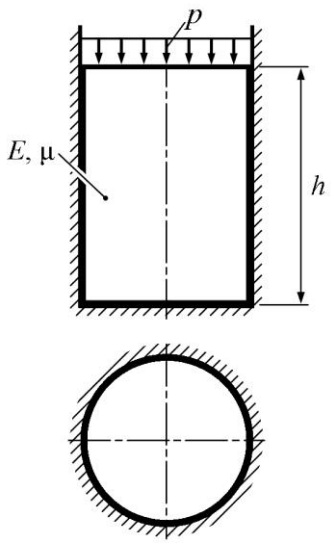


Рис.4.6. Постановка задачи

Решение. По условию задачи возникает объемная схема напряженного состояния. Нарисуем декартову систему координат (XYZ).

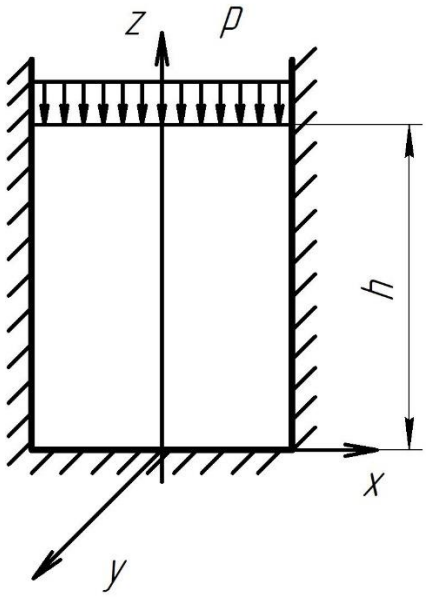


Рис.4.7. Расчетная схема

По условию задачи силы трения учитывать не надо, следовательно, касательные напряжения равны нулю. Тогда в соответствии с законом Гука можно записать следующие уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)),(4.12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)),(4.13)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)),(4.14).$$

Упругая деформация возникает только в направлении координатной оси z ($\varepsilon_z \neq 0$, а в направлении координатных осей x и y деформация равна нулю, т.к. материал помещен в жесткую обойму $(\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0)$.

Нормальные напряжения в направлении оси z равны p $(\sigma_z = p)$, а в направлении осей x и y нормальные напряжения равны между собой $(\sigma_x = \sigma_y)$.

Запишем уравнение (4.13) приняв, $\varepsilon_y = 0$, $\sigma_y = \sigma_x$, $\sigma_z = p$.

$$0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_x + p)) \Rightarrow \sigma_x - \mu \cdot \sigma_x - \mu \cdot p = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_x(1 - 0{,}2) = 0{,}2p \Rightarrow 0{,}8\sigma_x = 0{,}2p \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 0{,}25p.$$

Теперь можно рассчитать деформацию в направлении оси z, ε_z

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(p - \mu(0{,}25p + 0{,}25p)) = \frac{1}{E}(p - \mu \cdot 0{,}5p) = \frac{p}{E}(1 - 0{,}5\mu) =$$

$$= \frac{p}{E}(1 - 0{,}5 \cdot 0{,}2) = \frac{0{,}9p}{E}.$$

Компонент деформации ε_z также можно вычислить по следующей формуле: $\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h}$,где Δh - изменение (уменьшение) высоты цилиндра.

Тогда можно записать:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}9p}{E} \Rightarrow \Delta h = \frac{0{,}9p \cdot h}{E}.$$

Ответ: 0,9.

Задача 4.4. На рисунке показано объемное напряженное состояние в точке. Материал изотропный с упругими характеристиками: модуль упругости материала $E = 1 \cdot 10^5$ *МПа*, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}25$. Для заданного напряженного состояния значение максимальной линейной деформации равно …

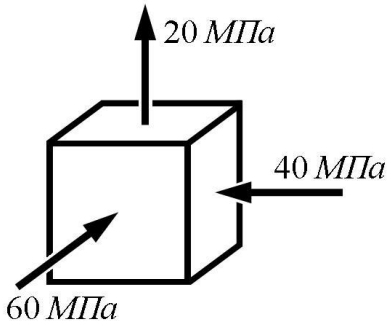


Рис.4.8. Постановка задачи

Решение. Обозначим систему координат 0XYZ

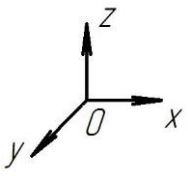


Рис.4.9. Прямоугольная система координат

Расчетные формулы:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right],$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1\cdot 10^5}\left[40 - 0{,}25(60+20)\right] = \frac{1}{1\cdot 10^5}\left[40 - 0{,}25\cdot 80\right] = \frac{1}{1\cdot 10^5}(40-20) =$$

$$= \frac{20}{100000} = 0{,}0002,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{1\cdot 10^5}\left[60 - 0{,}25(20+40)\right] = \frac{1}{10^5}\left[60 - 0{,}25\cdot 60\right] = \frac{1}{10^5}(60-15) =$$

$$= \frac{45}{100000} = 0{,}00045,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{10^5}\left[20 - 0{,}25(60+40)\right] = \frac{1}{10^5}\left[20 - 0{,}25\cdot 100\right] = \frac{1}{10^5}(20-25) =$$

$$= -\frac{5}{10^5} = -0{,}00005.$$

Ответ: 0,00045.

5. ПРЯМОЙ ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Задача 5.1. К балке CD прикреплен абсолютно жесткий вертикальный стержень CK (рис.5.1). Система нагружена силой F. Известны величины: $F = 0{,}003\,МН$, $l = 1\,м$, $EI = 0{,}2\,МН\,м^2$. Перемещение точки K по абсолютной величине равно ____ $см$.

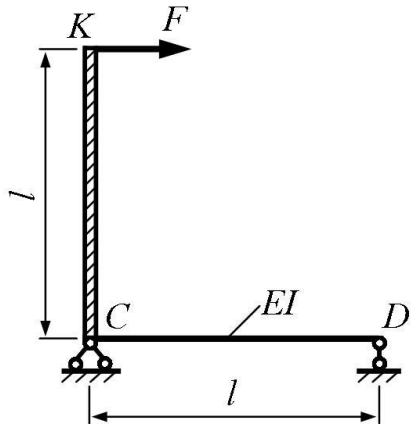


Рис.5.1. Постановка задачи

Решение. Обозначим оси декартовой системы координат и реакции в опорах (рис.5.2).

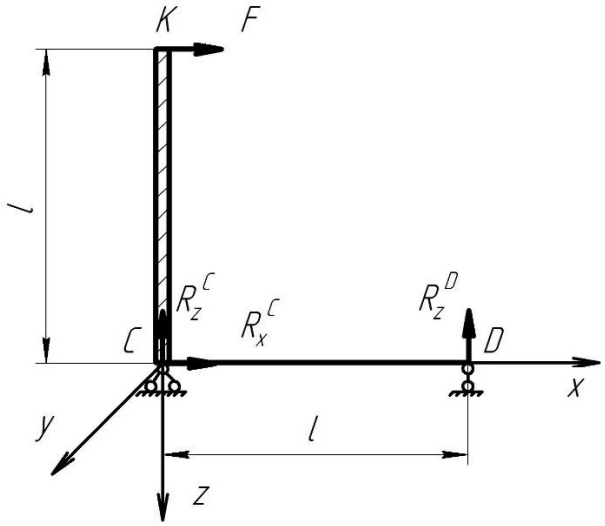


Рис.5.2. Расчетная схема

Из условий равновесия системы (5.1-5.3) вычислим реакции в опорах.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0\,, \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0\,, \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy}^{c} = 0\,, (5.3)$$

Из уравнения (5.1): $F + R_x^c = 0 \Rightarrow R_x^c = -F$.

Из уравнения (5.2): $R_z^C + R_z^D = 0$.

