МИНОБРНАУКИ РОСИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

А. В. ТИТОВ, Е. А. НИКОЛАЕВА

РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2024

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Титов А. В., Николаева Е. А.

Н00 Решение олимпиадных задач по сопротивлению материалов: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024. 00с.

ISBN 000-0-0000-0000-0

Содержит примеры решения задач, предлагаемых на интернет-олимпиадах по сопротивлению материалов.

Предназначено для бакалавров технических специальностей, обучающих по дисциплинам Сопротивление материалов и Прикладная механика.

УДК 539.3/6(07)
ББК Ж 121я7
Т45

Рецензенты канд. техн. наук Тихоненкова О. В. (СПб гос. университет аэрокосмического приборостроения).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 000-0-0000-0000-0 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор – продольную растягивающую (сжимающую) силу N_x.

При решении задач используют метод сечений, заключающийся в том, что стержень мысленно рассекается на две части, одна из частей стержня отбрасывается. В месте рассечения стержня вводят положительную внутреннюю силу N_x, которую вычисляют из условия статического равновесия стержня.

Внутренняя сила N_x является положительной , если ее направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке рассечения стержня и отрицательной, если направление внутренней силы не совпадает с направлением внешней нормали.

Различают силы сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенная силы $P,(H)$ - это сила, действующие на тело по малой площадке (условно считают, – приложена в точке). Распределенные силы - это силы, действующие на части объема, поверхности или линии. Распределенные силы характеризуются интенсивностью (q), т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил, $\frac{H}{м^3}$), на единицу площади (в случае поверхностных сил, $\frac{H}{м^2}$), на единицу длины (в случае действия сил по линии, $\frac{H}{м}$).

Статически определимыми называют задачи, которые можно решать методами статики твердого тела, т. е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия. Статически неопределимыми называют задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, и для решения которых нужно учитывать деформации тела, обусловленные внешними нагрузками.

Мо́дуль нормальной упругости (модуль Ю́нга) (E, МПа) — физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться растяжению, сжатию при упругой деформации.

Задача № 1.1.

Дана конструкция, состоящая из двух стержней (рис.1.1, *а*). Определить допустимую нагрузку. Известно, что предел текучести материала стержня $\sigma_T = 320 МПа$, коэффициент запаса $n_T = 2$, площадь поперечного сечения стержня $A = 5\,\text{см}^2$, $\alpha = 45^\circ$ (рис.1.1).

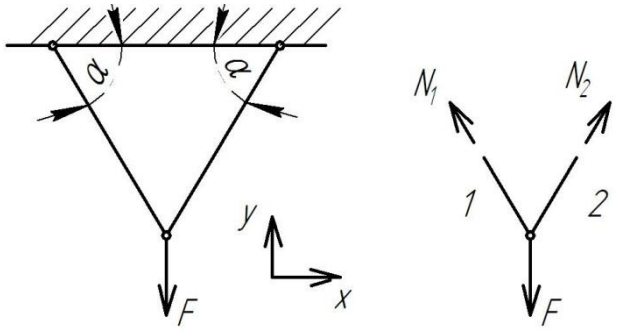


Рис.1.1. Расчетная схема к задаче 1.1

Решение:

Используя метод сечений, рассекаем стержни 1 и 2 и вводим положительные внутренние силы N_1 и N_2 (рис.1.1, *б*). Определяем внутренние силы из условия статического равновесия, последовательно проецируя силы на оси x и y.

$$\sum X = -N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0$$

$$\sum Y = N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - F = 0$$

Отсюда

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin\alpha}.$$

Условие прочности стержня имеет вид:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \qquad (1.1)$$

где $[\sigma]$ - предельно допустимые нормальные растяжения.

Вычисляем значения допускаемых для конструкции усилий:

Учитывая, что:

$$\sigma = \frac{N}{A};$$

Можно записать

$$N \le A[\sigma];$$

Предельно допустимые нормальные напряжения $[\sigma]$ вычисляем по формуле:

$$[\sigma]=\frac{\sigma_T}{n_T};$$

Получаем

$$N \le A\frac{\sigma_T}{n_T};$$

В задаче требуется определить допустимую нагрузку F, поэтому полагаем $F = F_{доп.}; N = [N]; [N] = A[\sigma]$

Принимаем

$$N = [N] = A\frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{F_{доп}}{2\sin\alpha}$$

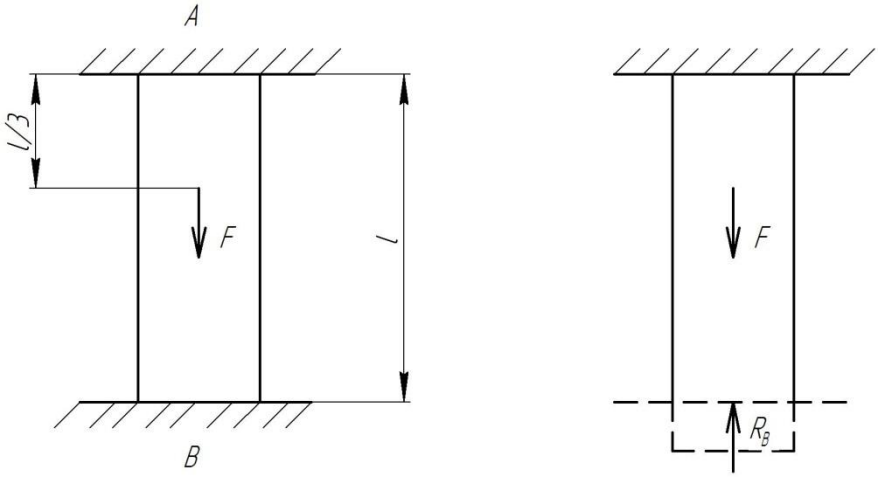
Откуда

$$F_{доп} = \frac{A\sigma_T \cdot 2\sin\alpha}{n_T} = \frac{5\cdot 10^{-4}\,м^2 \cdot 320\cdot 10^6\,\frac{Н}{м^2}\cdot 2\cdot 0{,}707}{2} = 11{,}3кН = 11300Н\,.$$

Таким образом, получено значение допускаемой силы, которую выдержит без разрушения рассматриваемая конструкция.

Задача № 1.2.

Прямой однородный стержень жестко закреплен по концам и нагружен продольной силой *F* (рис. 1.2, *а*). Требуется определить 2 реакции R_A и R_B, возникающие в опорных закреплениях.



а *б*

Рис.1.2. Расчетная схема к задаче 1.2

Решение:

В заделках возникают реакции R_A и R_B, которые неизвестны. Предположим, что реакции R_A и R_B направлены в противоположную сторону относительно направления силы F. Тогда уравнение равновесия имеет вид:

$$R_A + R_B - F = 0, \tag{1.2}$$

Задача является один раз статически неопределимой, т.к. одному уравнению соответствуют два неизвестных параметра. Для решения задачи надо записать второе уравнение. Для этого используем метод перемещений. Мысленно отбросим нижнюю защемленную опору. В точке *B* действует реакция R_B (рис. 1.2, *б*), под действием которой стержень сожмется и сечение *B* переместится вверх на величину Δl_R, а под действием силы *F* стержень растянется и переместится вниз на величину Δl_F. Так как в точке *B* на самом деле есть заделка, то суммарное перемещение от сил F и R_B равно нулю (1.3):

$$\Delta l_F + \Delta l_R = 0, \tag{1.3}$$

Определяем перемещения Δl_F и Δl_R, используя закон Гука. Перемещение стержня под действием силы F вычислим по формуле

$$\Delta l_F = \frac{F\frac{l}{3}}{EA},$$

где E - модуль нормальной упругости (модуль Юнга);

A - площадь поперечного сечения стержня.

Под действием силы *F* удлиняется только участок стержня длиной $\frac{l}{3}$ и, следовательно, сечение *B* перемещается на эту величину

$$\Delta l_R = -\frac{R_B l}{EA}.$$

Перемещению Δl_R присвоен знак минус, т.к. реакция R_B вызывает сжатие стержня. Подставив перемещения в уравнение (1.3) получим:

$$\frac{Fl}{3EA} - \frac{R_B l}{EA} = 0.$$

Следовательно, $R_B = \frac{F}{3}$.

Из уравнения (1.2): $R_A = F - R_B = F - \frac{F}{3} = \frac{2}{3}F$.

Задача № 1.3.

Стержень защемлен обоими концами и нагружен двумя равными силами F. Модуль упругости материала E, площадь поперечного сечения стержня A, значение силы F заданы. Чему равно значение максимального нормального напряжения (рис. 1.3).

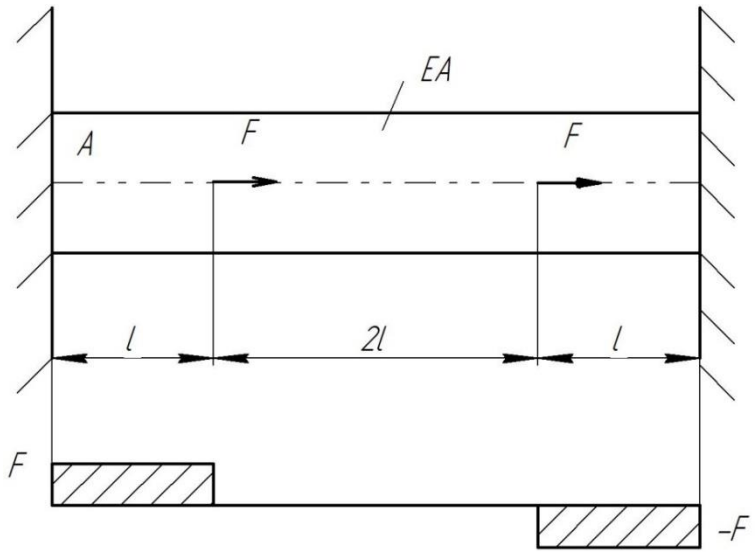


Рис.1.3. Постановка задачи 1.3 и эпюры внутренних сил

Решение:

В левой и правой заделках действуют реакции R_A и R_B соответственно. Условие равновесия стержня имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0,$$

где F_i - силы и реакции, действующие на стержень.

Предположим, что реакции в заделках направлены в сторону противоположную относительно направления сил F. Тогда уравнение равновесия стержня имеет вид:

$$-R_A + F + F - R_B = 0, \qquad (1.4)$$

Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим изменение длины стержня от действия сил R_A и F (рис.1.4).

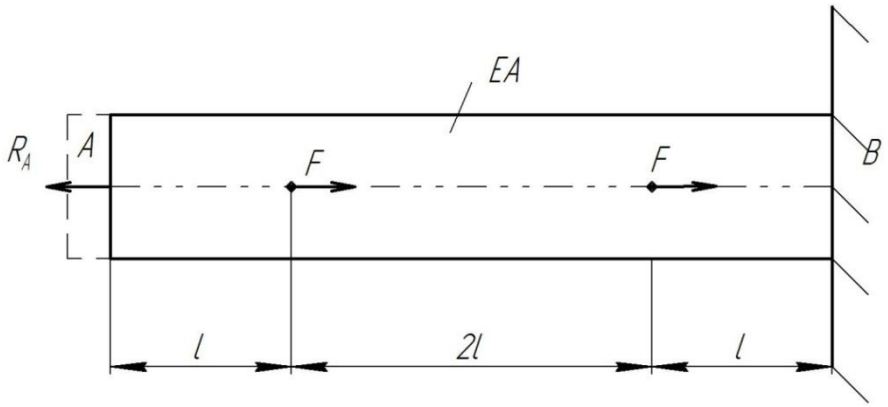


Рис.1.4. Схема расположения сил по методу перемещений.

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма изменения длины стержня от действия сил будет равна нулю.

$$\Delta l_{R_A} + \Delta l_{F_1} + \Delta l_{F_2} = 0, \tag{1.5}$$

$$-\frac{R_A \cdot 4l}{EA} + \frac{F \cdot 3l}{EA} + \frac{Fl}{EA} = 0,$$

$$-R_A \cdot 4l + F \cdot 3l + Fl = 0 \Rightarrow R_A = F.$$

Из уравнения (1.4) получаем $R_B = F$.

Вычислив реакции в заделках, определяем грузовые участки стержня и вычисляем на каждом участке внутреннюю силу N методом сечений.

