МИНОБРНАУКИ РОСИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ»

ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ РЭА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2023

УДК 539.3:621.382
ББК В 852

Прочность конструкций РЭА при различных внешних воздействиях: Учебно-методическое пособие к практическим работам по дисциплине Прикладная механика/ сост. П. Н. Афонин, Е. А. Николаева. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. 80 с.

Рассмотрены конструкции полупроводниковых приборов, особенности построения расчетных схем. Приведены основные расчетные зависимости анализа прочности, жесткости конструкций приборостроения при силовом, температурном и динамическом внешнем воздействии.

Предназначено для бакалавров технических специальностей, обучающих по дисциплине Прикладная механика.

УДК 539.3:621.382
ББК В 852

Рецензент: к.т.н., доцент Тихоненкова О. В. (Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения)

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023

1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ КОНСТРУКЦИЙ РЭА

1.1. Конструкции корпусов радиоэлектронной аппаратуры

Для защиты от внешних механических, климатических и световых воздействий полупроводникового кристалла с активными и пассивными элементами его помещают в корпус. Корпус является важным элементом прибора, от конструкции которого во многом зависит их надежность и нормальная работоспособность.

Основные функции корпуса: объединение всех элементов прибора в общий комплекс; отвод теплоты от полупроводникового кристалла; предотвращение передачи механических воздействий к кристаллу; обеспечение изоляции токоведущих частей; защита от влаги, газов, агрессивных сред.

К корпусам радиоэлектронных приборов предъявляют высокие требования по механической прочности, герметичности, критическим изменениям температур, устойчивости к космической радиации.

Радиоэлектронные приборы делят на полупроводниковые приборы и интегральные микросхемы (ИМС). Согласно ГОСТ 18472-82 (СЭВ 1818-79), все полупроводниковые приборы по форме корпуса, габаритным и присоединительным размерам поделены на соответствующие типы и модификации. Корпуса ИМС подразделяются на пять типов (ГОСТ 17467–79) по форме проекции тела корпуса на плоскость основания и расположению выводов корпуса. Для изготовления корпусов полупроводниковых приборов и ИМС широко используют спаи металла со стеклом и керамикой, а также различные пластмассы.

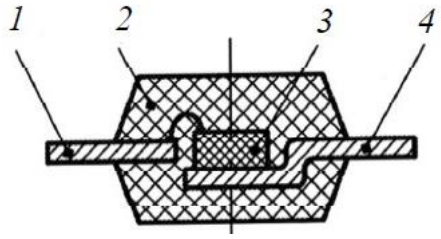


Рис. 1.1. ИМС с полимерным монолитным корпусом.

По конструктивно-технологическим признакам принято различать ИМС с металлостеклянными, металлополимерными и керамическими корпусами. Основные конструктивные элементы корпусов ИМС: основание, крышка, ободок.

На рис. 1.1 показана конструкция ИМС с полимерным монолитным корпусом. Кристалл 3 располагается на кристаллодержателе 4, а контактные площадки кристалла соединяются с выводами корпуса 1 отрезками тонкой проволоки. Корпус 2 выполнен из полимерного материала в процессе герметизации при заливке или прессовании.

Значительное распространение получили ИМС с керамическими корпусами, номенклатура которых достаточно широка и включает в себя однослойные, многослойные, чашечные и безвыводные. Обычно ИМС с многослойным керамическим корпусом состоит из трех спеченных керамических слоев, содержащих металлизированные участки. На среднем слое выполняются металлизированные выводы и контактные площадки, предназначенные для приварки гибких проводников от кристалла и подсоединения выводов корпуса. Безвыводные корпусы отличаются от многослойных тем, что их выводы заменяются металлизированными контактными площадками на самом корпусе, которые припаиваются к контактным площадкам.

На рис. 1.2 приведены две разновидности металлокерамических корпусов ИМС.

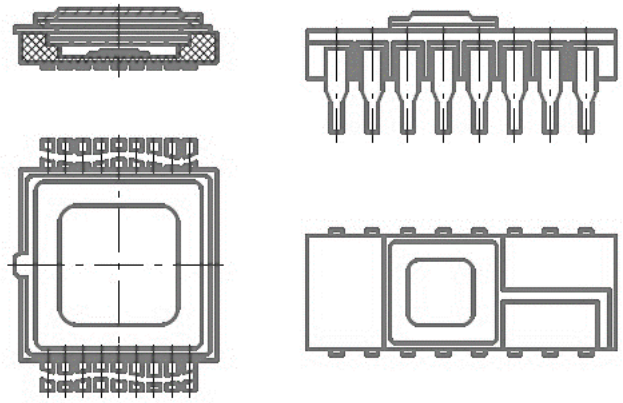


Рис. 1.2. Металлокерамические корпуса ИМС

Корпуса полупроводниковых диодов по конструктивно-технологическим признакам разделяются на стеклянные, металлокерамические, металлические с проходными изоляторами и пластмассовые.

На рис. 1.3 представлена конструкция стеклянного корпуса диода, которая состоит из проволочных кристаллодержателя и иглодержателя и стеклянного корпуса 1. Соединение указанных элементов в единый объект проводят в два этапа. Сначала изготавливают спай проволочного вывода 2 из платинита с бусой 3 из стекла С48-1. Затем вывод с бусой вставляют в стеклянную трубку и спаивают стекло бусы со стеклом трубки. Аналогичную операцию

проводят для второго вывода с бусой; при этом происходит герметизация корпуса.

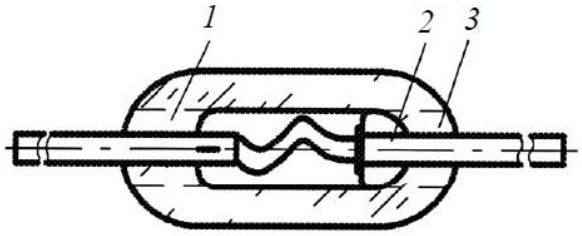


Рис. 1.3. Стеклянный корпус диода

Второй вариант стеклянного корпуса, в отличие от первого, создается одной операцией спая стеклянной трубки с двумя выводами. Часть выводов, которая непосредственно соединяется со стеклом, изготавливается из платинита или молибдена, а та часть, которая со стеклом не соединяется, может быть изготовлена из меди, никеля, платинита.