Из уравнения (5.3): $-F \cdot l + R_z^D \cdot l = 0 \Rightarrow R_z^D = F$.

Из уравнения (5.2): $R_z^C = -R_z^D = -F$.

Перемещение точки К Δ_K может быть вычислено по зависимости (5.4):

$$\Delta_K \approx l \cdot \theta_{ck}\,, (5.4)$$

где $\theta_{ск}$ - угол поворота жесткого стержня СК.

Задачу решаем с помощью метода прямого интегрирования.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = M_y\,, (5.5)$$

Балка CD состоит из одного грузового участка, для которого запишем уравнение изгибающего момента $M_y^{0_1}$ (рис.5.3)

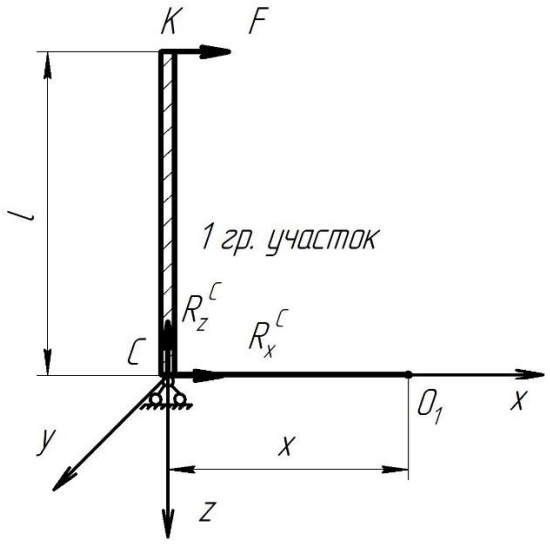


Рис.5.3. Расчетная схема 1-го грузового участка

$$M_y^{0_1} = -R_z^c \cdot x - F \cdot l = F \cdot x - F \cdot l\,.$$

Полученное выражение подставляем в уравнение (5.5).

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_y}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \cdot F(x - l)\,, (5.5а).$$

Математическое соотношение (11.5а) проинтегрируем два раза.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{EJ_y}\int F(x-l)dx = \frac{F}{EJ}(\frac{x^2}{2} - x \cdot l) + C\,, (5.6).$$

Выражение (5.6) – это уравнение угла поворота изогнутой оси балки CD.

C – постоянная интегрирования.

$$z = \int\left[\frac{F}{EJ}(\frac{x^2}{2} - x \cdot l) + C\right]dx = \frac{F}{EJ}(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \cdot l}{2}) + C \cdot x + D\,, (5.7).$$

Выражение (5.7) – это уравнение изогнутой оси балки CD.

D – постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования C и D вычислим из граничных условий.

Первое граничное условие:

При $x = 0 \;\; z = 0$.

Подставляем первое граничное условие в уравнение (5.7) и получаем, что $D = 0$.

Второе граничное условие:

При $x = l \;\; z = 0$.

Подставляем второе граничное условие в уравнение (5.7), чтобы определить постоянную интегрирования C.

$$0 = \frac{F}{EJ}(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2}) + C \cdot l \Rightarrow C \cdot l = -\frac{F}{EJ}(\frac{l^3}{6} - \frac{3l^3}{6}) \Rightarrow C = -\frac{F}{EJ} \cdot \frac{(l^2 - 3l^2)}{6}.$$

По условию задачи необходимо определить поворот оси балки CD в точке C. Поэтому полученное выражение для постоянной интегрирования C подставляем в уравнение (5.6), полагая x=0.

$$\theta_{ck} = \frac{dz}{dx} = -\frac{F}{EJ} \cdot \frac{(l^2 - 3l^2)}{6} = -\frac{0{,}003 МН}{0{,}2 МН \cdot м^2} \cdot \frac{(1-3)м^2}{6} = \frac{0{,}003 \cdot 2}{0{,}2 \cdot 6} = 0{,}005\,.$$

Тогда перемещение точки вычислим по формуле (5.4):

$$\Delta_K \approx l \cdot \theta_{ck} = 1 \cdot 0{,}005 = 0{,}005 м = 0{,}5 см\,.$$

Ответ: 0,5.

Задача 5.2.На рисунке 5.4 показана консольная балка, нагруженная силой F. Площадь ω, ограниченная упругой линией балки под действием силы F, равна ____ $\frac{Fl^4}{EI}$.

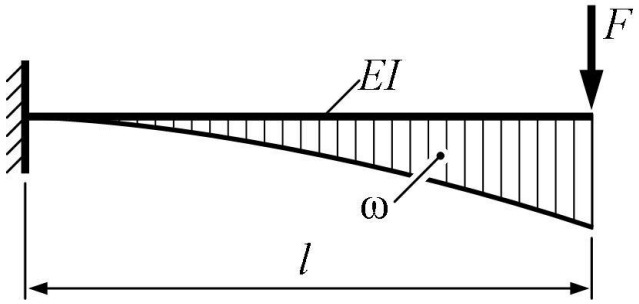


Рис.5.4. Постановка задачи

Решение. Задача решается методом прямого интегрирования. Обозначим оси системы координат и реакции в заделке (рис.5.5)

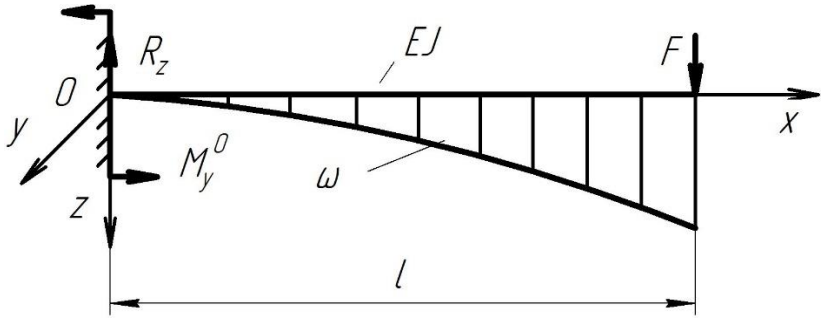


Рис.5.5. Расчетная схема

Уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$EJ\frac{d^2z}{dx^2} = M \text{ ,(5.8)}$$

где $z = z(x)$ - уравнение изогнутой оси балки после деформации;

$M = M_y$- изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки;

EJ - жесткость балки на изгиб.

Вначале рассчитаем реакции в жесткой заделке R_z и M_y^0 из условий равновесия балки (5.9),(5.10).

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 0 \text{ , (5.9)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \text{ ,(5.10).}$$

В соответствии с условием (5.9) получим следующее выражение:

$$-R_z + F = 0 \Rightarrow R_z = F \text{ .}$$

Теперь рассмотрим условие равенство нулю суммы моментов относительно полюса 0.

$$M_y^0 - F \cdot l = 0 \Rightarrow M_y^0 = F \cdot l .$$

На расчетной схеме (5.5) есть только один грузовой участок, для которого запишем уравнение изгибающего момента $M_y^{0_1}$ (рис.5.6).