На первом грузовом участке (рис.1.5):

$$-R_A + N = 0 \Rightarrow N = R_A = F.$$

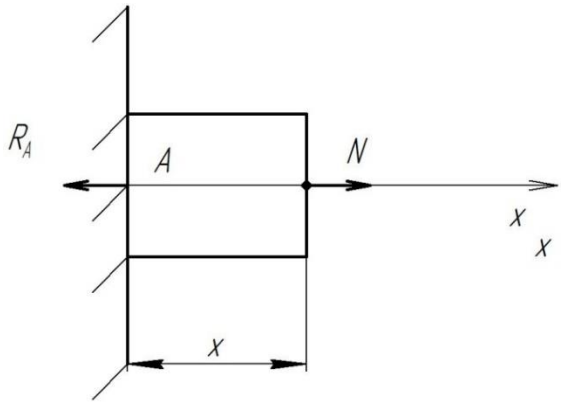


Рис.1.5. Расчетная схема сил на первом грузовом участке

На втором грузовом участке (рис.1.6):

$$-R_A + F + N = 0 \Rightarrow N = R_A - F = 0.$$

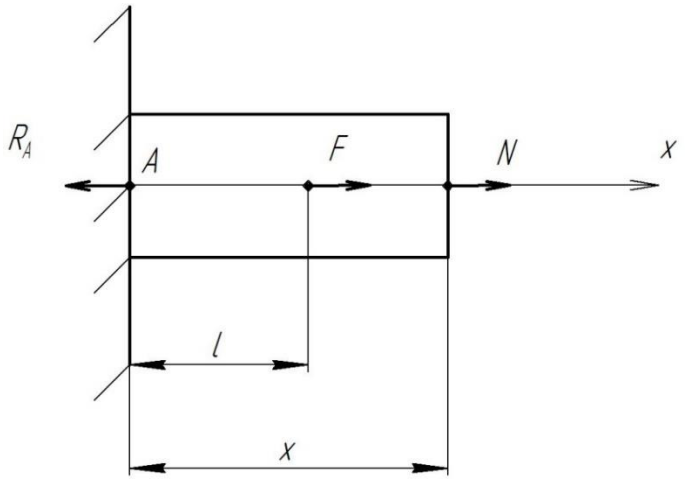


Рис.1.6. Расчетная схема сил на втором грузовом участке

На третьем грузовом участке (рис.1.7):

$$-R_A + F + F + N = 0 \Rightarrow N = R_A - 2F = F - 2F = -F\,.$$

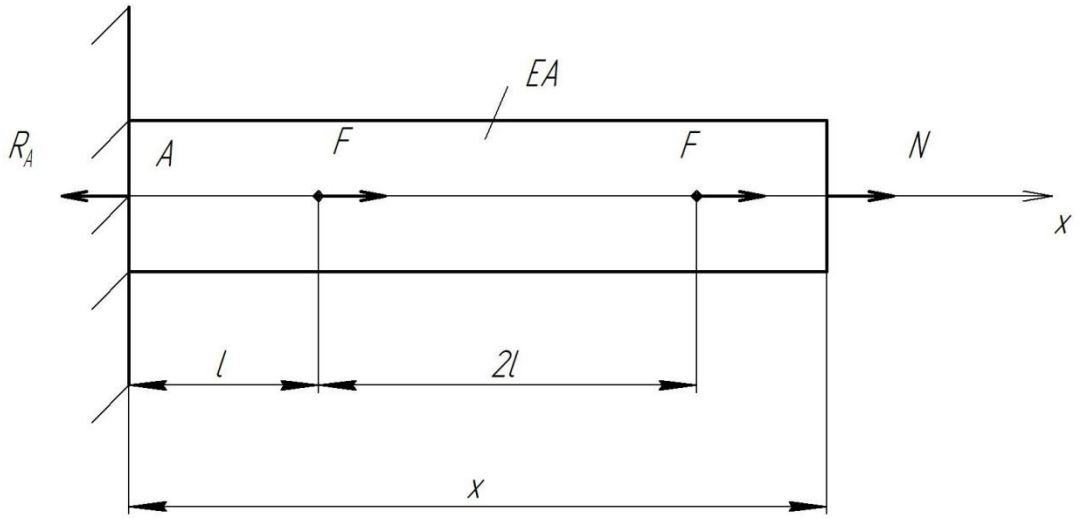


Рис.1.7. Расчетная схема сил на третьем грузовом участке

Соответственно

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} = \frac{F}{A}.$$

Таким образом, получено значение максимального нормального напряжения в стержне.

Задача № 1.4.

Стальной брус, изображенный на рис. 1.8 нагревается на $\Delta T^{\circ}C$. Коэффициент линейного расширения равен α. Определить реакции опор и напряжения, действующие в стержне.

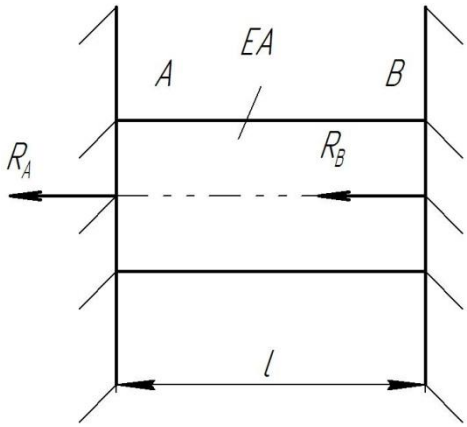


Рис.1.8. Постановка задачи 1.4

Решение:

Для этой системы можно составить только одно уравнение равновесия:

$$R_A + R_B = 0, \tag{1.6}$$

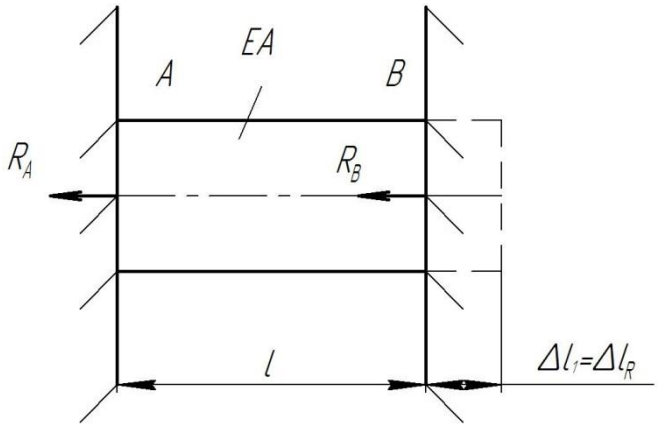


Рис.1.9 Расчетная схема задачи 4 при использовании метода перемещений

Данная система статически неопределима. Для решения требуется составить дополнительное уравнение перемещений. Условно отбросим правую опору (рис. 1.9). Заменим ее действие реакцией R_B и определим перемещение свободного конца бруса от температуры Δl_T и от реакции Δl_{R_B}.

$$\Delta l_T = \alpha \cdot l \Delta T;$$

$$\Delta l_B = -\frac{R_B l}{EA}$$

Так как опорное сечение B не перемещается, то суммарное перемещение от температуры и реакции равно нулю:

$$\Delta l_T + \Delta l_{R_B} = \alpha l \Delta T - \frac{R_B l}{EA} = 0, \tag{1.7}$$

Совместно решая уравнения (1.6) и (1.7), получаем:

$$R_B = -R_A = \frac{\alpha l \Delta T E A}{l},$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{R_B}{A} = \frac{\alpha l \Delta T E}{l}.$$

Таким образом получения значения реакций опор и напряжения, возникающие в стержне.

Задача № 1.5.

Стержень нагружен внешними силами. Модуль упругости материала E, площадь поперечного сечения A, значение силы F, размер l заданы. Определить какое значение должна принимать сила F_1, чтобы перемещение сечения 1-1 было равно нулю.

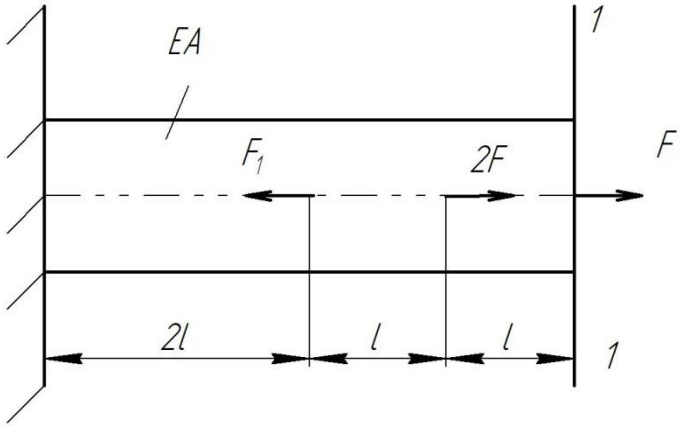


Рис.1.10. Постановка задачи 1.5

Решение:

Вычислим перемещение сечения 1-1

$$\Delta l_{11} = -\frac{F_1 \cdot 2l}{EA} + \frac{2F \cdot 3l}{EA} + \frac{F \cdot 4l}{EA} = 0,$$

$$F_1 \cdot 2l = 2F \cdot 3l + F \cdot 4l,$$

$$2F_1 = 6F + 4F = 10F,$$

$$F_1 = 5F.$$

Получили, что перемещение сечения 1-1 будет равно нулю при $5F$.

Задача № 1.6.

Стержень, жестко закрепленный по концам, нагружен силой F. Показания датчика T, закрепленного перпендикулярно оси стержня, $\varepsilon = -0{,}45 \cdot 10^{-4}$. Известны величины: $A = 10 см^2$ - площадь поперечного

сечения, $E = 2 \cdot 10^5\, МПа$ - модуль упругости материала, $\mu = 0{,}3$ - коэффициент Пуассона. Определить, чему равно значение силы F.

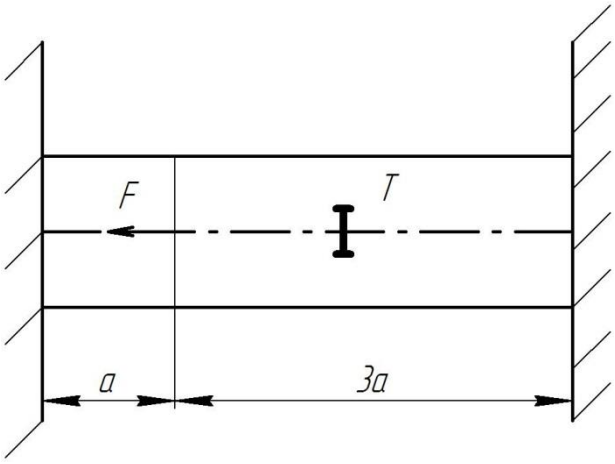


Рис.1.11. Постановка задачи 1.6

В заделках возникают реакции (рис.1.12).

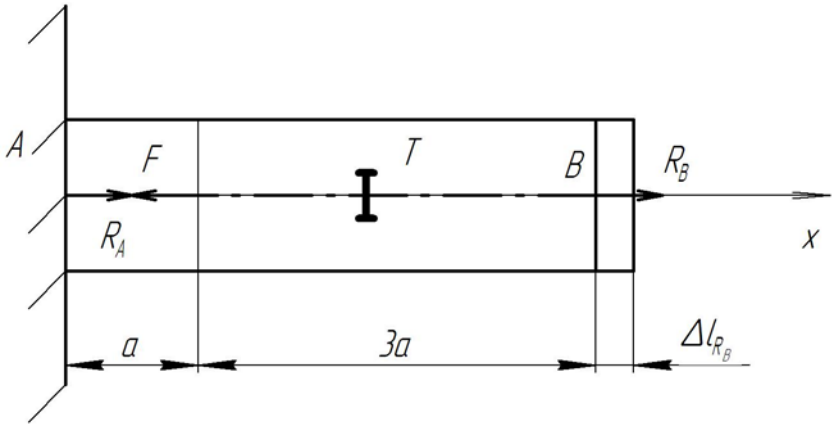


Рис.1.12. Расчетная схема стержня задачи 1.6

Уравнение равновесия стержня имеет вид:

$$R_A - F + R_B = 0, \tag{1.8}$$

В уравнении равновесия стержня 2 неизвестных R_A, R_B. Задача один раз статически неопределимая, для ее решения требуется еще одно уравнение, которое получим, используя метод перемещений.