Рассмотренные стеклянные корпуса являются простыми, малогабаритными, достаточно дешевыми в изготовлении. Существенными недостатками этих корпусов являются невысокая механическая прочность спая металла со стеклом и возможность появления трещин в стекле при многократном изгибании выводов при монтаже.

На рис. 1.4 показана конструкция металлостеклянного корпуса, которая включает в себя два металлических держателя, стеклянную трубку 1 и две переходные коваровые втулки 2.

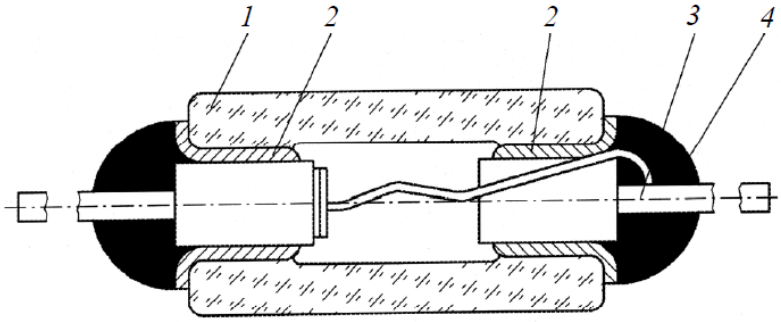


Рис. 1.4. Металлостеклянный корпус диода

Баллон корпуса представляет собой соединение стекла С-48-2 и двух втулок из сплава никеля и ковара 29НК. Металлические втулки служат для центровки держателя и их закрепления при окончательной сборке корпуса прибора. Держатели кристалла и вывода 3 представляют собой отрезки проволочки разных диаметров, соединенные между собой с помощью ударной конденсаторной стыковкой. Окончательную герметизацию корпуса произво-

дят пайкой в конвейерной печи в атмосфере водорода. В качестве припоя используют ПОС-61 (поз. 4).

Вторая модификация металлостеклянного корпуса состоит из баллона, двух разрезных стаканов и двух колпачков с проволочными или с ленточными выводами. Недостатком данного типа корпусов является процесс пайки на заключительном этапе сборки, что может повлиять на прочность корпуса.

На рис. 1.5 показана конструкция металлического корпуса со стеклянным проходным изолятором.

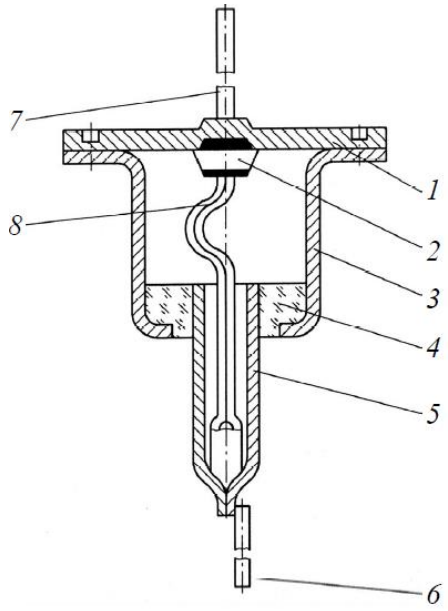


Рис. 1.5. Металлический корпус диода

Корпус состоит из кристаллодержателя 1, изготовленного из ковара или малоуглеродистой стали и баллона. По периферии кристаллодержатель имеет кольцевой выступ, который обеспечивает надежное его соединение с баллоном корпуса 2 при электроконтактной сварке. К внешней части кристаллодержателя приваривают вывод 7 из никеля. Баллон корпуса состоит из металлической трубки 4 и металлической оболочки стеклоизолятора 3, которые соединены между собой прочными металлостеклянными спаями. Оболочку баллона изготавливают холодной штамповкой из ленты из сплавов никеля 29НК или 47НД. Трубку 5 изготавливают из ковара. Для образования прочного герметичного спая оболочки баллона со стеклом и стекла с трубкой используют стекло-таблетки из стекла С-48-2 или С-72-4. При сборке прибора полупроводниковый кристалл припаивают к основанию кристаллодержателя, а верхний вывод 8 от кристалла пропускают через трубку баллона. Баллон соединяют с кристаллодержателем кольцевой электроконтактной сваркой.

Окончательно корпус герметизируют обжимом проварки верхнего конца трубки баллона с пропущенным через нее выводом полупроводникового кристалла. К обжатой части трубки приваривают проволочный вывод 6 из никеля. Конструкция металлического корпуса с проходным изолятором для приборов мощностью свыше 2 Вт отличается соединением баллона с кристаллодержателем, которое осуществляется методом холодной сварки и наличием отверстия в обжатой части трубки. Кристаллодержатель данной конструкции имеет вид шестигранника с винтом, что позволяет крепить корпус на теплоотводящем радиаторе.

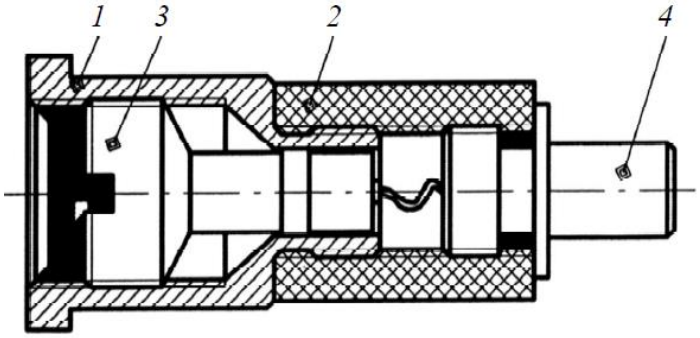


Рис. 1.6. Металлический корпус диода

На рис. 1.6 представлена конструкция корпуса диода СВЧ-диапазона (отличительными чертами данных корпусов являются многоцелевое назначение и унификация деталей). Основными узлами этой конструкции являются керамическая втулка с резьбой 2 из керамики СНЦ, металлическая втулка 1, кристаллодержатель 3 и иглодержатель 4. Металлическая втулка, иглодержатель и кристаллдержатель изготавливаются из латуни. Металлическая втулка соединяется с кристаллодержателем с помощью резьбы. Керамическая втулка соединяется с металлической втулкой и иглодержателем посредством герметизирующих компаундов на основе эпоксидных смол с различными отвердителями.