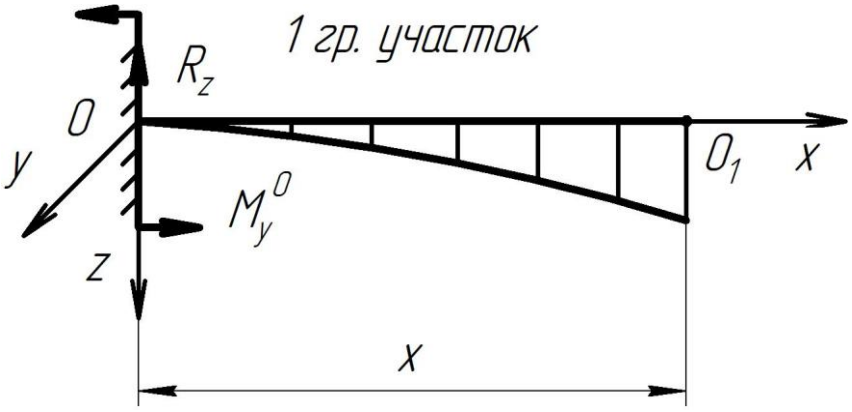


Рис.5.6. Расчетная схема 1-го грузового участка.

$$M_y^{0_1} = M_y^0 \cdot x^0 - R_z \cdot x, \text{ (5.11).}$$

При записи закона изменения изгибающего момента сосредоточенный момент $M_y^{0_1}$ необходимо брать с плечом в степени ноль x^0.

В соответствии с уравнением (5.8) можно записать:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_y^{0_1}}{EJ}, \text{ (5.8а).}$$

Математическое выражение (5.8а) проинтегрируем 1 раз. Результатом интегрирования будет являться уравнение угла поворота балки $y' = \varphi$.

$$\varphi = z' = \frac{dz}{dx} = \int \frac{M_y^{0_1}}{EJ} dx + C, \text{ (5.12)}$$

где С – постоянная интегрирования.

Интегрируем уравнение (5.11):

$$\varphi = z' = \frac{1}{EJ} \cdot \left[F \cdot l \cdot x - F \cdot \frac{x^2}{2} \right] + C, \text{ (5.13).}$$

Постоянную интегрирования С, вычислим из граничных условий.

При $x = 0 \quad \varphi = 0$. Следовательно, $C = 0$.

Математическое выражение (15.13) проинтегрируем еще раз и получим уравнение линейного перемещения произвольного поперечного сечения балки.

$$z = \frac{1}{EJ}\int\left[F \cdot l \cdot x - F \cdot \frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{F}{EJ}\left[l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + D\,, \quad (5.14)$$

где D - постоянная интегрирования, которую вычислим из граничных условий.

При $x = 0$ $z = 0$. Следовательно, $D = 0$.

Для того, чтобы определить площадь ω,ограниченную упругой линией балки под действием силы F, необходимо уравнение (5.14) проинтегрировать по длине балки l.

$$\omega = \int_l z dx\,,$$

$$\omega = \frac{F}{EJ}\int_l\left[l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]dx = \frac{F}{EJ}\left[\frac{l \cdot x^3}{6}\Big|_0^l - \frac{x^4}{24}\Big|_0^l\right] =$$

$$= \frac{F}{EJ}\left[\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{24}\right] = \frac{F}{EJ}\left[\frac{4l^4}{24} - \frac{l^4}{24}\right] = \frac{F \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{3}{24} = 0{,}125\frac{F \cdot l^4}{EJ}.$$

Ответ: 0,125.

Задача 5.3. На рисунке 5.7 показана балка, состоящая из двух стержней, соединенных шарниром C. Известны величины: $EI = 0{,}2\,МН\,м^2$, $F = 0{,}002\,МН$, $l = 1\,м$. Максимальный прогиб балки по абсолютной величине равен ___ $см$.

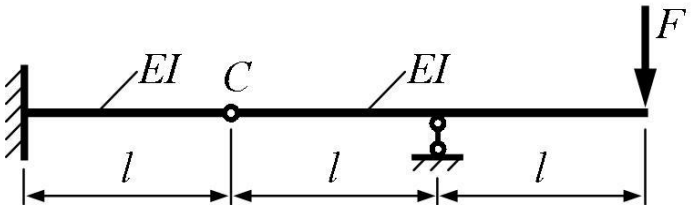


Рис.5.7. Постановка задачи

Решение. Под действием силы F, направленной вниз, в точке B, балка с учетом заделки и шарнирно-подвижной опоры поднимется наверх в точке С. Определим на какую величину поднимется балка в точке С.

В шарнире C обозначим две силы F равные по величине и противоположные по направлению (рис. 5.8).

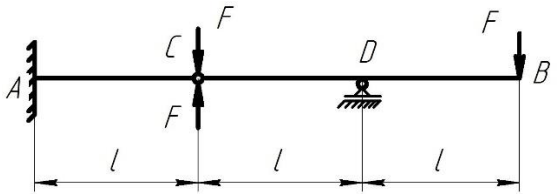


Рис.5.8. Расчетная схема

Полученную расчетную схему условно можно разделить на две схемы (рис.5.9).

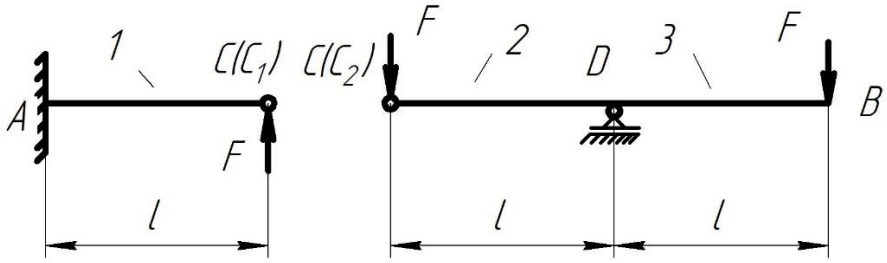


Рис.5.9. Расчетные схемы нагрузок

Под действием силы F (схема1) точка $C(C_1)$ переместится наверх, под действием сил F (схемы2,3) точки $C(C_2)$ и В переместятся вниз. Прогиб стержня (δ) в точках C_1 ,C_2 и B будет одинаковым, т.к. в них действует одинаковый изгибающий момент $M_z = F \cdot l$, жесткость стержней $E \cdot J$ также одинаковая (рис. 5.10)

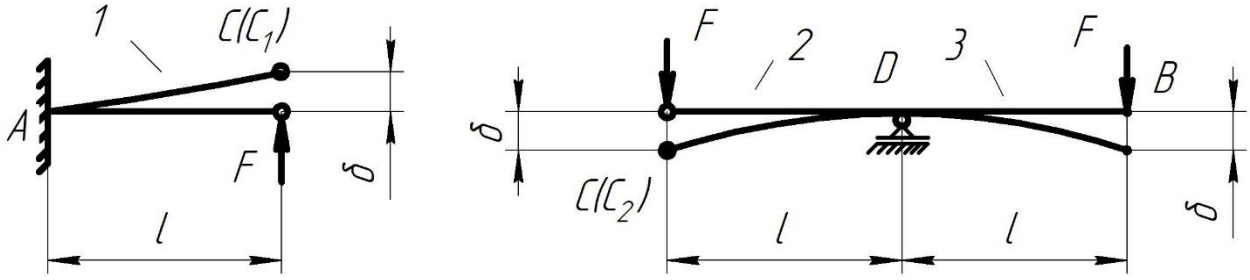


Рис.5.10. Прогиб стержня в точках С и В.

Из рис.5.10 следует, для того, чтобы соединить точки C_1 и C_2 требуется точку C_2 поднять наверх на величину 2δ. В результате осуществится поворот правого стержня вокруг шарнирно-подвижной опоры D и правый конец стержня (точка В), опустится вниз на величину 2δ. Суммарный прогиб правого стержня в точке В составит 3δ (рис.5.11).