Предполагаем, что правой заделки не существует и тогда сечение в точке В переместится на величину Δl_R^B. Но так как на самом деле в точке B существует заделка, то суммарное перемещение сечения в точке B от силы F и реакции R_B равно нулю.

$$\Delta l_R^B - \Delta l_F = 0, \tag{1.9}$$

Вычислим составляющие уравнения (1.9).

$$\Delta l_R^B = \frac{R_B \cdot 4a}{EA};$$

$$\Delta l_F = \frac{Fa}{EA};.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1.8):

$$4R_B - F = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{4}.$$

Тогда из уравнения (1.8):

$$R_A = F - R_B = F - \frac{F}{4} = \frac{3}{4}F.$$

Датчик закреплен перпендикулярно и поэтому измеряет поперечную деформацию $\varepsilon_{попер.}$. Тогда продольную деформацию $\varepsilon_{прод.}$ определим из следующего математического выражения:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{попер.}}{\varepsilon_{прод.}} \Rightarrow \varepsilon_{прод.} = -\frac{\varepsilon_{попер.}}{\mu} = \frac{0{,}45 \cdot 10^{-4}}{0{,}3} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда

$$\sigma = E\varepsilon_{прод} = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} = 30МПа,$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow N = \sigma A = 30МПа \cdot 10см^2 = 30 \cdot 10^6 \frac{Н}{м^2} \cdot 10 \cdot 10^{-4} м^2 = 30000Н = 30кН$$

Рассмотрим задачу методом сечений. Запишем уравнение равновесия.

$$R_A - F + N_x = 0,$$

$$\frac{3}{4}F - F + N_x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}F + N_x = 0,$$

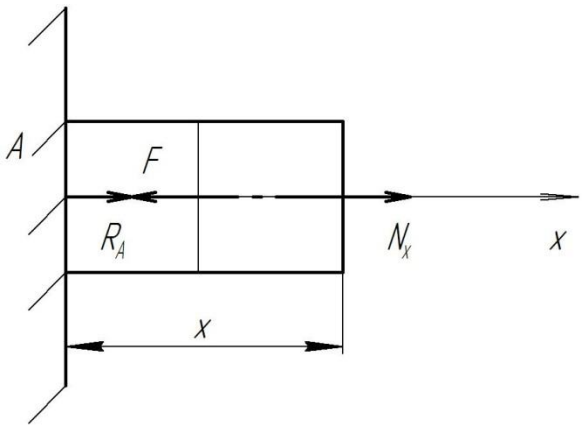


Рис.1.13. Расчетная схема метода сечений

$$N_x = \frac{1}{4}F \Rightarrow F = 4N_x = 4 \cdot 30 = 120 кН$$

В результате получили значение силы $F = 120$ кH.

Задача № 1.7.

Три одинаковых стержня закреплены в шарнире К. При нагреве стержней *1* на $\Delta t^\circ C$ в системе возникают напряжения. Устойчивость стержней при нагреве обеспечена. Известны величины: α - коэффициент линейного температурного расширения; l – длина стержней; $\Delta t = 15^\circ C$.

На сколько градусов надо охладить стержень *2*, чтобы снять напряжения в стержнях системы?

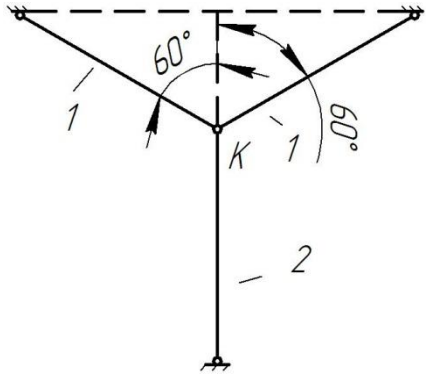


Рис.1.14. Постановка задачи 1.7

Решение:

При нагреве стержней *1* при отсутствии стержня *2* шарнир K свободно перемещается на величину KK' и напряжения в стержнях отсутствуют (рис. 1.15).

Удлинение стержня 1 Δl_1 можно вычислить двумя способами. Первый способ, по формуле:

$$\Delta l_1 = \alpha l \Delta t, .$$

Второй способ - из подобия треугольников (рис. 1.15).

$$\Delta l_1 = KK' \cdot \cos 60^\circ,$$

где KK' - укорочение стержня 2.

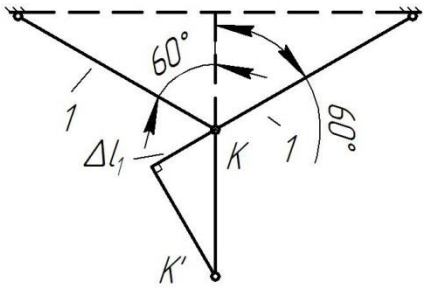


Рис.1.15. Расчетная схема шарнира *K*

Вычислим KK'

$$KK' = \frac{\alpha l \Delta t}{\cos 60^\circ} = \frac{\alpha l \cdot 15 \cdot 2}{1} = 30\alpha l .$$

Запишем уравнение для определения изменения длины стержня *2* Δl_2:

$$\Delta l_2 = KK' = \alpha \Delta t_2 l \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{KK'}{\alpha l} = \frac{30\alpha l}{\alpha l} = 30^\circ C .$$

В результате, чтобы снять напряжения в стержнях системы, стержень *2* надо охладить на 30º*C*.

Задача № 1.8.

Участок стержня длиной $2l$ растянут двумя силами $F = 9кН$ (рис. 1.16). Затем торцевые сечения стержня жестко закрепили, а нагрузку сняли. Жесткость поперечного сечениям EA стержня на растяжение-сжатие по длине постоянна. Чему равно значение продольной силы в стержне после удаления нагрузки?

Решение:

После снятия нагрузки в закреплениях возникают силы, удерживающие стержень в растянутом состоянии.

Тогда можно записать:

$$\frac{F \cdot 2l}{EA} - \frac{N \cdot 6l}{EA} = 0 \Rightarrow 2F = 6N \Rightarrow N = \frac{F}{3} = \frac{9}{3} = 3кН .$$

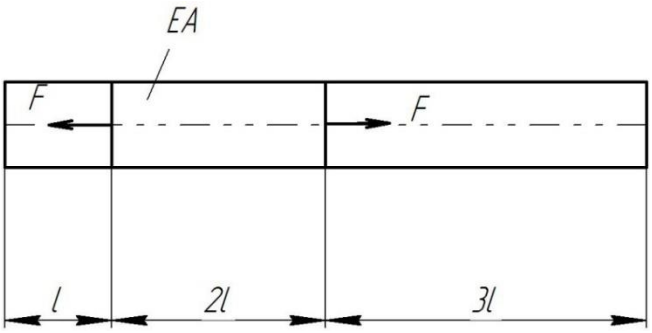


Рис.1.16. Постановка задачи 1.8

В результате значение продольной силы в стержне после удаления нагрузки составит 3 к*Н*.

Задача № 1.9.

На рисунке показан стержень, нагруженный распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по линейному закону от нуля до q. Заданы величины: l, q, A – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала. Абсолютное удлинение стержня равно ____

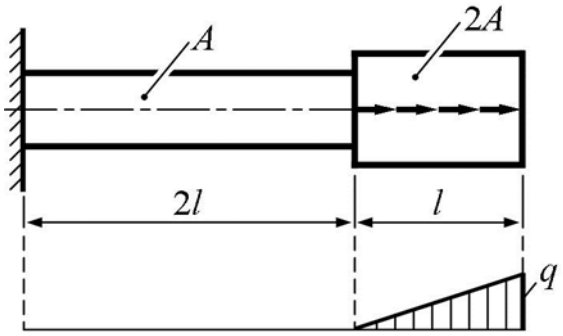


Рис.1.17. Постановка задачи 1.9

Решение:

Обозначим ось *x*, реакцию в заделке, грузовые участки (рис. 1.18). Границы грузовых участков определяют в местах изменения нагрузки.

Реакцию в опоре определим из условия статического равновесия системы.

$$-R_0 + \frac{1}{2}ql = 0 \Rightarrow R_0 = \frac{1}{2}ql\,.$$

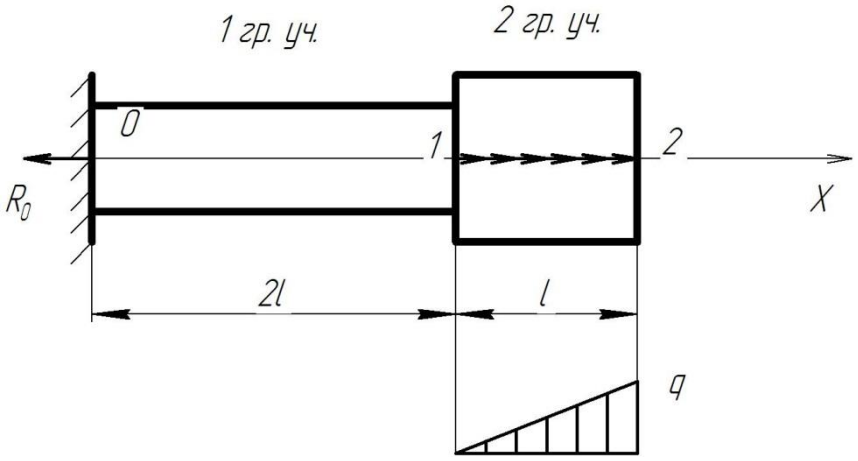


Рис.1.18. Расчетная схема стержня задачи 9

Далее вычислим внутреннюю силу N_x на 1-м и 2-м грузовых участках.

1-й грузовой участок

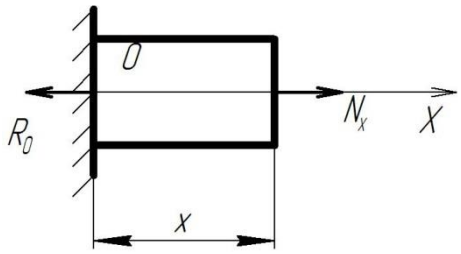


Рис.1.19. Расчетная схема 1-го грузового участка

$$-R_0 + N_x = 0 \Rightarrow N_x = R_0 = \frac{1}{2}ql$$

2-й грузовой участок

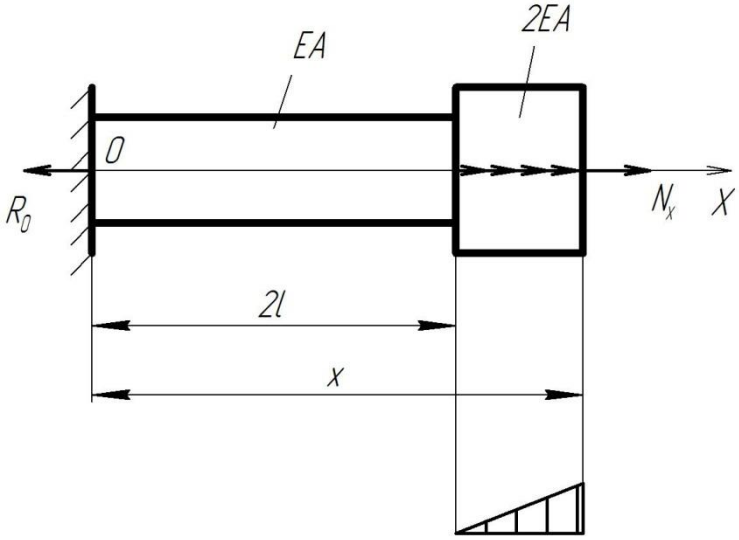


Рис.1.20. Расчетная схема 2-го грузового участка

$$-R_0 + N_x + \frac{q}{l}(x-2l)^2 = 0,$$

$$N_x = R_0 - \frac{q}{l}(x-2l)^2 = \frac{1}{2}ql - \frac{q}{l}(x-2l)^2.$$

Вычислим перемещение стержня в точках 1 и 2 (рис. 1.18).

$$\delta_1 = \frac{1}{EA}\int_0^{2\cdot l} N(x)dx = \frac{1}{EA}\cdot\frac{1}{2}ql\cdot 2l = \frac{ql^2}{EA},$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{2EA}\int_{2l}^{3l}(\frac{1}{2}ql - \frac{q}{l}(x-2l)^2)dx = \delta_1 + \frac{1}{2EA}\left[\int_{2l}^{3l}\frac{1}{2}qldx - \int_{2l}^{3l}\frac{q}{l}(x-2l)^2\,dx\right] =$$

$$= \delta_1 + \frac{1}{2EA}\left[\frac{1}{2}ql^2 - \frac{q}{l}\cdot\frac{(x-2l)^3}{3}\Bigg|_{2l}^{3l}\right] = \frac{ql^2}{EA} + \frac{1}{2EA}\left[\frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{3}ql^2\right] =$$

$$= \frac{ql^2}{EA} + \frac{ql^2}{12EA} = \frac{13ql^2}{12EA}$$

Задача № 1.10.

На рисунке показан стержень, нагруженный осевой нагрузкой. Заданы величины l, EA, q. Длина стержня не изменится, когда значение силы F равно ___ ql.