1.2. Внешние воздействия на элементы конструкций

Любая конструкция должна быть надежной в эксплуатации и экономичной, т. е. должна отвечать требованиям прочности, жесткости и устойчивости. Элементы конструкции должны иметь рациональную форму и размеры. Форма и размеры деталей конструкций зависят от их функционального назначения, от материала, из которого они изготовлены, и от характера внешних воздействий.

Изменение формы и размеров конструкции или ее элементов в результате внешнего воздействия называется *деформацией*.

Деформация считается упругой, если исчезает после устранения вызвавшей ее силы, и остаточной – в противном случае. Свойство элемента конструкции проявлять упругую деформацию называют *упругостью*, остаточную деформацию – *пластичностью*. Свойства упругости и пластичности являются относительными, а не абсолютными. Например, одна и та же стальная пластина в зависимости от приложенной силы может после сгиба выпрямиться полностью либо получить прогиб, который полностью не исчезнет после устранения силы. Значит при малых деформациях она упруга, а при больших – пластична.

Конструкция считается надежной, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при различных внешних воздействиях.

Прочность – способность конструкции или отдельных ее элементов выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь и не проявляя остаточных деформаций.

Жесткость – способность конструкции сопротивляться образованию деформаций, не превышающих допустимых значений.

Устойчивость – способность конструкции противостоять воздействиям, стремящимся вывести ее из состояния статического или динамического равновесия.

Элементы конструкций полупроводниковой техники, а также кристаллы подвергаются механическим и температурным воздействиям в процессе их производства и сборки. Значительные механические воздействия имеют места присоединения элементов конструкций с помощью сварки. Так, например, присоединение гибких внутренних проводников интегральных схем к контактным площадкам, печатных кабелей к контактным площадкам и крышек корпусов к ободкам вызывает уровень давления на свариваемые детали от 10 до 250 МПа. Остаточные напряжения в кристалле появляются уже на заготовительной стадии – резке кристалла. Резка слитка на пластины, шлифовка и полировка могут дать упругие деформации и вызвать соответствующие напряжения.

Наиболее опасной, с точки зрения механических воздействий, является операция присоединения внутренних проводников к кристаллу. При сварке термокомпрессией или с применением ультразвука инструмент оказывает

локальное воздействие на кристалл, деформируя привариваемый проводник. Нормальное давление при сварке золотых проводников разного диаметра при температуре подложки от 300 до 375 °С составляет 90…150 МПа, а при сварке алюминиевых проводников в том же диапазоне температур – 13…14 МПа. Эти напряжения могут привести к растрескиванию кристалла при последующих технологических операциях.

На элементы конструкций полупроводниковых приборов и ИМС в процессе их изготовления и сборки наиболее опасно влияют температурные воздействия. Причинами возникновения напряжений в конструкциях при температурном воздействии являются различные коэффициенты линейного расширения материалов элементов, из которых состоит корпус прибора, или градиент температур в отдельных элементах.

Температурные воздействия на элементы конструкции в технологическом процессе происходят при операциях сварки, пайки, нанесения тонкопленочных и толстопленочных покрытий и др.

При сварке в зоне контакта соединяемых деталей температура достигает 300…700 °С. При этом часто применяется предварительный подогрев деталей до 150…240 °С. Пайка, как правило, происходит при температуре на 30…40 °С выше температуры плавления припоя. Обычно, применяется припой с температурой плавления 190…779 °С. Процессы вжигания толстопленочных паст протекают при температурах 1100…1300 °С. Вакуумное нанесение тонкопленочных покрытий требует нагрева деталей до 500…600 °С.

В полупроводниковых приборах и микросхемах большие напряжения возникают в кристаллах при их постановке на основание корпуса или кристаллодержатель выводной рамки. Здесь напряжения возникают из-за различия температурных коэффициентов линейного расширения материалов, когда сборка кристалл–подложка остывает после завершения процесса. При посадке кристалла методом пайки соединение получается при температурах до 400 °С, а при посадке кристалла приклеиванием соединение образуется при температуре термообработки клея 160…170 °С. Так как материалы соединяемых деталей хрупкие, то в результате нагрева и последующего охлаждения полученное соединение кристалл–подложка подвергается деформации изгиба и в нем возникают напряжения.

Значительные напряжения возникают в элементах конструкции и при их герметизации с применением полимерных материалов. Причиной возникно-

вения напряжений при герметизации полимером является то, что герметизирующий полимерный материал имеет температурный коэффициент линейного расширения, существенно отличающийся от коэффициентов линейного расширения материалов кристалла, подложки или рамки. В результате, после завершения процесса полимеризации при температуре 120…180 °С и охлаждении до комнатной температуры кристалл сжат, а материал подложки растянут. В случае одностороннего покрытия полимерным материалом охлаждение сопровождается деформацией изгиба соединения кристалл–подложка. Усадочные явления, присущие полимерным материалам, являются причиной возникновения напряжений, если полимеризация происходит даже при комнатной температуре.

В процессе эксплуатации конструкции полупроводниковых приборов и ИМС в зависимости от места их установки подвергаются различным внешним воздействиям. С точки зрения прочности конструкций и их элементов, наиболее опасными являются механические и температурные воздействия.

Приборы, устанавливаемые на автомобильных и железнодорожных транспортных средствах, испытывают действие вибрации, ударов, механических перегрузок. Аппаратура, устанавливаемая на морских судах, испытывает совместное действие механических и температурных воздействий.

В особо тяжелых условиях работает аппаратура, устанавливаемая на летательных аппаратах (самолеты, ракеты, различные космические объекты). Здесь она работает в условиях интенсивных кратковременных вибраций, ударов, значительных градиентов цикличности изменяющихся температур, длительных линейных ускорений, внутреннего или внешнего давления.

Таким образом, изделия микроэлектроники в процессе эксплуатация подвергаются различного рода механическим и температурным воздействиям. Анализ уровня механических воздействий показывает, что аппаратура может быть подвержена вибрациям в диапазоне частот колебаний 10…5000 Гц, амплитуд колебаний 0.1…250 мм и виброускорений 2…40 g; ударам с ускорением 147…3924 м/с (15…400 g) и длительностью 6…100 мс; акустическим шумам с частотой колебаний 150…9600 Гц и ускорением звукового давления до 165 дБ, линейным ускорениям 5…50 g.