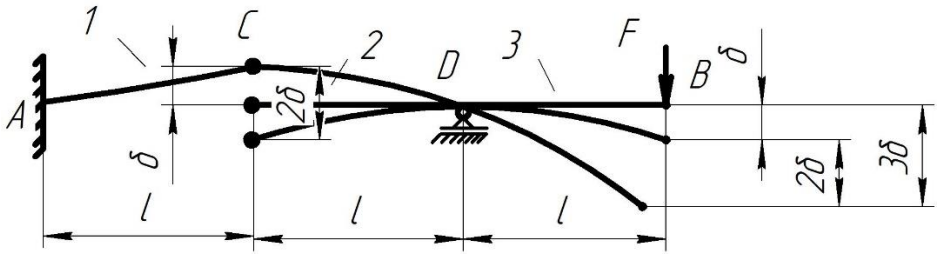


Рис.5.11. Схема поворота точек стержня

Таким образом, максимальный прогиб балки будет в точке В и равен 3δ. Далее задача сводится к определению значения δ. На рис. 5.12 изображена схема изогнутой оси стержня (правая часть стержня).

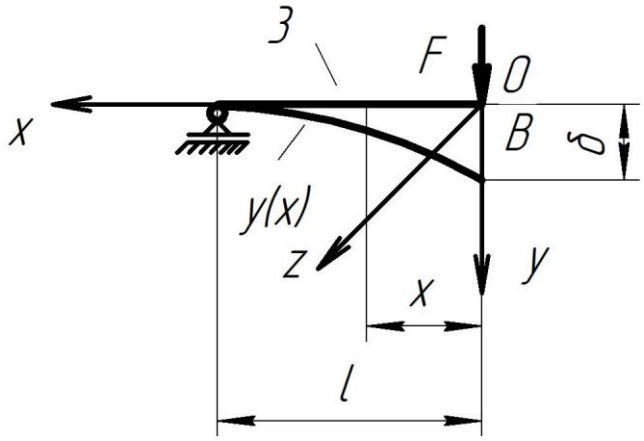


Рис.5.12. Расчетная схема изогнутой оси стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}, \quad (5.15)$$

где E - модуль нормальной упругости;

J_z - осевой момент инерции стержня относительно оси у.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta = \int \frac{M_z}{E \cdot J_z} dx = \int -\frac{F \cdot x}{EJ_z} dx = -\frac{F \cdot x^2}{2E \cdot J_z} + C, \quad (5.16)$$

$$y = \int (-\frac{F \cdot x^2}{2E \cdot J_z} + C) dx = -\frac{F \cdot x^3}{6E \cdot J_z} + Cx + D, \quad (5.17)$$

где C,D – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования C и D вычислим из граничных условий.

При $x = l \;\; \theta = 0$, тогда из уравнения (5.16):

$$-\frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_z} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_z}.$$

При $x = l \;\; y = 0$, тогда из уравнения (5.17):

$$-\frac{F\cdot l^3}{6E\cdot J_z}+\frac{F\cdot l^3}{2E\cdot J_z}+D=0\Rightarrow D=\frac{F\cdot l^3}{6E\cdot J_z}-\frac{F\cdot l^3}{2E\cdot J_z}=-\frac{F\cdot l^3}{3E\cdot J_z}.$$

Тогда уравнение изогнутой оси стержня окончательно принимает вид:

$$y=-\frac{F\cdot x^3}{6E\cdot J_z}+\frac{F\cdot l^2\cdot x}{2E\cdot J_z}-\frac{F\cdot l^3}{3E\cdot J_z},\ (5.17а).$$

Максимальный прогиб балки происходит в точке В, где x=0.

$$y_{\max}\big|_{x=0}=-\frac{F\cdot l^3}{3E\cdot J_z}=-\frac{0{,}002\cdot 10^6\cdot 1^3}{3\cdot 0{,}2\cdot 10^6}=-\frac{1}{3}10^{-2}\,м=\delta.$$

Тогда максимальный прогиб балки в точке В с учетом изложенного выше поворота стержня по абсолютной величине равен

$|3\delta|=10^{-2}\,м=1см$.

Ответ: 1.

Задача 5.4. Тонкая стальная полоса $(E=2\cdot 10^5\,МПа)$ с поперечным сечением $2{,}5см\times 0{,}08см$, длиною $l=50см$ изгибается двумя моментами, приложенными по концам, в дугу окружности с углом 45° (рис.5.13). Максимальное нормальное напряжение, возникающее в полосе, равно _____ $\pi\,МПа$.

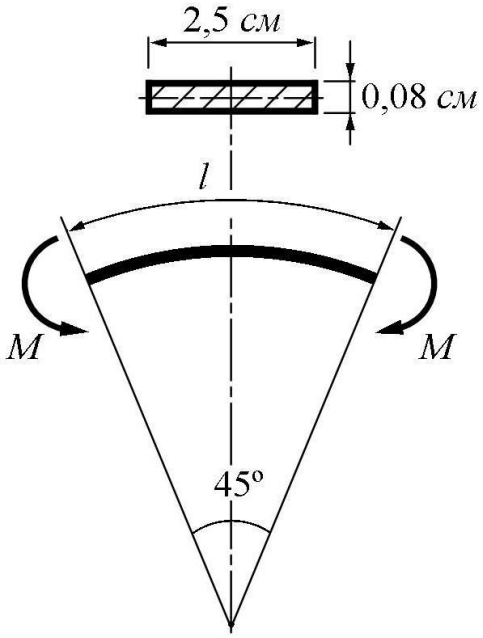


Рис.5.13. Постановка задачи

Решение. Представим половину изогнутой тонкой полосы, как изогнутый стержень, жестко заделанный в стену (рис.5.14).

Запишем уравнение изогнутой оси стержня (5.18)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{M_y}{E \cdot J_y}, \text{ (5.18)}$$

где E - модуль нормальной упругости $E = 2 \cdot 10^{11}\, Па$;

J_y - осевой момент инерции стержня относительно оси у.

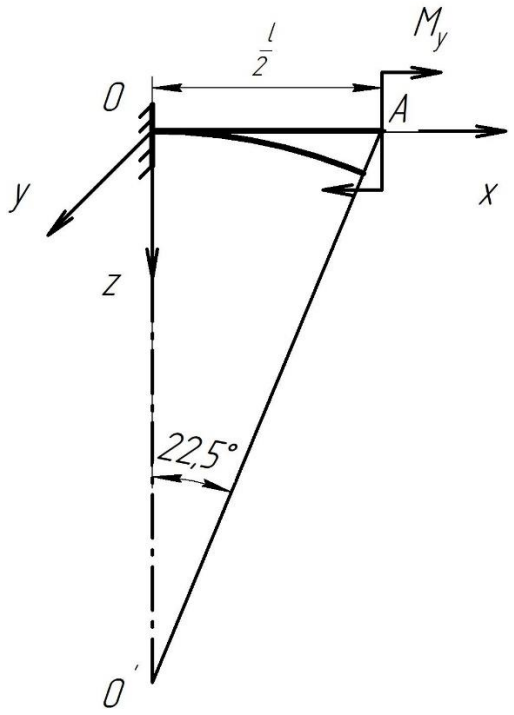


Рис.5.14. Расчетная схема

Для стержня прямоугольного сечения:

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}, \text{(5.19)}$$

$b = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\, м;\ \ h = 0{,}08 \cdot 10^{-2}\, м;$ (рис.5.13)

$$J_y = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}08 \cdot 10^{-2}}{12} = \frac{10^{-5}}{6}\, м^4.$$

Тогда можно записать:

$$\theta = \frac{\partial z}{\partial x} = \int \frac{M_y}{E \cdot J_y} dx + C = \frac{M_y}{E \cdot J_y} x + C, \text{ (5.20).}$$

Постоянную интегрирования C определяем из граничных условий.