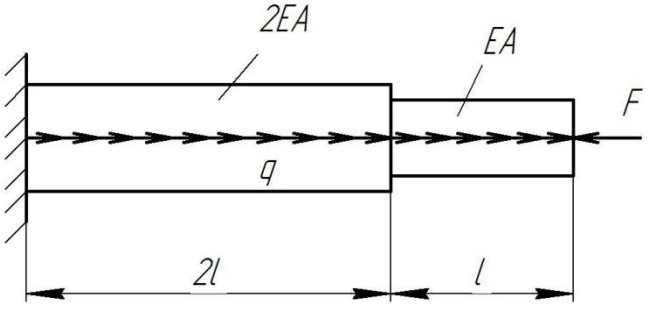


Рис.1.21. Постановка задачи 1.10

Решение:

Обозначим координатную ось, реакцию в заделке и грузовые участки на стержне, показанном на рис. 1.21.

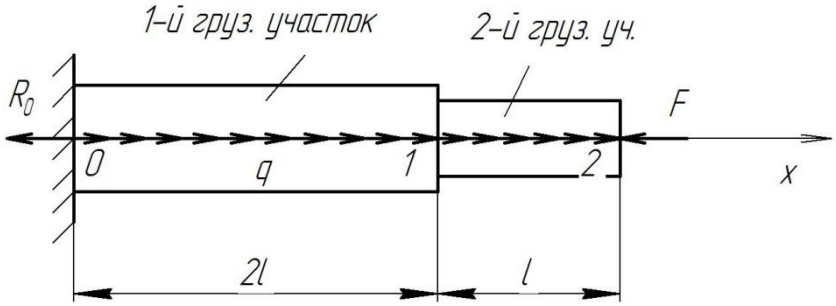


Рис.1.22. Расчетная схема стержня задачи 10

Из условия равновесия стержня, определим реакцию в заделке R_0.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0,$$

$$-R_0 + q \cdot 3l - F = 0 \Rightarrow R_0 = 3ql - F.$$

Вычислим внутреннюю силу на 1-м и 2-м грузовых участках.

1-й грузовой участок (рис.1.23):

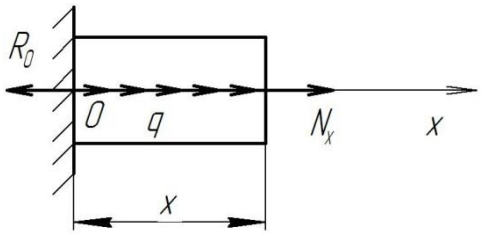


Рис.1.23. Расчетная схема 1-го грузового участка

$$-R_0 + qx + N_x = 0 \Rightarrow N_x = R_0 - qx = 3ql - F - qx;\ x \in [0;2l].$$

2-й грузовой участок (рис.1.24):

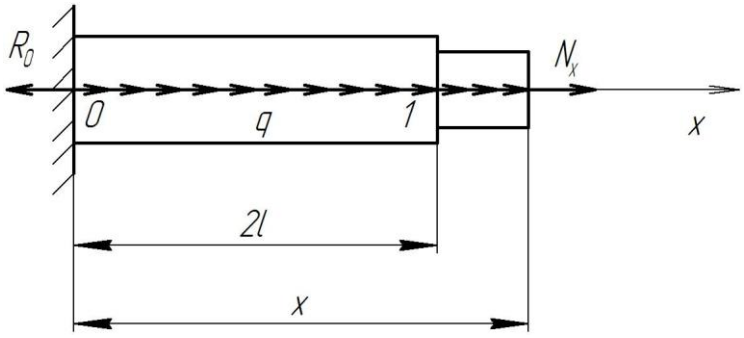


Рис.1.24. Расчетная схема 2-го грузового участка.

$$-R_0 + q \cdot 2l + q(x-2l) + N_x = 0 \Rightarrow N_x = R_0 - 2ql - q(x-2l);\ x \in [2l;3l].$$

$$N_x = 3ql - F - 2ql - q(x-2l) = ql - F - q(x-2l).$$

Определим перемещение стрежня в точке 1.

$$\delta_1 = \frac{1}{2EA}\int_0^{2l}(3ql - F - qx)dx = \frac{1}{2EA}\left[\int_0^{2l}2qldx - \int_0^{2l}Fdx - \int_0^{2l}qxdx\right]$$

$$\delta_1 = \frac{1}{EA}\left[6ql^2 - 2Fl - \frac{qx^2}{2}\frac{qx^2}{2}\Big|_0^{2l}\right] = \frac{1}{EA}\left[6ql^2 - 2Fl - 2ql^2\right] = \frac{1}{2EA}[4ql^2 - 2Fl].$$

Вычислим перемещение стержня в точке 2.

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1}{EA}\int_{2l}^{3l}(ql - F - qx + 2ql)dx = \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[\int_{2l}^{3l}qldx - \int_{2l}^{3l}Fdx - \int_{2l}^{3l}qxdx + \int_{2l}^{3l}2qldx\right] =$$

$$= \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[ql^2 - Fl - \frac{qx^2}{2}\Big|_{2l}^{3l} + 2ql^2\right] = \delta_1 + \frac{1}{EA}\left[ql^2 - Fl - \frac{5ql^2}{2} + 2ql^2\right]$$

Из условия задачи приравняем перемещение стержня в точке 2 к нулю и вычислим значение силы *F*.

$$\delta_2 = \frac{1}{2EA}(4ql^2 - 2Fl) + \frac{1}{EA}(ql^2 - Fl - \frac{5ql^2}{2} + 2ql^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2EA}(4ql^2 - 2Fl) + \frac{1}{2EA}(2ql^2 - 2Fl - 5ql^2 + 4ql^2) = 0,$$

$$4ql^2 - 2Fl + 2ql^2 - 2Fl - 5ql^2 + 4ql^2 = 0,$$

$$5ql^2 = 2Fl + 2Fl = 4Fl \Rightarrow F = \frac{5}{4}ql = 1{,}25ql\,.$$

Таким образом, длина стержня не изменится при значении силы $F = 1{,}25ql$.

Задача № 1.11.

На рисунке 1.25 показан стержень, нагруженный силой *F*. Заданы величины *F,l,E,A*. Предел прочности материала стержня на сжатие $\sigma_{вс}$ связан с пределом прочности материала на растяжение $\sigma_{вр}$ соотношением

$\sigma_{вс} = 5\sigma_{вр}$. При защемлении правого конца стержня его прочность уменьшится в _____ раз(-а).

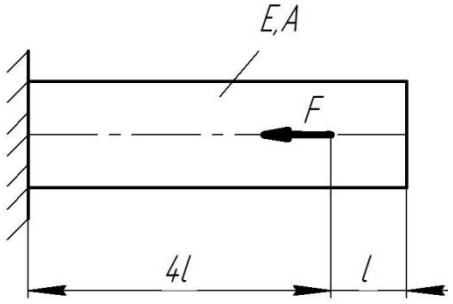


Рис.1.25. Постановка задачи 1.11

Решение:

Обозначим координатную ось и реакцию в заделке (рис. 1.26):

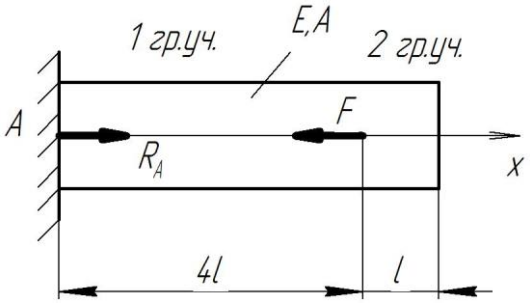


Рис.1.26. Расчетная схема к задаче 1.11

Из условия равновесия стержня вычислим реакцию в точке А (R_A), проецируя силы на ось х:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \quad ;$$

$$R_A - F = 0 \Rightarrow R_A = F\,.$$

Вычислим значение внутренней силы N_x на первом и втором грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис. 1.27)

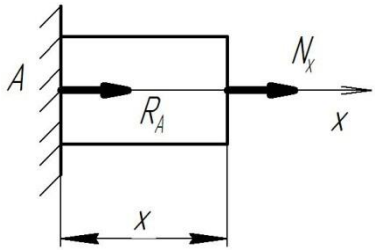


Рис.1.27. Расчетная схема первого грузового участка

Проецируем силы на ось х и и составляем условие равновесия стержня

$$R_A + N_x = 0 \Rightarrow N_x = -R_A = -F\,.$$

Второй грузовой участок (рис. 1.28)

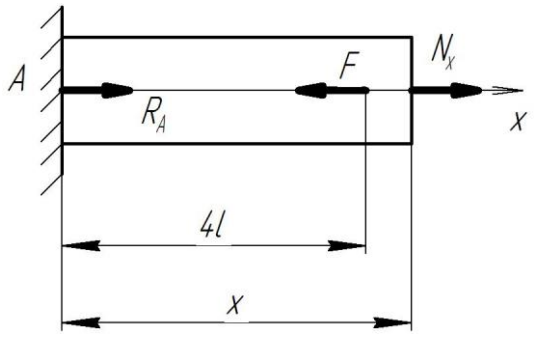


Рис.1.28. Расчетная схема второго грузового участка

$$R_A - F + N_x = 0 \Rightarrow N_x = F - R_A = F - F = 0$$

При растяжении-сжатии стержня возникает нормальное напряжение которое определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{N_x}{A}\,.$$

На первом грузовом участке возникают сжимающие нормальные напряжения $\sigma = -\frac{F}{A}$.

Вычислим внутреннюю силу N_x, возникающую при защемлении правого конца стержня (рис. 1.29).

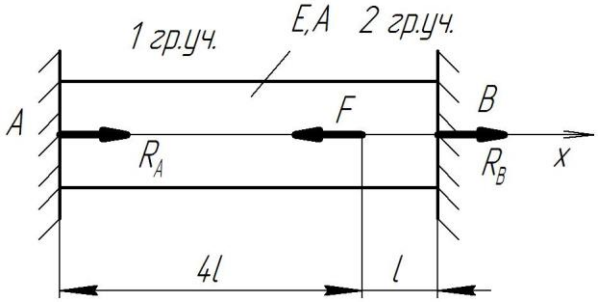


Рис.1.29. Расчетная схема стержня при защемлении правого конца.

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$R_A - F + R_B = 0.$$

Задача статически неопределимая. Второе уравнение получим, используя метод перемещений. Условно отбрасываем левую заделку. В точке А стержень переместиться на δ_A, а под действием силы F перемещение

составит δ_F. Т.к. на самом деле в точке A заделка существует, то суммарное перемещение стержня от действия сил R_A и F будет равно нулю.

$$\Delta l_A - \Delta l_F = 0,$$

$$\frac{R_A \cdot 5l}{EA} - \frac{Fl}{EA} = 0 \Rightarrow R_A \cdot 5l = Fl \Rightarrow R_A = \frac{F}{5},$$

$$R_B = F - R_A = F - \frac{F}{5} = \frac{4}{5}F.$$

Вычислим внутреннюю силу N_x на первом и втором грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис. 1.27)

$$R_A + N_x = 0 \Rightarrow N_x = -R_A = -\frac{F}{5}.$$

На первом грузовом участке возникают сжимающие нормальные напряжения $\sigma = -\frac{F}{5A}$.

Второй грузовой участок (рис. 1.28)

$$R_A - F + N_x = 0 \Rightarrow N_x = F - R_A = F - \frac{F}{5} = \frac{4}{5}F.$$

На втором грузовом участке возникают растягивающие нормальные напряжения $\sigma = \frac{4F}{5A}$.

Для того, чтобы определить во сколько раз уменьшилась прочность стержня при защемлении его правого конца, сравним сжимающие напряжения на первом грузовом участке при отсутствии защемления стержня, с растягивающими напряжениями на втором грузовом участке при наличие защемления правого конца, с учетом равенства:

$$\sigma_{вс} = 5\sigma_{вр} \Rightarrow \frac{F}{A} = 5\frac{4}{5A}F.$$

Ответ: При защемлении правого конца стержня его прочность уменьшится в 4 раза.

Задача 1.12

На рис. 1.30 показан стержень, нагруженный распределенной нагрузкой q, изменяющейся по высоте стержня по линейной зависимости. Заданы величины q, l, EA. Найти перемещение сечения В.