Температуры, которым подвергается аппаратура в процессе эксплуатации, лежат в следующих пределах: длительный нагрев до 70…400 °С в течение 10…60 мин; длительное охлаждение до минус 10 °С…минус 85 °С в те-

чение 10…60 мин. циклический нагрев и охлаждение от 70…400 °С до –10…–85 °С в течение действия положительной и отрицательной температур от 10 до 60 мин; термоудар 195…200 °С в течение 5 с (время температуры не более 10 с).

Испытания являются окончательной проверкой работоспособности радиоэлектронной аппаратуры в экстремальных условиях. Готовые приборы подвергаются испытаниям в широком диапазоне внешних механических и температурных воздействий. Испытания проводятся на специально разработанных стендах и в специальных камерах тепла и холода по заданиям и программам, учитывающим специфику этих изделий.

Например, интегральные микросхемы испытываются на обнаружение резонансных частот, на виброустойчивость, на вибропрочность, на воздействие одиночных и многократных ударов, на воздействие линейных нагрузок, на прочность выводов при растяжении и при изгибе, на усталостную прочность выводов при изгибе, на прочность при сдвиге кристалл–подложка, на прочность внутренних выводов, на хладо-устойчивость, теплоустойчивость и термоудар.

Испытания на обнаружение резонансных частот проводят в диапазоне 100…20 000 Гц при ускорениях 1…5 g. Испытания на виброустойчивость определяют способность микросхемы быть работоспособной в условиях воздействия вибрационных нагрузок. Диапазон частот при этих испытаниях 100…5000 Гц, ускорения 10…40 g в зависимости от степени жесткости испытаний.

Вибропрочностью оценивается способность элементов конструкции сопротивляться разрушающему действию вибраций. Испытания проводят на частотах 100…1000 Гц при ускорении 10 g, в течение 15 ч и числе циклов изменения частоты 72 или на частотах 100…5000 Гц при ускорении 40 g в течение 7,5 ч и числе циклов 30.

Ударопрочность при действии одиночных ударов проверяется в трех направлениях действия удара при максимальном ускорении 50 000 м/с2 и длительности 0.06…0,5 мс. Ударопрочность при действии многократно ударов проверяется при действии в трех направлениях по 1300 ударов в каждом направлении, максимальном ускорении 1400…1500 м/с2 и длительности 1…3 мс.

Испытание микросхем на воздействие линейных нагрузок проводят на специальных стендах-центрифугах при ускорениях до 20 000 м/с2 и длительности действия нагрузки 1…3 мин.

Испытания на хладоустойчивость проводят при температурах –10…–60 °С, на теплоустойчивость – в диапазоне температур 40…315 °С.

В результате проведения всего комплекса испытаний конструкция и ее отдельные элементы должны удовлетворять условиям прочности, а изделие должно полностью сохранить свою работоспособность.

Таким образом, изделия радиоэлектроники на стадиях изготовления, испытаний и эксплуатации подвергаются различного рода механическим и температурным воздействиям в широком диапазоне силовых и температурных факторов, и результаты испытаний необходимо учитывать. Поэтому при разработке корпусов радиоэлектронной аппаратуры необходимо проводить анализ прочности и жесткости как в целом конструкций, так и отдельных их элементов при различных внешних воздействиях.

Важной задачей при анализе прочностных характеристик конструкции является построение расчетной схемы, адекватной реальной конструкции, и внешним воздействиям, которые она испытывает.

1.3. Расчетные схемы

Проведение прочностных расчетов элементов конструкций радиоэлектроники требует предварительного анализа самой конструкции и внешних воздействий на ее элементы.

Анализ этот начинается с выбора расчетной схемы, т. е. с замены реальной конструкции расчетной моделью некоторой реально выбранной приближенной схемой, пригодной для решения поставленных вопросов с заданной степенью точности. Затем каждая расчетная схема может быть описана более или менее сложной математической моделью.

При выборе расчетной схемы нужно установить, какие конструктивные особенности и нагрузки существенны для решения задачи, а какими можно пренебречь. Для одного и того же объекта может быть предложено несколько расчетных схем, выбор которых зависит от конкретной задачи и требуемой точности.

При переходе от реального объекта к расчетной схеме необходимо схематизировать свойства материала, нагрузки, геометрию объекта и провести схематизацию его закрепления.

1.3.1. Схематизация свойств материала и геометрии.

Конструктивные элементы приборов изготавливаются из различных материалов: металлов, сплавов, полимеров и др. Как правило, материалы имеют неоднородности, несплошности и другие дефекты. Атомистическая теория строения вещества вообще говорит о дискретной структуре. Математическое описание макрообъектов с учетом этих особенностей затруднено. Многие из этих материалов обладают анизотропией. Отказ от учета этого свойства приводит к значительным погрешностям. В то же время учет анизотропии материалов чрезвычайно усложняет расчеты.

Поэтому принимаются следующие гипотезы:

Гипотеза о сплошности материала предполагает, что материал заполняет форму тела сплошь, т. е. в любом элементарном объеме, выделенном в пределах тела, содержится вещество.

Гипотеза об однородности материала предполагает, что в любом элементарном объеме, выделенном в пределах тела, содержится одно и то же вещество, обладающее одинаковыми свойствами.

Гипотеза об изотропности предполагает, что свойства материала в различных направлениях одинаковы. Анизотропные материалы – это материалы, свойства которых зависят от направления. Пример такого материала – дерево: его свойства вдоль волокон отличаются от свойств поперек волокон.

Использование этих гипотез упрощает расчеты, поэтому при схематизации конструкции принято считать все материалы однородными, т. е. обладающими одинаковыми свойствами во всех точках; сплошными, не имеющими пустот, трещин; изотропными, т. е. имеющими одинаковые свойства во всех направлениях.

1.3.2. Схематизация геометрии конструкции.

Следующим шагом составления расчетной схемы является упрощение геометрии реальной конструкции. Все многообразие геометрии реальных тел может быть сведено к схеме стержня, пластины или оболочки. Комбинацией этих трех элементов практически можно описать любые реальные изделия.

Стержень (балка) – элемент, у которого один размеров – длина – много больше двух других размеров. Стержень образуется путем перемещения

плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Эта фигура называется поперечным сечением. Кривую, по которой перемещается центр фигуры, называют осью стержня. Сечение, не перпендикулярное к оси стержня, называют наклонным. В зависимости от формы оси стержень может быть прямым, кривым и пространственно изогнутым. Сечение стержня может быть постоянным и переменным вдоль оси.