При $x = 0\ \ \theta = 0$ (т.к. в точке 0 заделка) $\Rightarrow C = 0$

Тогда уравнение (5.20) принимает вид;

$$\theta = \frac{M_y}{E \cdot J_y} x, \text{ (5.20а).}$$

Наибольший изгибающий момент $M_y^{\max}$ возникает в точке A, где $x = \frac{l}{2} = 25 \cdot 10^{-2}$ *м*, а $\theta = 22{,}5^\circ$. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{M_y^{\max}}{J_y} = \frac{\theta \cdot E}{l/2} = \frac{22{,}5 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{11}}{180 \cdot 25 \cdot 10^{-2}} = \frac{45 \cdot \pi \cdot 10^{13}}{4500} = \pi \cdot 10^{11} \frac{H}{м^3}.$$

Максимальное нормальное напряжение в полосе $\sigma_x^{\max}$ определяем по формуле (5.21):

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_y^{\max}}{J_y} \cdot \frac{h}{2}, (5.21)$$

$$\sigma_x^{\max} = \pi \cdot 10^{11} \cdot 0{,}04 \cdot 10^{-2} = 0{,}04\pi \cdot 10^9 = 40\pi \cdot 10^6 \, Па = 40\pi МПа.$$

Ответ: 40.

6. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под сложным сопротивлением понимают совокупность простых видов деформаций бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает более одного внутреннего силового фактора. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях и возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила.

Задача 6.1. На рисунке 6.1 показан консольный стержень с прямоугольным поперечным сечением. Стержень нагружен силами, лежащими в вертикальной плоскости симметрии. Известны величины: $t = 0{,}1\,м$, $[\sigma] = 32\,МПа$. Из расчета на прочность по допускаемым нормальным напряжениям максимально допустимое значение силы F равно ____ $кН$.

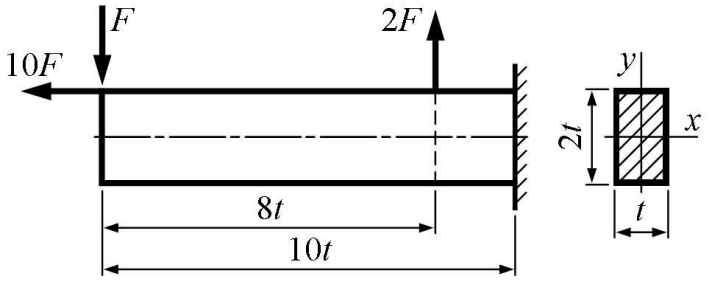


Рис.6.1. Постановка задачи

Решение. Консольный стержень подвергается двум видам деформации: 1) растяжение; 2) изгиб. Из рис.6.1 видно, что сила $10F$ приложена не к продольной оси стержня, а к верхней его грани, следовательно, сила $10F$ не только растягивает стержень вдоль оси z , но и создает изгибающий момент вокруг оси x $M_x^0 = 10F \cdot t$ (рис.6.2).

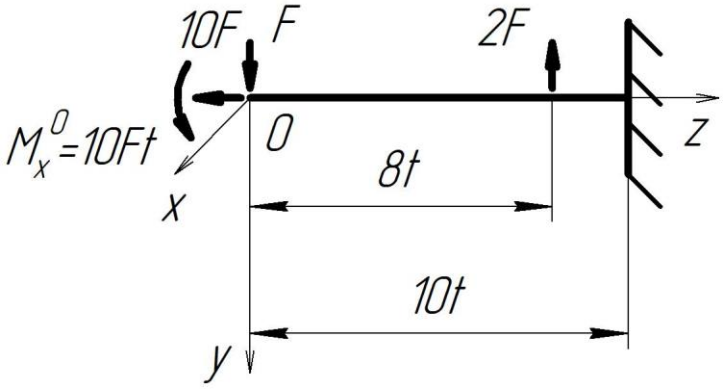


Рис.6.2. Расчетная схема

В процессе растяжения и изгиба возникают нормальные напряжения σ, которые определяются по следующей зависимости.

$$\sigma_z^{\max} = \frac{\left|N^{\max}\right|}{A} + \frac{\left|M_x^{\max}\right|}{W_x}, \quad (6.1)$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

W_x - момент сопротивления относительно оси x.

$N^{\max}$ - наибольшая осевая сила;

$M_x^{\max}$ - наибольший изгибающий момент.

$$A = 2t \cdot t = 2t^2 (м^2),$$

$$W_x = \frac{t \cdot (2t)^2}{6} = \frac{4t^3}{6} = \frac{2t^3}{3} (м^3).$$

Теперь рассчитаем внутренние силы N и M_x.

Для определения внутренней осевой силы N представим, что стержень нагружен только осевой силой $10F$ (рис.6.3).

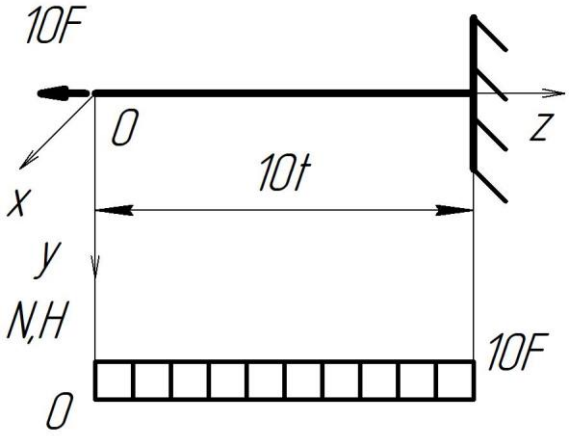


Рис.6.3. Нагрузка стержня осевой силой

Внутреннюю силу определим, используя метод сечений (рис. 6.4).

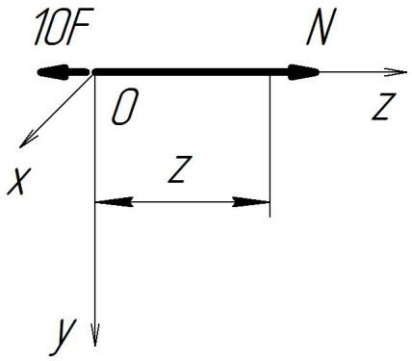


Рис.6.4. Расчетная схема для определения осевой силы N

Рассмотрим условие равновесия системы:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 0 .$$

Проецируя осевые силы на ось z, получим:

$$-10F + N = 0 \Rightarrow N = 10F .$$

На рис.6.3 изображена эпюра внутренней силы N.

Для определения изгибающего момента M_x рассмотрим только силы, создающие этот момент (рис 6.5).

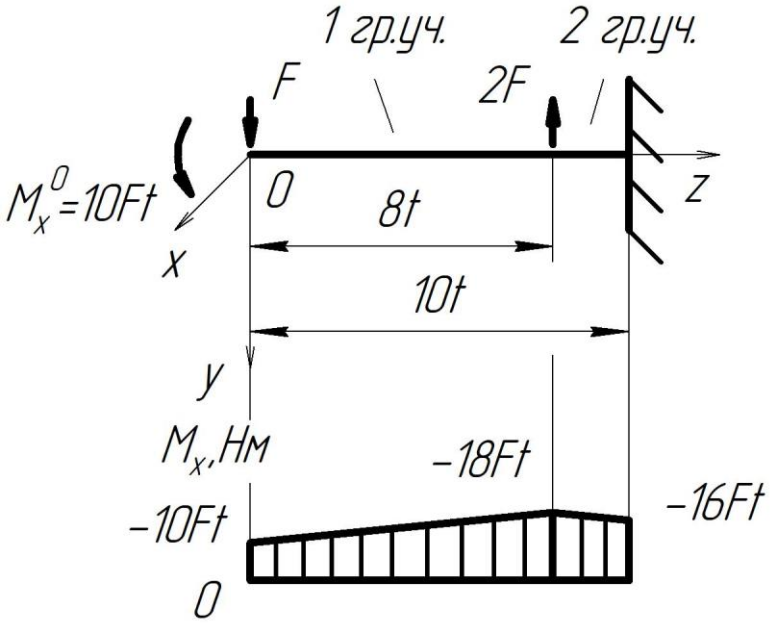


Рис.6.5. Расчетная схема для определения изгибающего момента M_x

На рис.6.5 выделим два грузовых участка. Вычислим внутренний изгибающий момент M_x на каждом грузовом участке методом сечений.