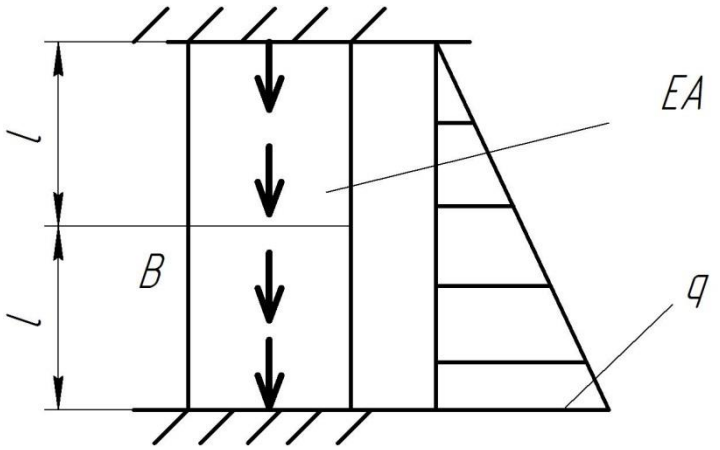


Рис.1.30 Постановка задачи 1.12

Решение:

Разложим заданную нагрузку на составляющие 1 и 2. (рис.1.31)

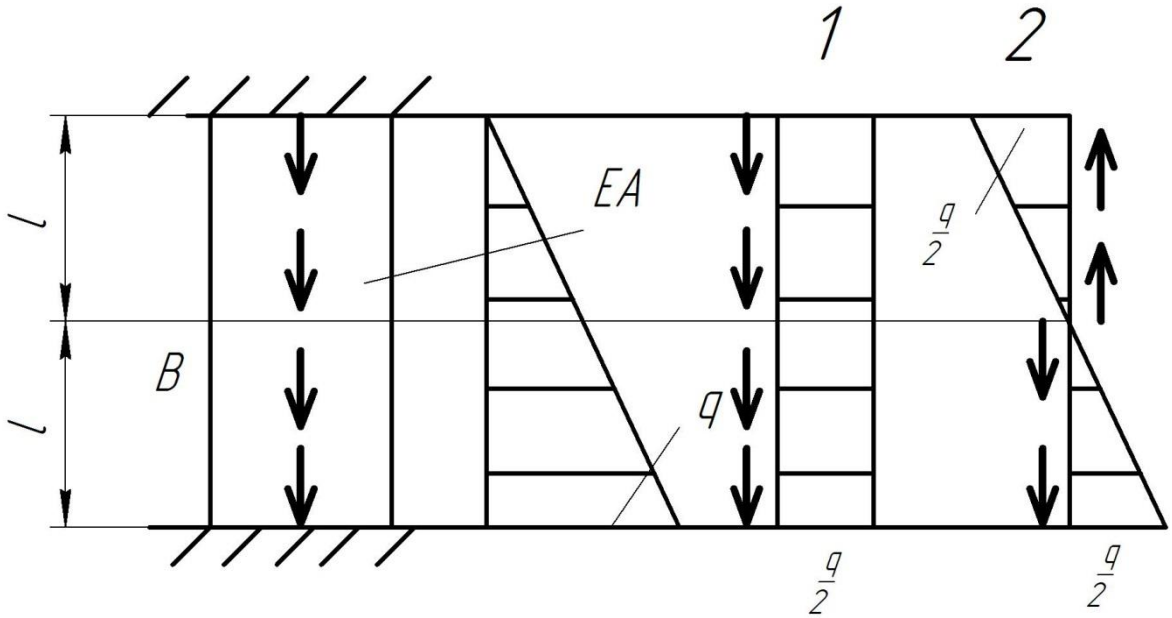


Рис.1.31 Разложение эпюры интенсивности нагрузки q на две составляющие

Учитывая, что при нагрузке 2 (рис.1.31) перемещение стержня равно нулю, вычислим перемещение стержня от нагрузки 1 (рис.1.32).

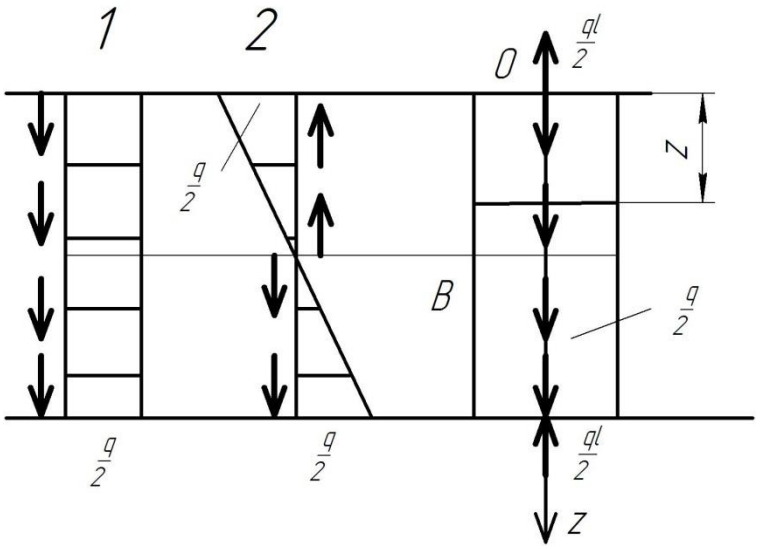


Рис.1.32 Схема к расчету перемещения сечения В

$$\delta_B = \int_0^l \frac{\left(\frac{ql}{2} - \frac{q}{2}z\right)dz}{EA} = \int_0^l \frac{ql}{2EA}dz - \int_0^l \frac{qz}{2EA}dz = \frac{ql^2}{2EA} - \frac{ql^2}{4EA} = \frac{ql^2}{4EA}$$

2. КРУЧЕНИЕ И СДВИГ

Кручением называют такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент, т. е. силовой фактор, вызывающий круговое перемещение сечения относительно оси, перпендикулярной этому сечению, либо препятствующий такому перемещению. Другими словами - деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных его оси приложить пару или пары сил.

Сдвигом (срезом) называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила. На сдвиг работают заклепки, болты шарнирных соединений, цапфы крепления стоек шасси, пальцы соединения тяг, поршневые пальцы, стенки лонжеронов крыла и др. элементы конструкций. Простейшим примером сдвига является резание ножницами. При сдвиге поперечные сечения бруса смещаются, оставаясь в параллельных плоскостях.

При кручении возникает внутренняя сила, крутящий момент M_x, который является положительным , когда пара сил стремится вращать брус против часовой стрелки, если смотреть с конца стрелки внешней нормали, проведенной на площадке рассечения бруса и отрицательным, когда пара сил

стремится вращать брус по часовой стрелки, если смотреть с конца стрелки внешней нормали, проведенной на площадке рассечения бруса.

Различают моменты сил сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенный момент $M_x,(H \cdot м)$ - это момент, действующий на тело по малой площадке (условно считают, – приложен в точке). Распределенные моменты - это моменты, действующие на части объема, поверхности или линии. Распределенные моменты характеризуются интенсивностью (m), т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил, $\frac{H \cdot м}{м^3}$), на единицу площади (в случае поверхностных сил, $\frac{H \cdot м}{м^2}$), на единицу длины (в случае действия сил по линии, $\frac{H \cdot м}{м}$).

Мóдуль сдвига (G, МПа) — физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться сдвиговой деформации.

Задача № 2.1.

На рис. 2.1 показан стержень круглого поперечного сечения, жестко защемленный по концам. Интенсивность распределенного момента по длине стержня изменяется по линейному закону – от нуля до m. Заданы величины G, I_ρ, l, m. Угол поворота среднего сечения стержня по абсолютной величине равен $\frac{ml^2}{GI_\rho}$.

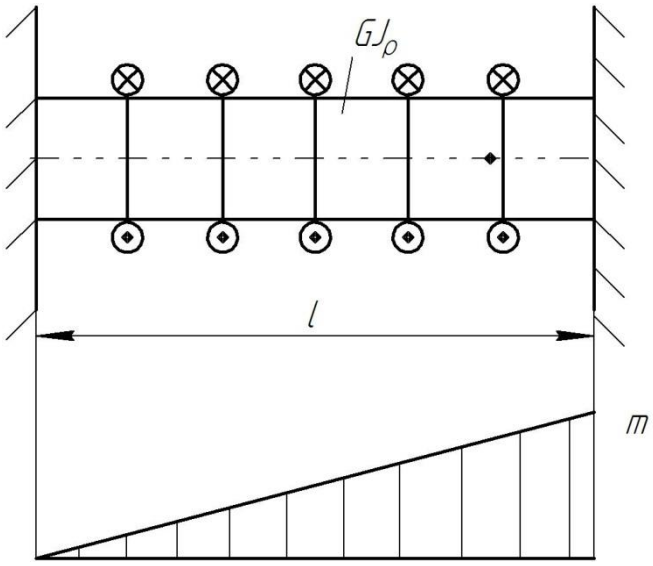


Рис. 2.1. Постановка задачи 2.1

Решение:

Обозначим координатную ось и реакции в заделках (рис. 2.2).

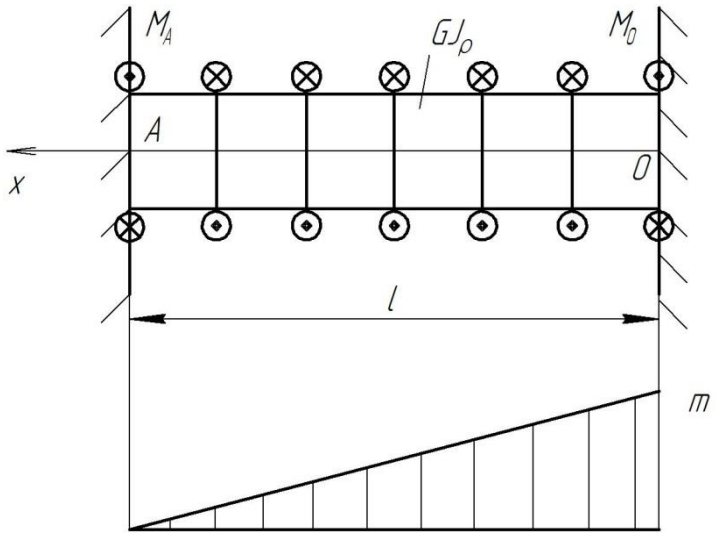


Рис.2.2. Расчетная схема задачи 2.1

Составим уравнение равновесия стержня.

$$-M_A+\frac{1}{2}ml-M_B=0.$$

В одном уравнении два неизвестных параметра M_A, M_B. Задача является статически неопределимой. Для решения задачи необходимо составить второе уравнение, используя метод перемещений. Представим, что отсутствует левая заделка. Тогда поворот стержня в точке А обозначим φ_{M_A}, а поворот стержня от действия распределенного момента φ_m. Сумма этих углов поворота равна нулю, т.к. слева и справа на самом деле есть заделки.

$$\varphi_{M_A}+\varphi_m=0,$$

$$\frac{1}{GJ_\rho}\left[-M_A l+\frac{1}{2}ml^2\right]=0\Rightarrow M_A=\frac{1}{2}ml.$$

Определим момент внутренних сил M_x.

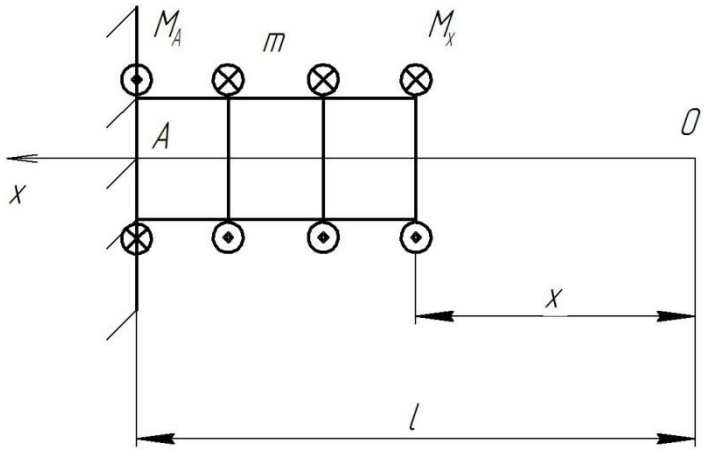


Рис. 2.3. Расчетная схема грузового участка

Запишем уравнение равновесия грузового участка

$$-M_A + m(l-x) + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M_A - m(l-x) = \frac{1}{2}ml - m(l-x).$$

Теперь определим угол поворота среднего сечения стержня. Т.к. в середине стержня распределенный момент равен $\frac{m}{2}$, то это значение подставляем в уравнение.

$$\varphi = \frac{1}{GJ_\rho}\int_0^{\frac{l}{2}}(\frac{1}{2}\frac{m}{2}l - \frac{m}{2}l + \frac{m}{2}x)dx = \frac{1}{GJ_\rho}\int_0^{\frac{l}{2}}(-\frac{ml}{4} + \frac{m}{2}x)dx = \frac{1}{GJ_\rho}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{ml}{4}dx + \int_0^{\frac{l}{2}}\frac{m}{2}xdx\right]$$

$$\varphi = \frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{4}ml\frac{l}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{l}{2}}\right] = \frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{8}ml^2 + \frac{m}{4}\frac{l^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{1}{8}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2\right] = \frac{1}{GJ_\rho}\left[-\frac{2}{16}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2\right] = -\frac{1}{16}\frac{ml^2}{GJ_\rho} = -0{,}0625\frac{ml^2}{GJ_\rho}$$

Ответ: Угол поворота среднего сечения стержня по абсолютной величине равен $0{,}0625\ \frac{ml^2}{GI_\rho}$.