Оболочка – тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга. Геометрическое место точек, равноотстоящее от обеих поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью. Если срединная поверхность оболочки является плоскостью, то такую оболочку называют пластиной. Пластины классифицируют по форме очертания контура: круглые, прямоугольные (длинные, короткие), трапециевидные и др. Пластины классифицируют по толщине: плиты (очень толстые), толстые, тонкие, мембраны (очень тонкие). При расчетах различные типы пластин и оболочек описываются различными математическими моделями.

1.3.3. Схематизация закреплений.

Схематизацию закрепления элементов конструкций можно рассмотреть на примере закрепления наиболее часто встречающегося элемента – стержня. Свободное тело в пространстве может совершать три линейных перемещения (в направлении трех взаимно перпендикулярных осей системы координат) и три угловых перемещения (повороты относительно осей системы координат). Для того чтобы закрепить стержень на плоскости, на него следует наложить три связи, в пространстве – шесть связей. Осуществление связей на практике достигается устройством опор. Опоры бываю трех типов: шарнирно-подвижные, шарнирно-неподвижные и жесткозащемленные.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.7, *а*) накладывает на стержень одну связь и позволяет опорному сечению стержня свободно поворачиваться вокруг шарнира, а также перемещаться в горизонтальном направлении. При нагружении стержня возникает одна реакция связи.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.7, *б*) накладывает на стержень две связи и допускает только поворот опорного сечения стержня. При нагружении в опоре возникают две реакции – горизонтальная R_H и вертикальная R_V.

Жесткая заделка препятствует всяким перемещениям конца стержня (рис. 1.7, *в*). В жесткой заделке возникают три реакции связей – горизонталь-

ная R_H, вертикальная R_V и реактивный момент M_R. Для вычисления реакций связей (реакций опор) используются уравнения равновесия.

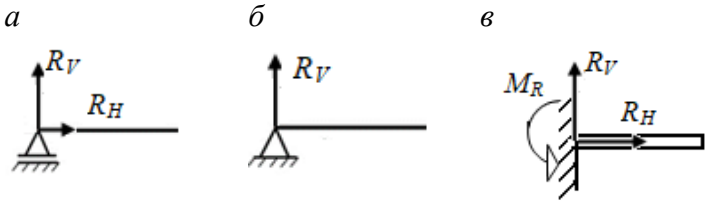


Рис. 1.7. Схематизация закрепления

Закрепление стержней в пространстве выполняется аналогично, но уже в двух плоскостях. Стержневые системы – это совокупность шарнирно или жестко соединенных между собой стержней. Стержневая система, у которой все стержни имеют шарнирное соединение, называется фермой. Стержневая система, у которой стержни имеют жесткое соединение, называется рамой. Фермы и рамы, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, называются плоскими, а в противном случае, называются пространственными.

1.3.4. Схематизация внешних воздействий.

При рассмотрении элемента конструкции (тела) отдельно от окружающих тел действие последних на него заменяют внешними силами. *Внешняя сила* – мера воздействия физических объектов.

По времени действия внешние силы подразделяют на *постоянные*, действующие все время существования изделия, и *временные*, действующие лишь в течение некоторого промежутка времени.

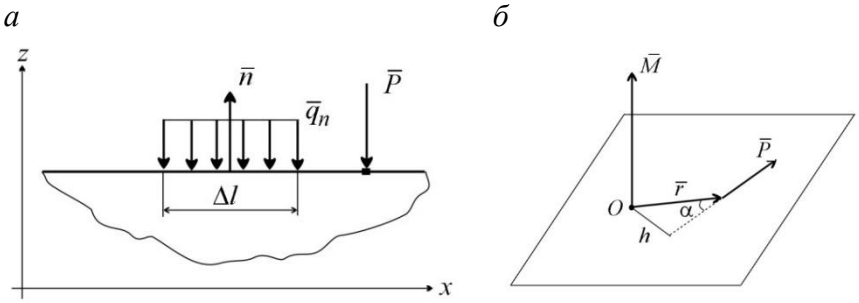


Рис. 1.8. Схематизация внешних воздействий

По характеру действия они бывают статическими и динамическими. *Статические* силы сообщают телу малые ускорения, которыми можно пренебречь при исследовании. *Динамические* силы придают значительные ускорения, которыми пренебрегать не следует. Если конечное изменение внеш-

ней силы и скорости тела, передающего силу, происходит в очень короткий промежуток времени, динамическая сила называется *ударной*.

По месту приложения к телу внешние силы подразделяют на объемные и поверхностные. *Объемные* силы распределены по всему объему, занятому телом. *Поверхностные* распределены по поверхности (рис. 1.8, *а*). Если поверхность соприкосновения очень узкая, то можно считать, что сила распределена по линии – *распределенная* сила. Если площадка, на которой действует поверхностная сила, мала по сравнению с поверхностью всего тела, то поверхностную силу можно считать *сосредоточенной* в точке тела.

Механическую величину, характеризующую внешнее воздействие на тело и определяющую изменение его вращательного движения, называют *моментом силы* (рис. 1.8, *б*).

1.4. Внутренние силы

Твердое тело может быть представлено как совокупность бесконечного числа материальных точек, которые взаимодействуют между собой так, что сохраняется его форма при отсутствии внешнего воздействия. Для сохранения формы тела между точками возникают внутренние силы. При приложении внешних нагрузок тело деформируется, и изменение расстояний между точками приводит к изменению внутренних сил. В механике внутренними силами считаются только те силы, которые появляются в результате внешнего воздействия. Внутренние силы, существующие в теле без внешней нагрузки, которые обеспечивают форму тела, во внимание не принимаются.

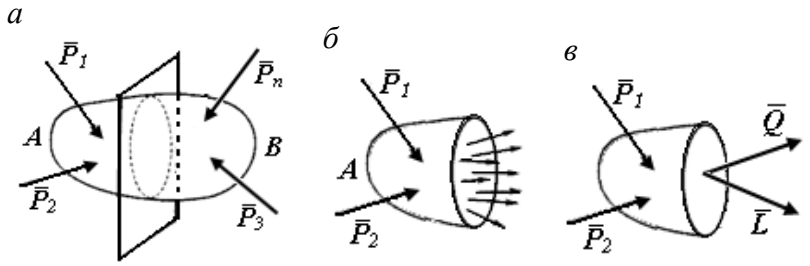


Рис. 1.11. Внутренние силы

Для выявления и вычисления внутренних сил применяют метод сечений. Рассмотрим произвольное тело (рис. 1.11, *а*), нагруженное системой сил. Мысленно рассечем его некоторой плоскостью на две части *A* и *B*. С обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия (рис. 1.11, *б*). В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних сил интенсивность внутренних сил в различных точках сечения может быть различна. В

соответствии с третьим законом Ньютона силы, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *A*, равны по значению и противоположны по направлению внутренним силам, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *B*. Внутренние силы, действующие в сечении, можно привести к одной точке, в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор внутренних сил $\overline{Q}$ и вектор главного момента внутренних сил $\overline{L}$ (рис. 1.11, *в*). Для того чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается напряжение.