На рис.6.6 изображена расчетная схема первого грузового участка.

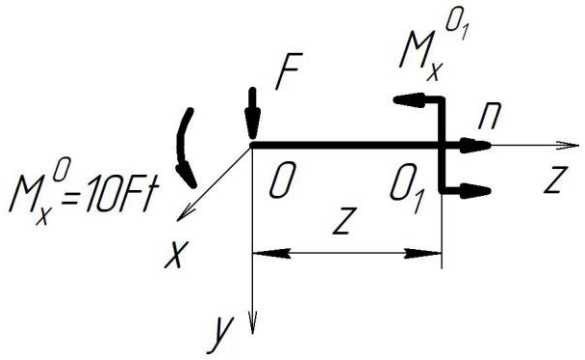


Рис.6.6. Расчетная схема первого грузового участка

Момент внутренних сил M_x вычислим из условия равновесия системы методом сечений.

$$\sum_{i=1}^{n} M_{x_i}^{0_1} = 0,$$

$$M_x^0 + F \cdot z + M_x^{0_1} = 0 \Rightarrow M_x^{0_1} = -M_x^0 - F \cdot z.$$

На первом грузовом участке $z \in [0;8t]$.

при $z = 0$, $M_x^{0_1} = -M_x^0 = -10F \cdot t$,

при $z = 8t$, $M_x^{0_1} = -M_x^0 - 8F \cdot t = -10F \cdot t - 8F \cdot t = -18F \cdot t$.

На рис.6.7 изображена расчетная схема второго грузового участка.

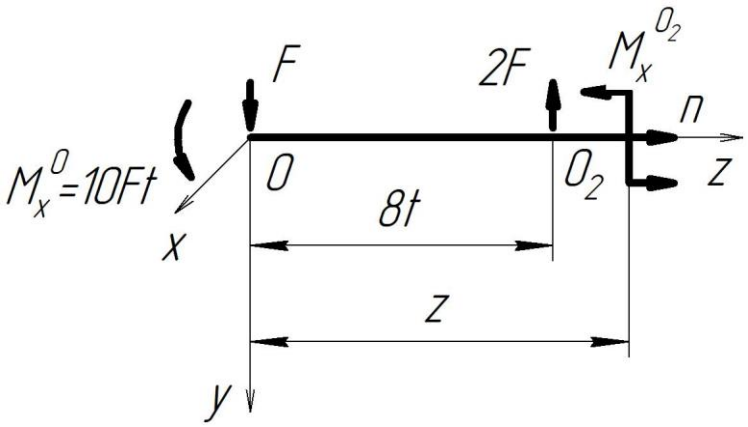


Рис.6.7. Расчетная схема второго грузового участка

Рассматривая условие равновесия системы, а именно равенство нулю суммы моментов M_x относительно полюса 0_1, получим следующее уравнение:

$$M_x^0 + F \cdot z - 2F(z-8t) + M_x^{0_2} = 0 \Rightarrow M_x^{0_2} = -M_x^0 - F \cdot z + 2F(z-8t) =$$
$$= -10F \cdot t - F \cdot z + 2F(z-8t).$$

На втором грузовом участке $z \in [8t;10t]$.

При $z = 8t$, $M_x^{02} = -10F \cdot t - 8F \cdot t = -18F \cdot t$,

при $z = 10t$, $M_x^{02} = -10F \cdot t - 10F \cdot t + 4F \cdot t = -16F \cdot t$.

На рис.6.5 изображена эпюра изгибающего момента внутренних сил M_x

С учетом полученных решений уравнений (6.1) принимает следующий вид:

$$\sigma_z^{\max} = \frac{10F}{2t^2} + \frac{18F \cdot t \cdot 3}{2t^3} = \frac{5F}{t^2} + \frac{27F}{t^2} = \frac{32F}{t^2}.$$

Теперь в левой части уравнения заменим $\sigma_z^{\max}$ на $[\sigma]$ и вычислим F.

$$[\sigma] = \frac{32F}{t^2} \Rightarrow F = \frac{[\sigma] \cdot t^2}{32} = \frac{32МПа \cdot 10^{-2} м^2}{32} = 10000H = 10кН.$$

Ответ: 10.

Задача 6.2. К стержню приложена сила Р. $P = 10кН, l = 0{,}5м, a = 0{,}1м$. Определить максимальное нормальное напряжение.

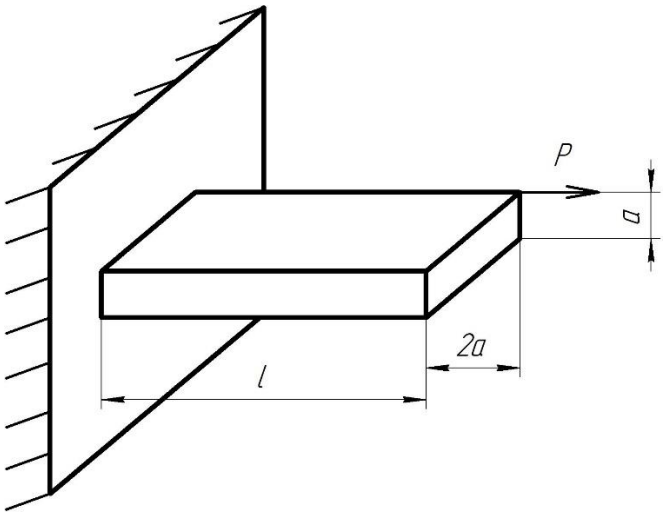


Рис.6.8. Постановка задачи

Обозначаем координатные оси, так чтобы они проходили через центр прямоугольного сечения (рис.6.9).

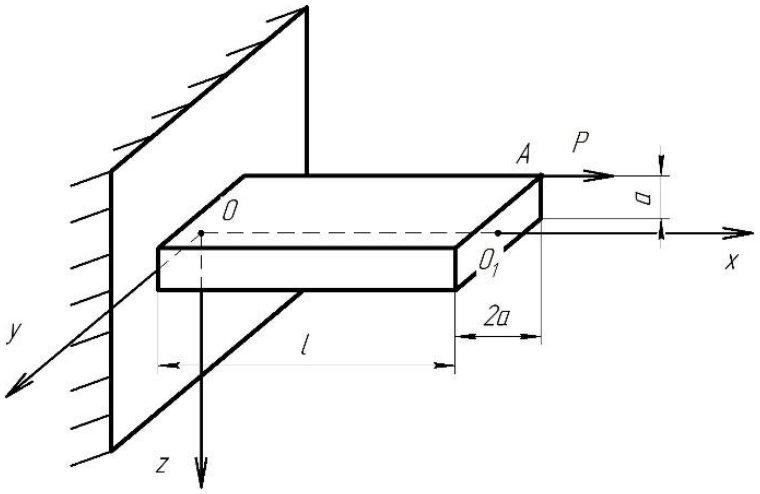


Рис.6.9. Расчетная схема

Сила Р приложена в точке А, расположенной в крайнем правом углу прямоугольного сечения, если смотреть с конца оси х. Под действием силы Р стержень претерпевает деформацию растяжения вдоль оси х, а также деформацию чистого изгиба относительно плоскостей X0Z и X0Y.

Перенесем точку приложения силы Р в центр тяжести прямоугольного сечения, в точку 0_1. Для этого вначале в точке 0_2 приложим пару сил P_1 и $P_1^{'}$ равные по величине силе Р и противоположные друг другу по направлению (рис.6.10).