Задача № 2.2.

Стержень круглого сечения диаметром d нагружен моментами M_1 и M_2 (рис. 2.4). Модуль сдвига материала G и длина l известны. Какое значение принимает отношение моментов $\frac{M_1}{M_2}$, когда момент в правой заделке равен нулю.

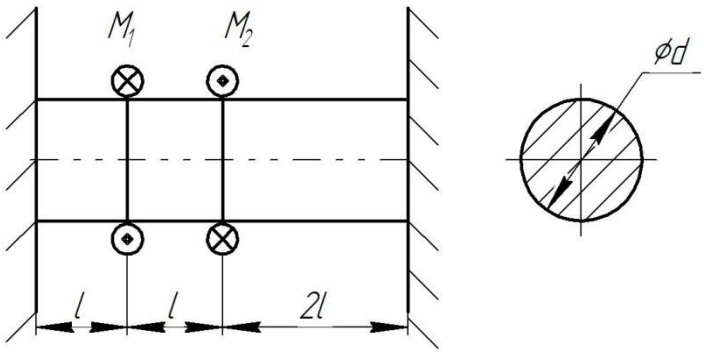


Рис. 2.4. Постановка задачи 2.2

Решение:

В левой и правой заделке действуют моменты M_A и M_B (рис. 2.5).

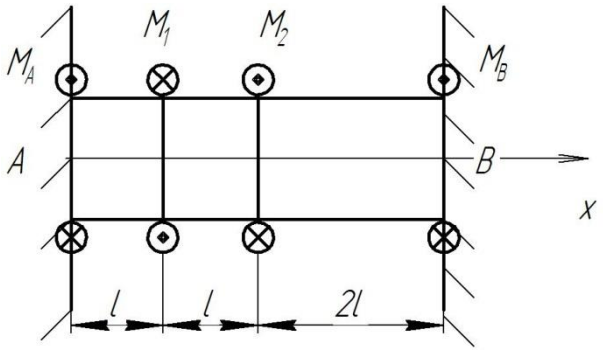


Рис. 2.5. Расчетная схема задачи 2.2

.

Уравнение равновесия стержня имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0,$$

$$M_A - M_1 + M_2 + M_B = 0. \qquad (2.1)$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений.

Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A, M_1, M_2 (рис. 2.6).

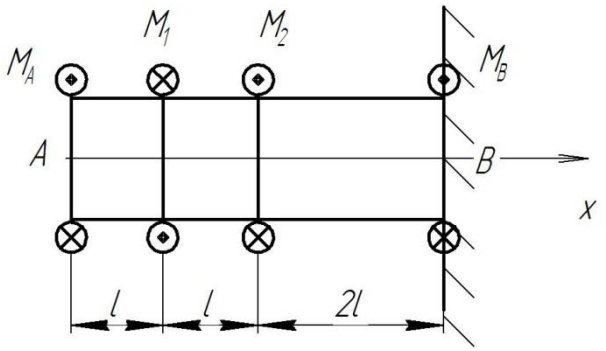


Рис. 2.6. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов сил будет равна нулю.

$$\varphi_A + \varphi_1 + \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{M_A \cdot 4l}{GI_\rho} - \frac{M_1 \cdot 3l}{GI_\rho} + \frac{M_2 \cdot 2l}{GI_\rho} = 0,$$

$$M_A \cdot 4l - M_1 \cdot 3l + M_2 \cdot 2l = 0,$$

$$M_A = \frac{3M_1 - 2M_2}{4}.$$

Подставляем значение момента сил M_A в уравнение (2.1)

$$\frac{3M_1}{4} - \frac{2M_2}{4} - M_1 + M_2 + M_B = 0,$$

$$-\frac{1}{4}M_1 + \frac{2}{4}M_2 + M_B = 0.$$

По условию задачи полагаем $M_B = 0$. Тогда получаем

$$-M_1 + 2M_2 = 0 \Rightarrow M_1 = 2M_2 \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 2.$$

Задача № 2.3.

Ступенчатый стержень нагружен моментами M_1 и M_2. Диаметры D и d, длина l заданы. Участки стержня будут равнопрочны, когда отношение $\frac{M_2}{M_1}$ равно?

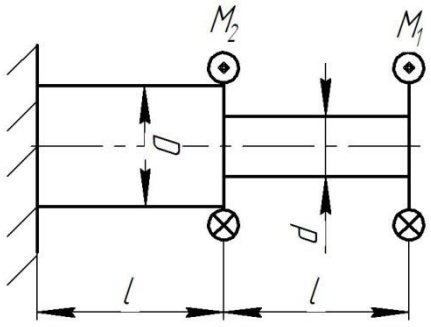


Рис. 2.7. Постановка задачи 2.3

Решение:

Обозначим момент в заделке, координатную ось x и грузовые участки (рис. 2.8).

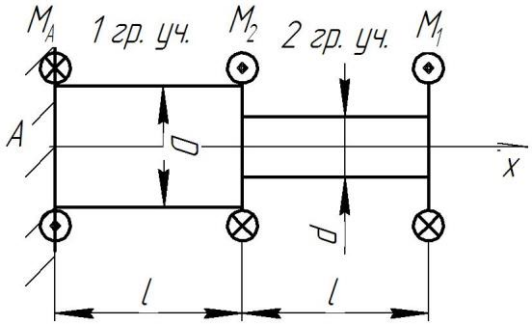


Рис. 2.8 Расчетная схема

Реакцию в заделке (момент M_A) вычислим из условия равновесия стержня.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0;$$

$$-M_A + M_1 + M_2 = 0 \Rightarrow M_A = M_1 + M_2.$$

Вычислим момент внутренних сил M_x на первом грузовом участке (рис. 2.9).

$$-M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M_A = M_1 + M_2.$$

Вычислим момент внутренних сил M_x на втором грузовом участке (рис.2.10).

$$-M_A + M_2 + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M_A - M_2 =$$
$$= M_1 + M_2 - M_2 = M_1$$

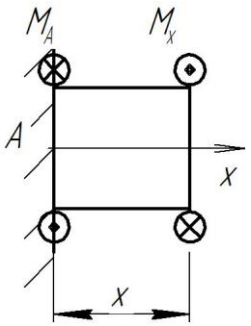


Рис. 2.9. Расчетная схема моментов сил на первом грузовом участке

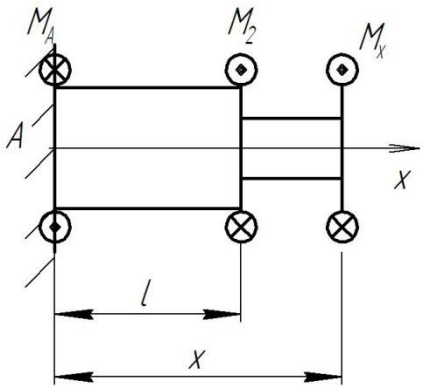


Рис. 2.10. Расчетная схема моментов сил на втором грузовом участке

По условию задачи участки стержня должны быть равнопрочны, т.е. должно выполняться равенство:

$$\tau_{1гр.уч.} = \tau_{2гр.уч.},$$

$$\tau_{1уч.} = \frac{M_{x1уч}}{W_{\rho 1уч}}; \tau_{2уч} = \frac{M_{x2уч}}{W_{\rho 2уч}},$$

$$\frac{(M_1 + M_2)\cdot 16}{\pi D^3} = \frac{M_1 \cdot 16}{\pi d^3} \Rightarrow (M_1 + M_2)d^3 = M_1 D^3 \Rightarrow M_1 d^3 + M_2 d^3 - M_1 D^3 = 0$$

$$M_1(d^3 - D^3) + M_2 d^3 = 0 \Rightarrow M_2 d^3 = M_1(D^3 - d^3),$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{D^3 - d^3}{d^3} = \frac{D^3}{d^3} - 1.$$

Задача № 2.4.

Брус круглого поперечного сечения жестко заделан обоими концами и нагружен моментом М (рис.2.11) . Дано: a, b, M, G, J_ρ. Построить эпюры крутящего момента M_x и угла закручивания φ_x.

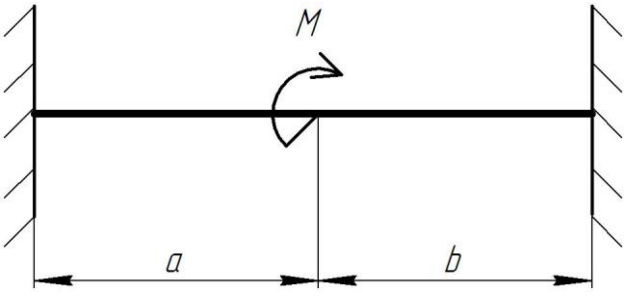


Рис. 2.11. Постановка задачи 2.4

Решение:

Обозначим координатную ось, реакции в заделках и грузовые участки (рис. 2.12).

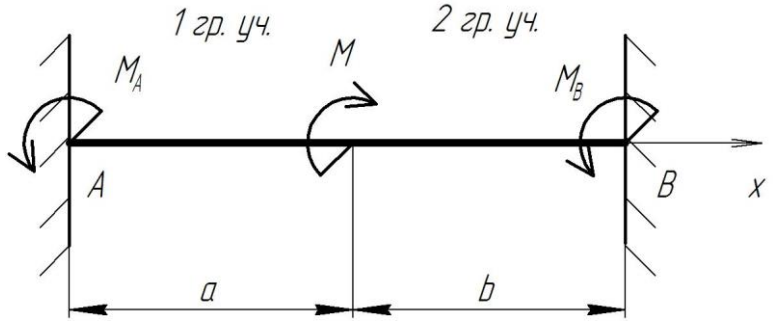


Рис.2.12 Расчетная схема

Запишем уравнение равновесия бруса:

$$\sum M = M_A - M + M_B = 0. \qquad (2.3)$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A, M (рис. 2.13).

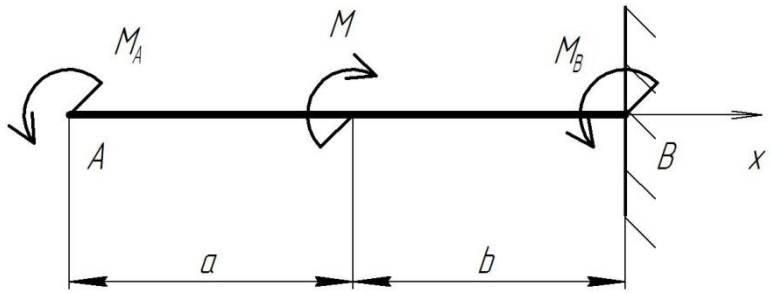


Рис. 2.13. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов сил будет равна нулю.

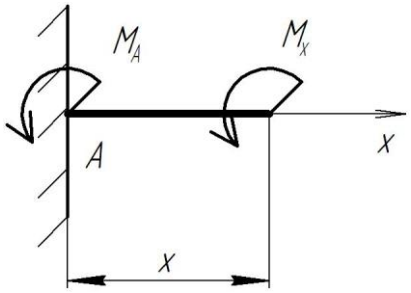
$$\varphi_A + \varphi = 0,$$

$$\frac{M_A(a+b)}{GJ_\rho} - \frac{Mb}{GJ_\rho} = 0 \Rightarrow M_A(a+b) - Mb = 0 \Rightarrow M_A = \frac{Mb}{a+b}.$$

Из уравнения (2.3) вычислим момент M_B.

$$M_B = M - M_A = M - \frac{Mb}{a+b} = \frac{M(a+b)}{a+b} - \frac{Mb}{a+b} = \frac{Ma}{a+b}.$$

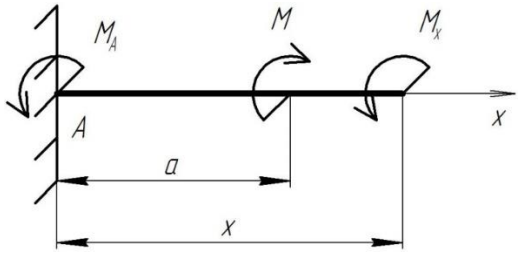
Теперь рассчитаем крутящий момент M_x на первом и втором грузовых участках.



$$M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{Mb}{a+b}$$

$$x \in [0; a]$$

Рис. 2.14. Расчетная схема первого грузового участка



$$M_A - M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M - M_A = \frac{Ma}{a+b}$$

$$x \in [a, a+b]$$

Рис. 2.15. Расчетная схема второго грузового участка

Угол закручивания φ в точках *A* и *B* равен нулю, а на границе первого и второго грузового участка $\varphi = \int_0^a \frac{M_x dx}{GJ_\rho} = -\frac{Mba}{(a+b)GJ_\rho}$.