Рассмотрим сечение *A* некоторого тела (рис. 1.12). В окрестности точки *C* выделим элементарную площадку ΔF ($\overline{n}$ – нормаль к площади сечения).

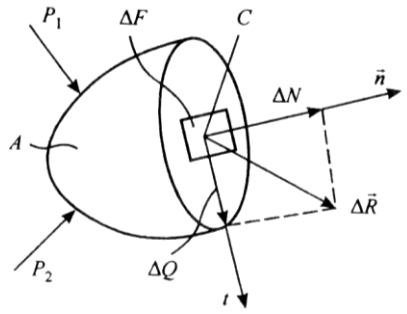


Рис. 1.12. Определение напряжений

Пусть $\Delta\overline{R}$ – равнодействующая внутренних сил на площадке ΔF:

$$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta\overline{R}}{\Delta F}=\overline{\sigma}_n,$$

где $\overline{\sigma}$ – полное напряжение в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$. Единица напряжения – паскаль [Па].

Равнодействующую внутренних сил $\Delta\overline{R}$ и полное напряжение $\overline{\sigma}$ можно разложить на составляющие. Равнодействующую внутренних сил разложим на составляющие: ΔN, направленную по нормали к площадке, и ΔQ, касательную к площадке. Полное напряжение разложим на нормальное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$,

$$\sigma_n=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta\overline{N}}{\Delta F}, \qquad (1.4)$$

и касательное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$ по направлению $\overline{t}$,

$$\tau_{nt}=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta\overline{Q}}{\Delta F}. \qquad (1.5)$$

Касательное напряжение имеет два индекса – нормали и касательной.

Полное напряжение в общем случае не совпадает с направлением нормали. Его проекции на направление нормали $\overline{n}$ обозначим σ_n, а на направление касательной $\overline{t}$ – τ_{nt}. Тогда

$$|\sigma|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2.$$

Если известны проекции $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на координатные оси x, y, z полного напряжения, действующего на площадке, то оно может быть выражено:

$$|\sigma|^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2.$$

Если нормаль к площадке составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ, то нормальную составляющую напряжений можно найти через проекции полного напряжения на координатные оси:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma.$$

При повороте площадки напряжение меняется.

Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через эту точку.

1.5. Перемещения и деформации

Тело под действием прикладываемых к нему сил меняет свои форму и размеры – деформируется. При этом изменяется относительное расположение отдельных его частиц, вследствие их перемещения в пространстве. Если рассматривать абсолютно жесткое тело, как это делается в теоретической механике, то при перемещении точек тела не меняется их взаимное расположение, т. е. тело не деформируется.

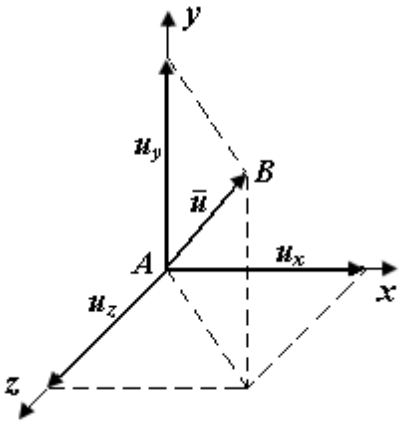


Рис. 1.13. Полное перемещение точки

Перемещение не всегда сопровождается деформацией. Однако деформация тела невозможна без перемещения его точек.

Выделим в твердом теле точку *A* (рис. 1.13). Пусть под действием внешних сил эта точка займет положение *B*. Отрезок *AB* называют вектором полного упругого перемещения и обозначают $\overline{u}$. Проекции вектора полного упругого перемещения на оси декартовой системы координат x, y, z обозначают, соответственно, u_x, u_y, u_z и называют составляющими перемещений точки.

Деформация считается упругой, если исчезает после устранения вызвавшей ее силы, и остаточной – в противном случае. Свойство элемента конструкции проявлять упругую деформацию называют *упругостью*, остаточную деформацию – пластичностью.

Деформация – количественная мера изменения размеров в окрестности точки. Различают два вида деформации тела: относительное удлинение в окрестности точки и относительный сдвиг.

Относительная линейная деформация – относительное удлинение в окрестности точки A по направлению *r*:

$$\varepsilon_r = \frac{dr_1 - dr}{dr}.$$

Относительное удлинение будем считать положительным, если бесконечно малые отрезки увеличиваются по длине (рис. 1.14, *а*)

а *б*

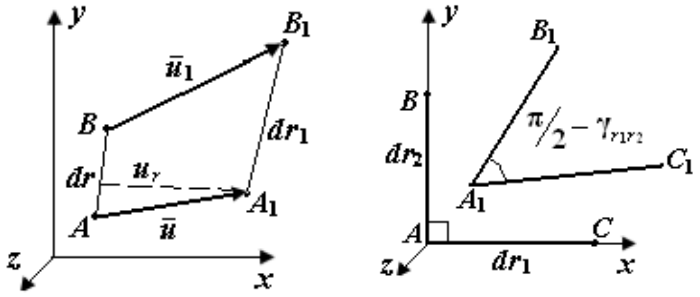


Рис. 1.14. Линейная и угловая деформации

Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками *AB* и *AC* (рис. 1.14, *б*). После нагружения тела внешними силами этот угол изменяется, принимая значение $\pi/2 - \gamma_{r_1 r_2}$. Величина, равная изменению прямого угла после нагружения между двумя взаимно перпендикулярными направлениями, называется относительным сдвигом, углом сдвига или просто сдвигом и обозначается $\gamma_{r_1 r_2}$. Относительный сдвиг считается положительным, если прямой угол уменьшается.