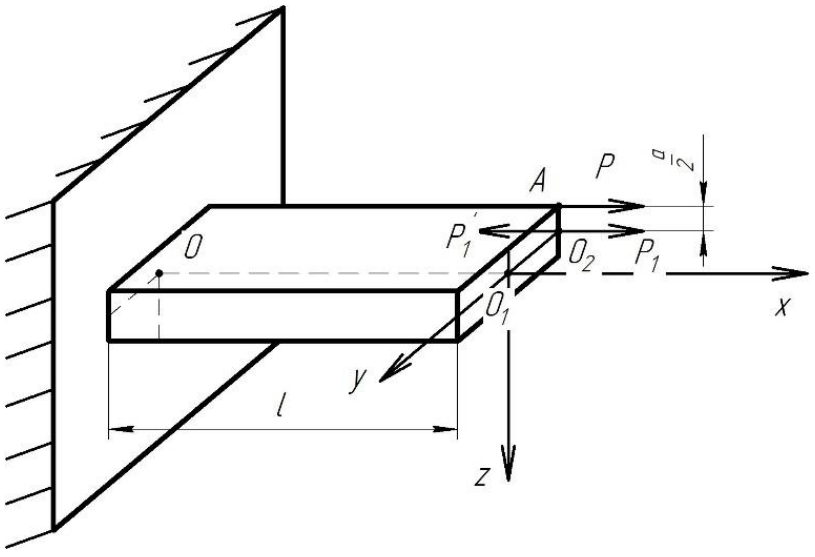


Рис.6.10. Пара сил в точке 0_2

В результате образуется сила $P_1 = P$ и момент пары сил $PP_1^{'}$ в плоскости $X0Z$ $M_1 = M_y = P \cdot \frac{a}{2}$.

Теперь перенесем силу $P_1 = P$ в точку 0_1. Для этого приложим в точке 0_1 пару сил P_2 и $P_2^{'}$ равные по величине силе Р и противоположные друг другу по направлению (рис.6.11).

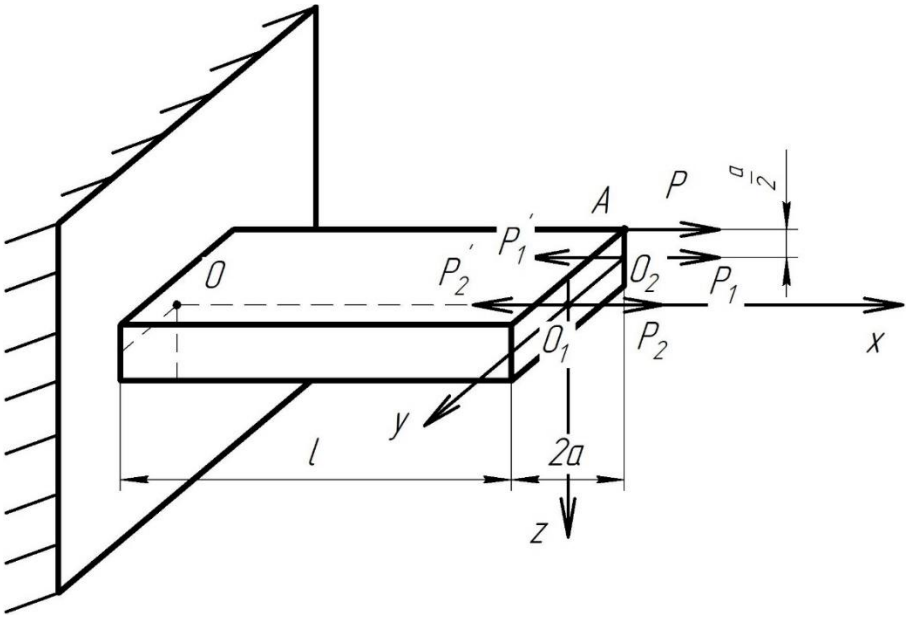


Рис.6.11. Пара сил в точке 0_1

В результате образуется сила $P_2 = P_1 = P$ и момент пары сил $P_1P_2^{'}$ в плоскости $X0Y$ $M_2 = M_z = P \cdot a$.

Таким образом, получено следующее нагружение стержня относительно центра тяжести поперечного сечения:

1) Сила $P_2 = P$ направлена вдоль оси x и создает деформацию растяжения;

2) Момент пары сил $PP_1^{'}$ $M_1 = M_y = P \cdot \frac{a}{2}$ создает деформацию изгиба в плоскости $X0Z$

3) Момент пары сил $P_1P_2^{'}$ $M_2 = M_z = P \cdot a$ создает деформацию изгиба в плоскости $X0Y$ (рис.6.12).

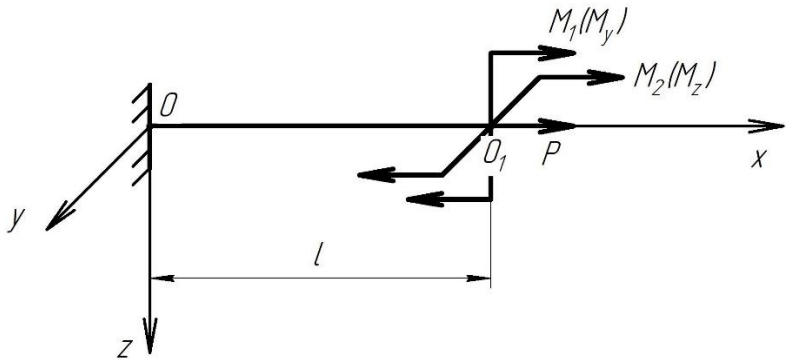


Рис.6.12. Расчетная схема сил и моментов

Нормальное напряжение σ_x рассчитывается по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y,$$

где N - продольная внутренняя сила;

M_y, M_z - изгибающие моменты внутренних сил;

J_y, J_z - осевые моменты инерции относительно осей y и z.

Далее вычислим внутренние силы N, M_y, M_z по отдельности.

На рис. 6.13 приведена расчетная схема стержня от действия продольной силы P.

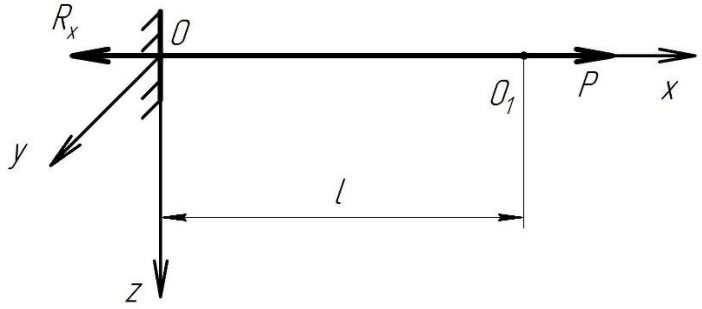


Рис.6.13. Расчетная схема стержня от действия продольной силы

Вычислим реакцию в заделке:

$$-R_x + P = 0 \Rightarrow R_x = P = 10 \kappa H .$$

Методом сечений вычислим внутреннюю продольную силу N.

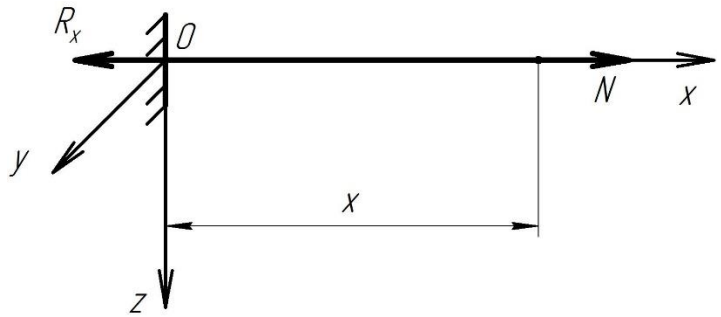


Рис.6.14. Расчетная схема грузового участка

Стержень состоит из одного грузового участка. $x \in [0,l] = [0;0,5]$.