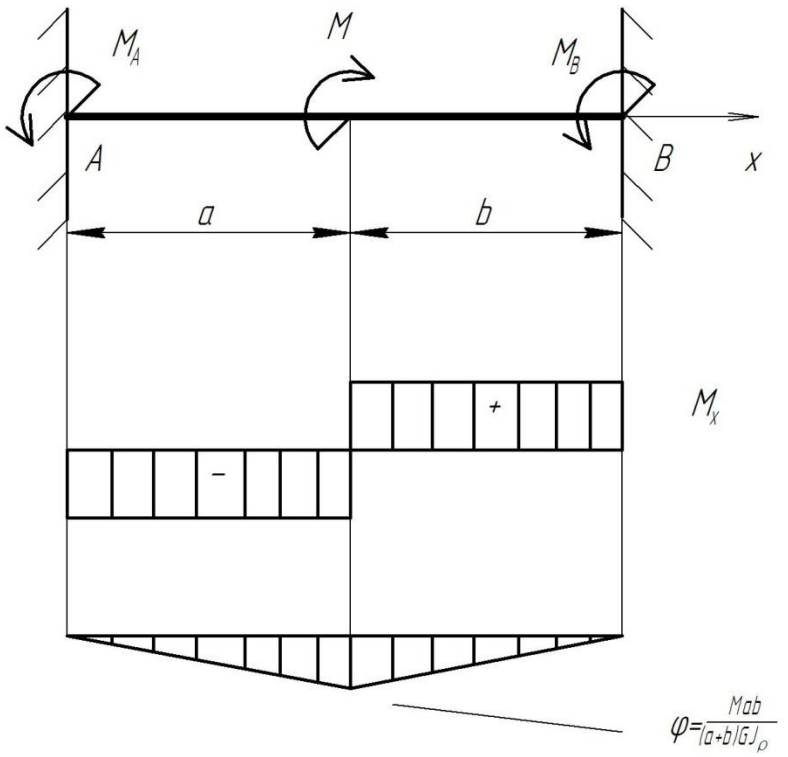


Рис. 2.16. Эпюры крутящего момента M_x и угла поворота φ

Эпюры крутящего момента M_x и угла закручивания φ показаны на рис. 2.16

Задача № 2.5.

На рисунке 2.17 показан стержень жестко защемленный по концам и нагруженный двумя моментами М. Жесткость GJ_ρ по длине стержня постоянна. При каком значении коэффициента α все три участка стержня будут равнопрочны?

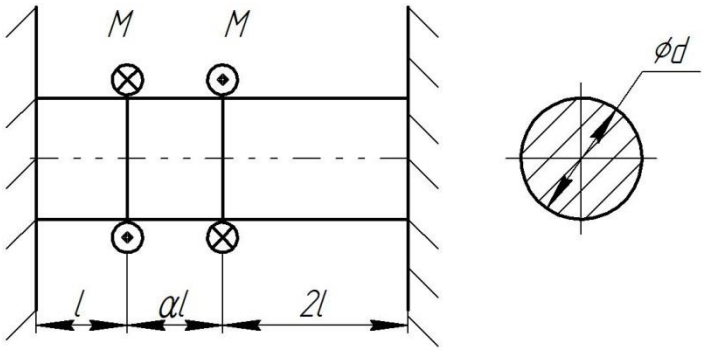


Рис. 2.17. Постановка задачи 2.5

Решение:

Обозначим координатную ось, реакции в заделках и грузовые участки (рис. 2.18).

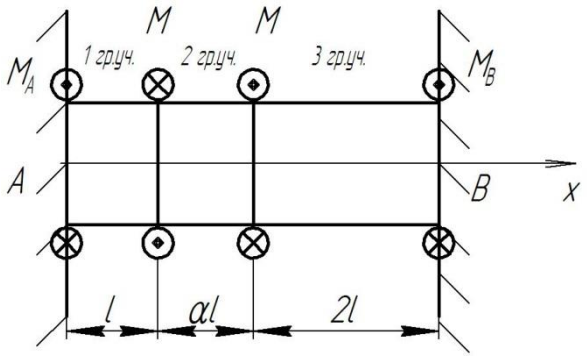


Рис. 2.18. Расчетная схема задачи 2.5

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A - M + M + M_B = 0 \Rightarrow M_A = -M_B . \qquad (2.4)$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A и M (рис.2.24).

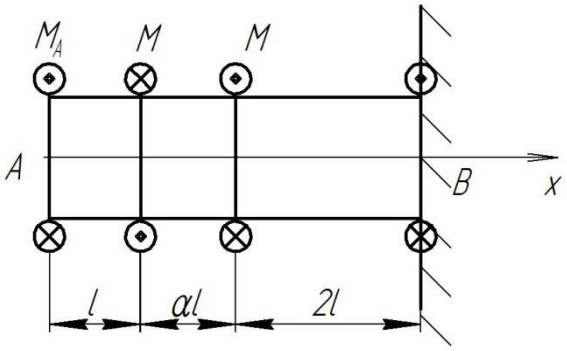


Рис. 2.19. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов сил будет равна нулю.

$$\varphi_A + \varphi^1 + \varphi^2 = 0 , \qquad (2.5)$$

Выразим слагаемые уравнения (2.5)

$$\frac{M_A(l + \alpha l + 2l)}{GJ_\rho} - \frac{M(\alpha l + 2l)}{GJ_\rho} + \frac{M \cdot 2l}{GJ_\rho} = 0 ,$$

$$M_A(l+\alpha l+2l)-M(\alpha l+2l)+2Ml=0,$$

$$M_A=\frac{M(2l+\alpha l)-2Ml}{3l+\alpha l}=\frac{\alpha Ml}{l(3+\alpha)}=\frac{\alpha M}{3+\alpha}.$$

Теперь рассчитаем крутящий момент внутренних сил M_x последовательно на трех грузовых участках.

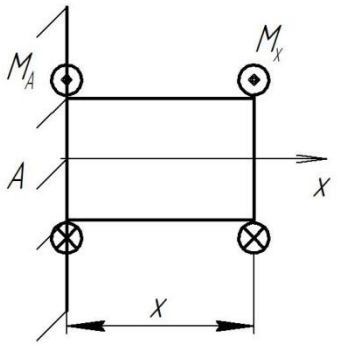


Рис. 2.20. Расчетная схема первого грузового участка

$$M_A+M_x=0\Rightarrow M_x=-M_A=-\frac{\alpha M}{3+\alpha}$$

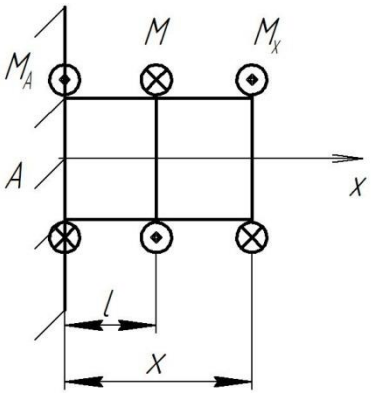


Рис. 2.21. Расчетная схема второго грузового участка

$$M_A-M+M_x=0\Rightarrow M_x=M-M_A=$$
$$=M-\frac{\alpha M}{3+\alpha}=\frac{M(3+\alpha)-\alpha M}{3+\alpha}\Rightarrow M_x=\frac{3M}{3+\alpha}$$

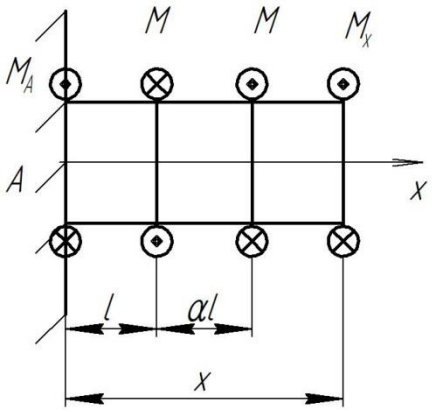


Рис. 2.22. Расчетная схема третьего грузового участка

$$M_A-M+M+M_x=0\Rightarrow M_x=-\frac{\alpha M}{3+\alpha}$$

Для того, чтобы все три грузовых участка стержня были равнопрочны, должно выполняться равенство:

$$\tau_x^{1уч.} = \tau_x^{2уч.} = \tau_x^{3уч.} \Leftrightarrow \frac{\left|M_x^{1уч.}\right|}{W_\rho} = \frac{\left|M_x^{2уч.}\right|}{W_\rho} = \frac{\left|M_x^{3уч.}\right|}{W_\rho}.$$

Т.е. должно выполняться следующее равенство:

$$\frac{\alpha M}{3+\alpha} = \frac{3M}{3+\alpha} \Rightarrow \alpha = 3.$$

Задача № 2.6.

На рисунке 2.23 показан стержень круглого поперечного сечения, жестко защемленный по концам. Сечение C после нагружения стержня моментом M поворачивается на угол $\varphi_C = 0{,}01\,рад$. Известны величины: $d = 4см$, $l = 16\,см$, $G = 8 \cdot 10^4\,МПа$, $\tau_т = 120МПа$ – предел текучести материала стержня при чистом сдвиге. Коэффициент запаса прочности стержня равен …

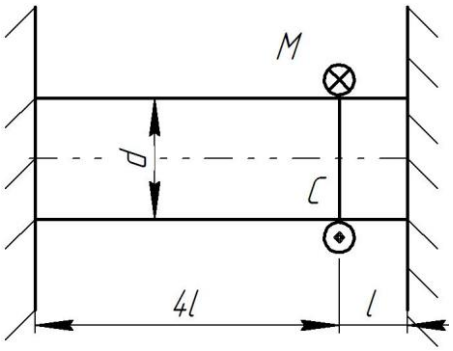


Рис. 2.23. Постановка задачи 2.6

Решение:

Обозначим координатную ось , реакции в заделках и грузовые участки (рис. 2.24).

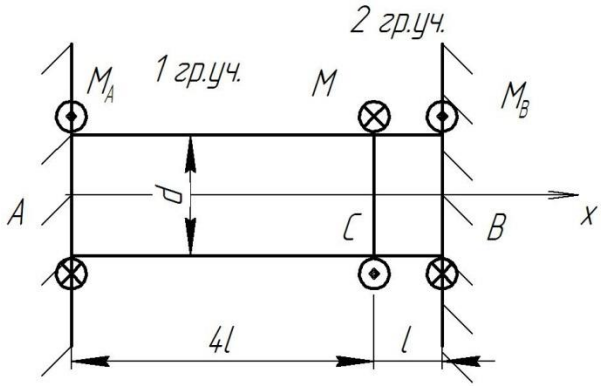


Рис. 2.24. Расчетная схема

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A - M + M_B = 0. \qquad (2.6)$$

Вычислим значение момента М в сечении С.

$$\varphi_c = \frac{Ml}{GJ_\rho} \Rightarrow M = \frac{\varphi_c GJ_\rho}{l} = \frac{0{,}01 \cdot 8 \cdot 10^{10}\ \frac{H}{м^2} \cdot 25{,}12 \cdot 10^{-8}\ м^4}{16 \cdot 10^{-2}\ м} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^2}{16 \cdot 10^{-2}} = 0{,}1256 \cdot 10^4\ Нм = 1256 Нм.$$

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14(4 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 256 \cdot 10^{-8}}{32} = 25{,}12 \cdot 10^{-8}\ м^4.$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы закручивания стержня от действия моментов сил M_A и M (рис. 2.25).