Относительные линейные деформации в направлении координатных осей x, y, z обозначают $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, а изменения углов между этими отрезками: $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$ называют составляющими деформации в окрестности точки твердого тела. Составляющие деформации принято записывать в виде тензора деформации. Тензор деформаций полностью характеризует деформацию тела в окрестности точки.

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность нормального напряжения (σ_n) относительному удлинению (ε_n):

$$\sigma_n = E\varepsilon_n. \quad (1.6)$$

Коэффициент пропорциональности E называют модулем нормальной упругости, а коэффициент пропорциональности касательного напряжения и относительного сдвига – модулем упругости при сдвиге G.

Модуль нормальной упругости E и модуль упругости при сдвиге G определяют экспериментально. Величины E и G выражают в Паскалях [Па].

1.6. Массовые и геометрические характеристики сечений

Сопротивление конструкции различным видам деформации зависит не только от материала, из которого она изготовлена, ее размеров, но также и от массовых характеристик, формы поперечных сечений и их расположения относительно направления действия нагрузки, т. е. геометрических характеристик сечения.

К массовым характеристикам относятся масса тела и момент инерции тела.

Масса тела – мера его инерционных и гравитационных свойств. В прикладной механике масса тела принята равной сумме масс всех его малых частей и не зависящей от скорости его движения. Инертность тела проявляется в том, что под действием внешних сил оно изменяет свое движение, постепенно приобретая конечное ускорение. Единица измерения массы – килограмм [кг].

Массовый момент инерции тела относительно оси – мера инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси. Массовый момент инерции тела вычисляют по формуле:

$$I = \int_m r^2 \, \mathrm{d}m,,$$

где $\mathrm{d}m$ – элементарная масса; r – расстояние элементарной массы до оси. Единица измерения момента инерции I – килограмм-метр в квадрате [кг · м^2].

Основными геометрическими характеристиками сечения тела являются: площадь поперечного сечения, статический момент площади, осевой момент инерции сечения, момент сопротивления сечения, центробежный момент инерции сечения, полярный момент инерции сечения, радиус инерции.

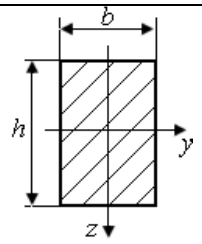
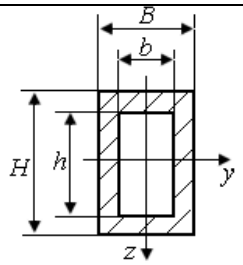
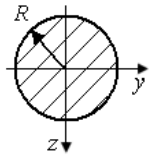
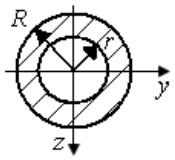
Статический момент S_y (S_z) площади F относительно оси $y(z)$ представляют интегралом, взятым по рассматриваемой площади, вида

$$S_y = \int_F zdF\,;\; S_z = \int_F ydF,$$

где dF – элементарная площадка; y и z – координаты центра тяжести элементарной площадки.

Единица измерения статического момента площади сечения – м^3. Статические моменты площади сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения (центральных осей) равны нулю.

Таблица 1.1

Форма сечения	I_y	I_z	$W_и$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}\left(\frac{\frac{b^3h}{12}}{\frac{b}{2}}\right)$
	$\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$	$\frac{B^3H}{12}-\frac{b^3h}{12}$	$\frac{\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}}{\frac{H}{2}}\left(\frac{\frac{B^3H}{12}-\frac{b^3h}{12}}{\frac{B}{2}}\right)$
	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R}$
	$\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}}{R}$

Осевые моменты сечения I_y, I_z, центробежный момент инерции I_{yz}, и полярный момент инерции I_p представляют интегралы по площади

$$I_y = \int_F z^2dF\,;\; I_z = \int_F y^2dF\,;\; I_{yz} = \int_F yzdF\,;\; I_p = \int_F r^2dF,$$

где r – расстояние от центра тяжести сечения элементарной площадки до начала координат.

Единица измерения этих моментов инерции сечения – м^4. Моменты инерции сечения называются центральными, если оси, относительно которых они вычислены, проходят через центр тяжести сечения. Значения осевого момента инерции для наиболее часто встречающихся сечений приведены в табл. 1.1. Подинтегральные выражения осевого и полярного моментов инерции положительны при любом положении координатных осей, и поэтому эти моменты всегда больше нуля.

Центробежный момент инерции сечения I_{yz} может быть и положительным, и отрицательным, и равным нулю. Расстояние r связано с координатами y и z центра тяжести элементарной площадки dF равенством $r^2 = y^2 + z^2$, поэтому

$$I_p = \int_F r^2 dF = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF.$$

Момент сопротивления сечения $W_и, W_к$ характеризует способность тела сопротивляться изгибу или кручению в рассматриваемом сечении. Момент сопротивления равен осевому или полярному моменту инерции, деленному на расстояние от оси (или центра тяжести сечения) до наиболее удаленной точки сечения. Единица измерения момента сопротивления сечения – м^3.

2. НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ РЭА ПО СТЕРЖНЕВОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

При расчете прочности и жесткости конструкций приборов электронной и полупроводниковой техники (полупроводниковые приборы, микросхемы, их выводы, элементы несущих конструкций и др.) они могут быть представлены в виде стержневой расчетной схемы.

Стержневые системы могут быть статически определимые и статически неопределимые.

Расчет статически определимых систем сводится к следующим операциям: 1) определение реакций в опорах с помощью уравнений статического равновесия; 2) определение внутренних усилий в сечениях стержней и построение эпюр внутренних усилий; 3) расчет напряжений и перемещений в заданных сечениях.

В статически неопределимых системах невозможно определить реакции опор из уравнений статического равновесия. В этих системах больше связей (реакций опор), чем необходимо для использования уравнений статического

равновесия, т.е. число неизвестных усилий в опорах (опорных реакций) превышает количество используемых для их нахождения уравнений равновесия. По числу лишних связей или лишних неизвестных устанавливают степень статической неопределимости системы.