Проецируя силы на ось х получим:

$$-R_x + N = 0 \Rightarrow N = R_x = 10кН\,.$$

На рис. 6.15 приведена расчетная схема стержня от действия изгибающего момента $M_1(M_y)$.

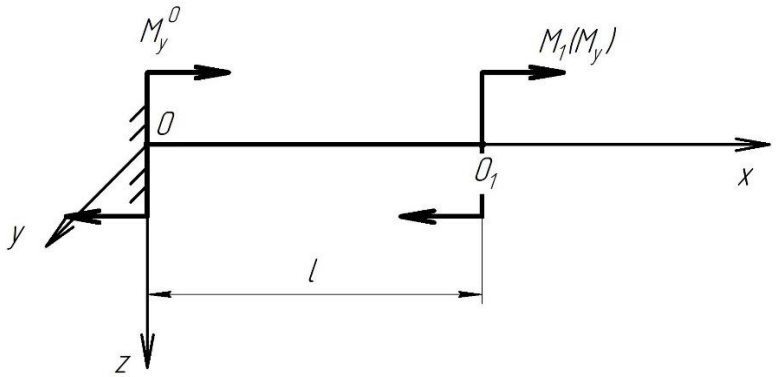


Рис.6.15. Расчетная схема стержня от действия изгибающего момента $M_1(M_y)$

Вычислим реакцию в заделке:

$$-M_y^0 - M_1 = 0 \Rightarrow M_y^0 = -M_1 = -P \cdot \frac{a}{2} = -10 \cdot \frac{0,1}{2} = -0,5кН \cdot м$$

Методом сечений вычислим внутренний изгибающий момент M_y.

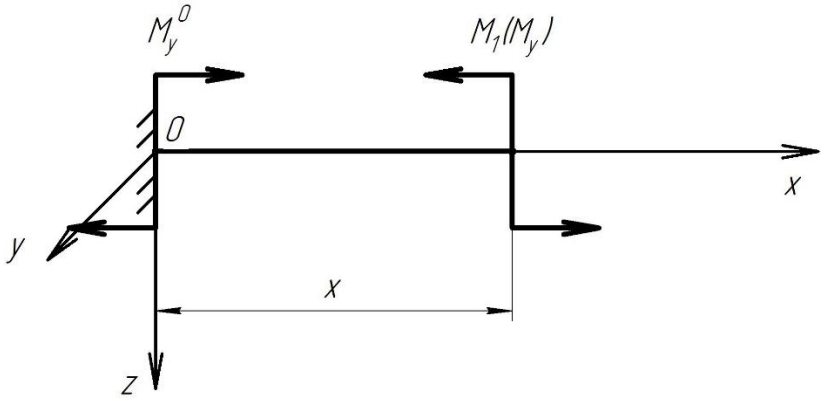


Рис.6.16. Расчетная схема грузового участка

Стержень состоит из одного грузового участка. $x \in [0,l] = [0;0,5]$.

Проецируя силы на ось x получим:

$$-M_y^0 + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = M_y^0 = -0{,}5 кН \cdot м$$

На рис. 6.17 приведена расчетная схема стержня от действия изгибающего момента $M_2(M_z)$.

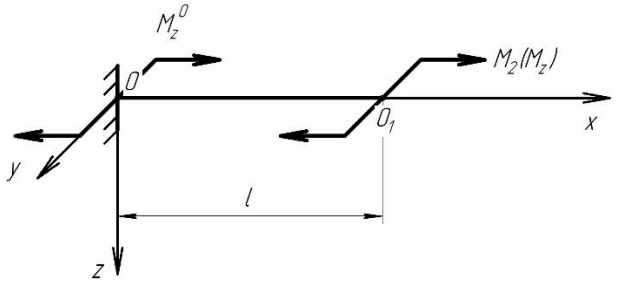


Рис.6.17. Расчетная схема стержня от действия изгибающего момента $M_2(M_z)$

Вычислим реакцию в заделке:

$$M_z^0 + M_2 = 0 \Rightarrow M_z^0 = -M_2 = -P \cdot a = -10 \cdot 0{,}1 = -1{,}0 кН \cdot м.$$

Методом сечений вычислим внутренний изгибающий момент M_z.

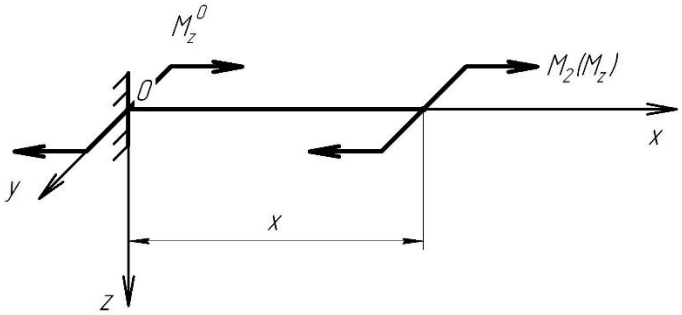


Рис.6.18. Расчетная схема грузового участка

Стержень состоит из одного грузового участка. $x \in [0,l] = [0;0{,}5]$.

Проецируя силы на ось x получим:

$$M_z^0 + M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = -M_z^0 = 1{,}0 кН \cdot м.$$

Рассчитаем геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

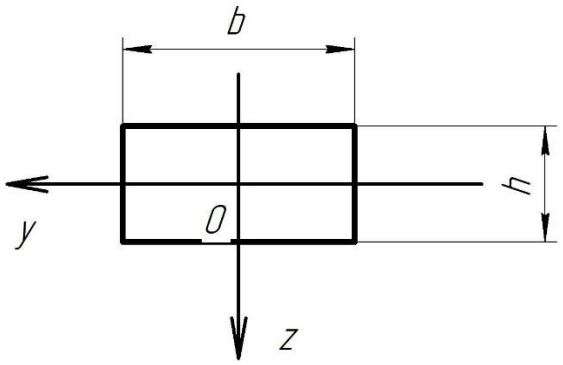


Рис.6.19. Расчетная схема геометрических характеристик поперечного сечения стержня

Вычислим площадь поперечного сечения стержня F и осевые моменты инерции J_y, J_z.

$$F = h \cdot b = a \cdot 2a = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02 м^2,$$

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{2 \cdot 0{,}1^4}{12} = 1{,}67 \cdot 10^{-5} м^4,$$

$$J_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{(2a)^3 \cdot a}{12} = \frac{8 \cdot a^4}{12} = \frac{8 \cdot 0{,}1^4}{12} = 6{,}67 \cdot 10^{-5} м^4.$$

Вычислим максимальное нормальное напряжение $\sigma_{x_{\max}}$ по формуле:

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z_{\max} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y_{\max} = \frac{10}{0{,}02} - \frac{0{,}5 \cdot a}{1{,}67 \cdot 10^{-5} \cdot 2} - \frac{1 \cdot a}{6{,}67 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= 500 - \frac{0{,}05}{3{,}34 \cdot 10^{-5}} - \frac{0{,}01}{6{,}67 \cdot 10^{-5}} = 500 - 1497 - 150 = -1147 кПа = -1{,}15 МПа.$$

Содержание

1. Растяжение и сжатие …….. 3
2. Кручение и сдвиг …… 21
3. Геометрические характеристики сечений……. 30
4. Напряженное и деформированное состояние в точке….. 35
5. Прямой плоский изгиб……. 49
6. Сложное сопротивление…….. 60

Титов Андрей Валерьевич
Лысков Алексей Иванович
Николаева Елена Александровна

Олимпиадные задачи по сопротивлению материалов

Учебно-методическое пособие

Редактор

Подписано в печать 00.00.00. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 4,5.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 000 экз. Заказ 000.

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5