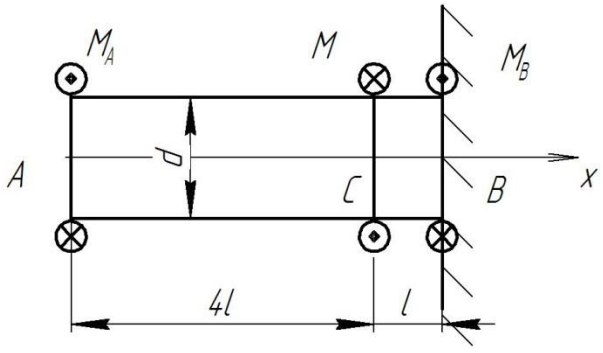


Рис. 2.25. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов сил будет равна нулю.

$$\varphi_A - \varphi_C = 0 \Rightarrow \frac{M_A \cdot 5l}{GJ_\rho} - \frac{Ml}{GJ_\rho} = 0 \Rightarrow M_A \cdot 5l = Ml \Rightarrow M_A = \frac{M}{5} = \frac{1256}{5} = 251{,}2 Нм$$

$$M_B = M - M_A = 1256 - 251{,}2 = 1004{,}8 Нм .$$

Теперь рассчитаем крутящий момент внутренних сил M_x последовательно на двух грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис. 2.26)

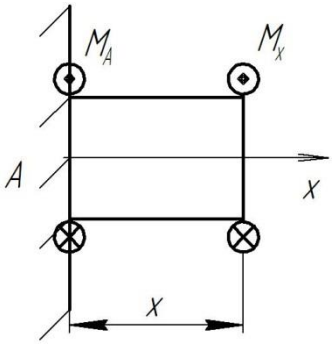


Рис. 2.26. Расчетная схема первого грузового участка

$$M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -251{,}2 Нм$$

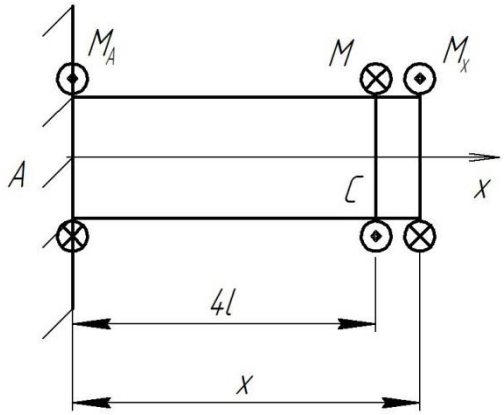


Рис. 2.27. Расчетная схема второго грузового участка

$$M_A - M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M - M_A = $$
$$= 1256 - 251{,}2 = 1004{,}8 Нм$$

Рассчитаем значение наибольшего касательного напряжения.

$$\tau_{x_{\max}} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_k} = \frac{1004{,}8 \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{1004{,}8 \cdot 16}{3{,}14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^3} = \frac{1004{,}8 \cdot 16}{3{,}14 \cdot 64 \cdot 10^{-6}} = 80 \cdot 10^6 \frac{Н}{м^2}$$

За предельно допустимое касательное напряжение $[\tau]$ принимаем значение предела текучести материала стержня при чистом сдвиге.

Коэффициент запаса прочности стержня вычислим используя равенство:

$$\tau_{x_{\max}} = \frac{[\tau]}{n} \Rightarrow n = \frac{[\tau]}{\tau_{x\max}} = \frac{120}{80} = 1{,}5$$

Задача № 2.7

Круглый стержень, показанный на рисунке (2.28), жестко защемлен по концам и нагружен двумя моментами со значением M. Все три участка стержня будут равнопрочными, когда коэффициент k равен …

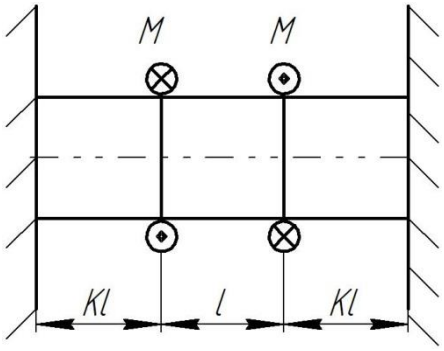


Рис. 2.28. Постановка задачи 2.7

Решение:

Обозначим координатную ось , реакции в заделках и грузовые участки (рис. 2.29).

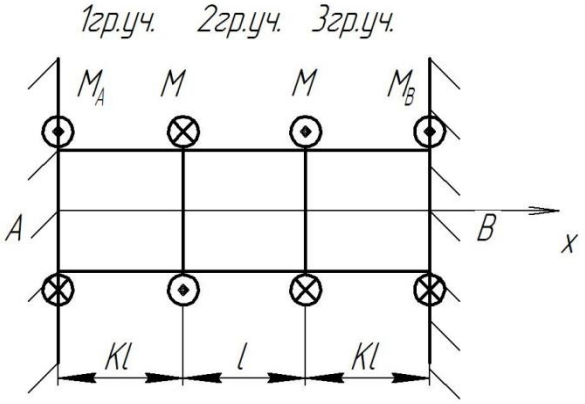


Рис. 2.29. Расчетная схема

Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum M = M_A - M + M + M_B = 0 \Rightarrow M_A = -M_B \,.$$

Задача является статически неопределимой и решается методом перемещений. Мысленно убираем левую заделку и рассмотрим углы

закручивания стержня от действия моментов сил M_A и двух моментов M (рис. 2.30).

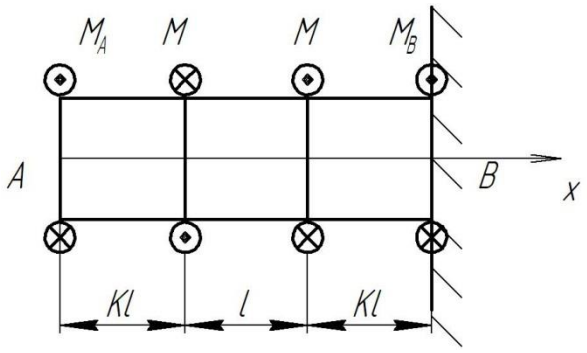


Рис. 2.30. Расчетная схема метода перемещений

Так как на самом деле левая заделка существует, то сумма углов закручивания от действия этих моментов должна быть равна нулю.

$$\varphi_A + \varphi_M^1 + \varphi_M^2 = 0,$$

$$M_A(kl + l + kl) - M(kl + l) + Mkl = 0 \Leftrightarrow 2M_A kl + M_A l - Mkl - Ml + Mkl = 0,$$

$$M_A(2kl + l) = Ml \Rightarrow M_A = \frac{Ml}{2kl + l} = \frac{Ml}{l(2k+1)} = \frac{M}{2k+1},$$

$$M_B = -\frac{M}{2k+1}.$$

Теперь рассчитаем крутящий момент внутренних сил M_x последовательно на трех грузовых участках.

Первый грузовой участок (рис. 2.31)

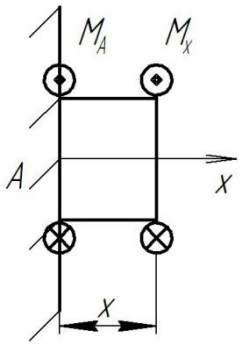


Рис. 2.31 Расчетная схема первого грузового участка

$$M_A + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{M}{2k+1}$$

Второй грузовой участок (рис.2.32)

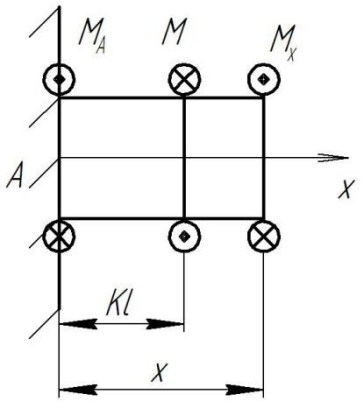


Рис. 2.32. Расчетная схема второго грузового участка

$$M_A - M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = M - M_A = M - \frac{M}{2k+1}$$

Третий грузовой участок (рис.2.33)

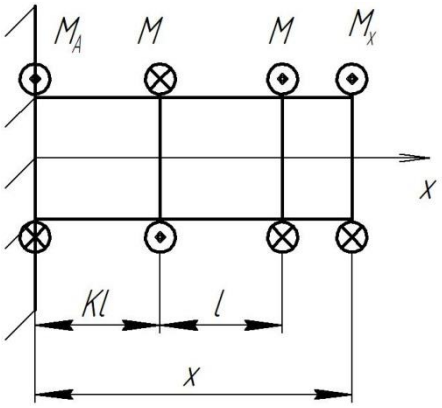


Рис.2.33 Расчетная схема третьего грузового участка

$$M_A - M + M + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -M_A = -\frac{M}{2k+1}.$$

Участки стержня равнопрочны, если выполняется условие:

$$\left|\tau_{1гр.уч.}\right| = \left|\tau_{2гр.уч.}\right| = \left|\tau_{3гр.уч.}\right|,$$

$$\left|\tau_{iгг.уч.}\right| = \frac{|M_{xi}|}{W_k}.$$

$$\frac{M}{2k+1} = M - \frac{M}{2k+1} \Rightarrow \frac{2M}{2k+1} = M \Rightarrow 2M = M(2k+1) = 2Mk + M \Rightarrow$$

$$2 = 2k + 1 \Rightarrow 1 = 2k \Rightarrow k = 0{,}5$$

Задача №2.8

Цилиндрический ступенчатый стержень, жестко закрепленный по концам, скручивается моментом M (рис. 2.34). Величины M, G, l, d известны. Чему равно отношение максимальных касательных напряжений на левом и правом участках?

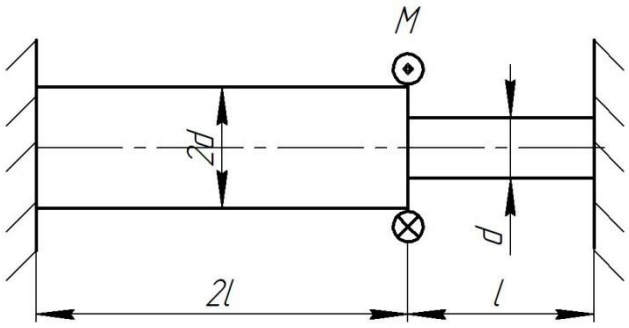


Рис.2.11 Постановка задачи 2.8

Решение:

Угол сдвига в поверхностном слое левого участка равен

$$\gamma_{лев.} = \frac{\varphi \cdot d}{2l}$$

где φ - угол поворота сечения, к которому приложен момент М.

Тогда угол сдвига в поверхностном слое правого участка можно определить по формуле:

$$\gamma_{прав.} = \frac{\varphi \cdot \frac{d}{2}}{l} = \frac{\varphi \cdot d}{2l}$$

В соответствии с законом Гука:

$$\tau_{\max}^{лев.} = \gamma_{лев.} \cdot G$$

$$\tau_{\max}^{прав.} = \gamma_{прав.} \cdot G$$

Тогда отношения максимальных касательных напряжений равно:

$$\frac{\tau_{\max}^{лев.}}{\tau_{\max}^{прав.}} = 1$$

Задача №2.9

Диаметр бруса круглого сечения изменяется по закону $d_z = d_0(1+\frac{3z}{l})$.

Брус закручен равномерно распределенным скручивающим моментом интенсивности m (рис.2.12). Определить максимальные напряжения в брусе. Модуль сдвига материала бруса равен G. Гипотезу плоских сечений для бруса считать справедливой.

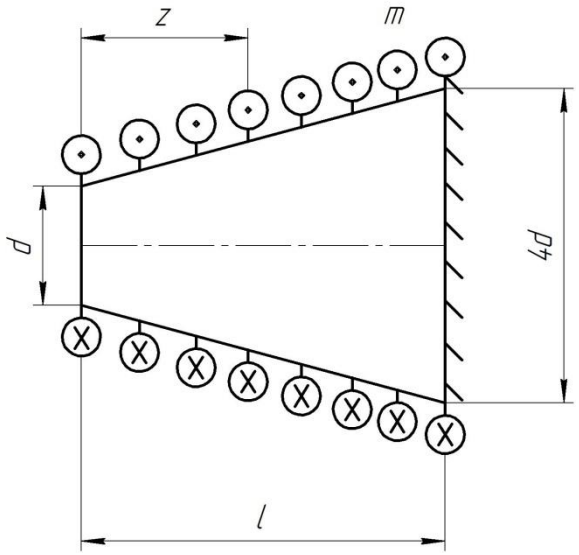


Рис.2.11 Постановка задачи 2.9

Решение:

Крутящий момент в произвольном сечении z определяется по формуле:

$$M_z = m \cdot z$$

Вычисляем максимальные напряжения d в этом сечении по зависимости:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} = \frac{m \cdot z}{\pi \cdot d_0^3 (1+\frac{3z}{l})}$$

Исследуем эти напряжения на экстремум.

$$\frac{d\tau_{\max}}{dz} = \frac{16m}{\pi \cdot d^3}\left[(1+\frac{3z}{l})^3 - 3(1+\frac{3z}{l})^2 \cdot \frac{3z}{l}\right] = 0$$

Отсюда находим положение опасного сечения $z = z_0 = \frac{1}{6}$.

В этом сечении $\tau_{\max} = \frac{64m \cdot l}{81\pi \cdot d_0^3}$

Николаева Елена Александровна
Титов Андрей Валерьевич

Решение олимпиадных задач по сопротивлению материалов

Учебно-методическое пособие

Редактор

Подписано в печать 00.00.00. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 0,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 000 экз. Заказ 000.

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5