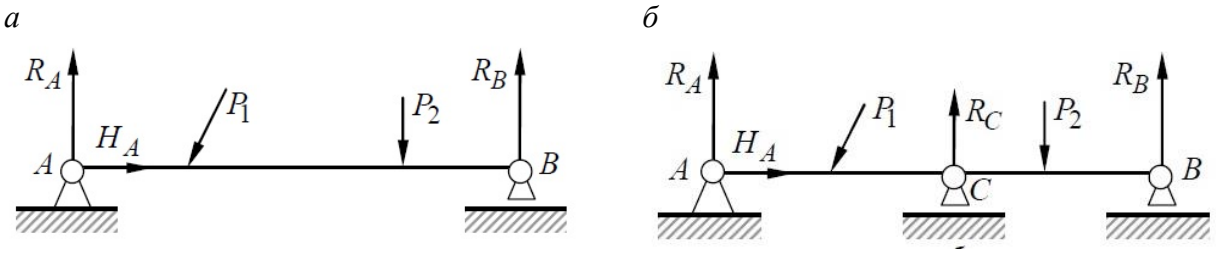


Рис. 2.1. Шарнирно опертая балка

На рис. 2.1, *а* показана шарнирно опертая балка – система статически определимая и геометрически неизменяемая. Все три реакции (R_A, H_A, R_B) определяются из трех условий равновесия плоской системы сил. Используя метод сечений, легко найти силовые факторы Q_z, My в любом сечении балки.

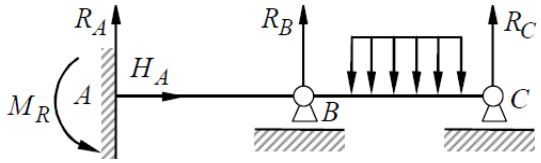


Рис. 2.2. Статически неопределимая балка

Если добавить еще одну связь, например, шарнирно-подвижную опору в сечении C (рис. 2.1, *б*), то в результате этого система стала более прочной и жесткой, однако, с точки зрения геометрической неизменяемости, эта связь лишняя. Теперь из трех уравнений равновесия четыре реакции (R_A, H_A, R_B, R_C) определить невозможно. Таким образом, балка, изображенная на рис. 2.1, *б*, один раз статически неопределима.

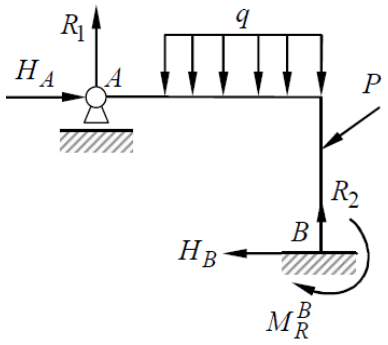


Рис. 2.3. Статически неопределимая плоская рама

На рис. 2.2 показана дважды статически неопределимая балка. Здесь для определения пяти реакций есть лишь три уравнения равновесия. Следовательно, система содержит две лишние связи.

В конструкциях приборов часто встречаются статически неопределимые балки с ломаной осью – рамы. В отличие от ферм, где стержни соединены между собой шарнирами и нагружены силами, приложенными в узлах, рамы имеют один жесткий узел или несколько. В жестком узле торцы соединяемых стержней не

имеют относительных поступательных перемещений, а также относительных поворотов.

Рамные конструкции могут состоять как из прямолинейных, так и из криволинейных элементов. На рис. 2.3 показана дважды статически неопределимая плоская рама. В этом случае, как и в предыдущем, для определения пяти реакций внешних связей имеем только три уравнения равновесия. Рамы могут быть нагружены вполне произвольной нагрузкой, любым образом ориентированной.

Статическая неопределимость может быть результатом не только введения дополнительных внешних связей.

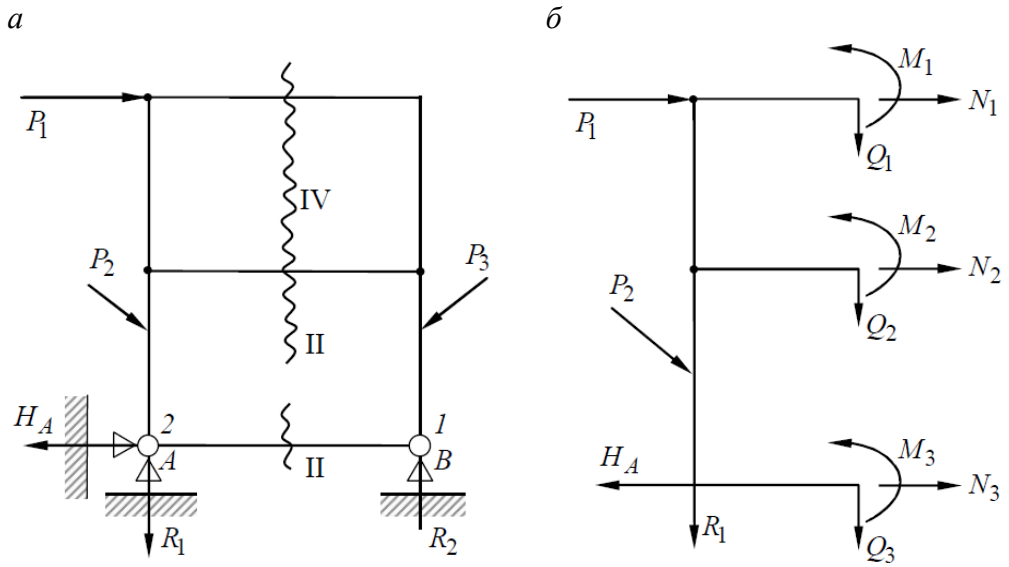


Рис. 2.4. Статически неопределимая рама

Рассмотрим раму, показанную на рис. 2.4, *а*. Реакции R_A, H_A, R_B внешних связей (опор) легко определить из уравнений равновесия. Однако эти уравнения равновесия не позволяют определить внутренние усилия в ее элементах.

Разрежем раму на две части и рассмотрим равновесие одной из них (рис. 2.4, *б*). Действие отброшенной части на оставленную заменено в каждом сечении разреза тремя внутренними усилиями – нормальной силой N, перерезывающей силой Q и изгибающим моментом M. Таким образом, из трех уравнений равновесия следует определить девять неизвестных усилий. Система, следовательно, шесть раз статически неопределима. Она состоит из двух замкнутых бесшарнирных контуров, каждый из которых трижды статически неопределим.

Следует отметить, что постановка шарнира на оси стержня (рис. 2.5, *а*) обращает в нуль изгибающий момент в данном сечении и, следовательно, снижает степень статической неопределимости на единицу. Такой шарнир называют одиночным. Рама, показанная на рис. 2.5, *а*, пять раз статически неопределима.

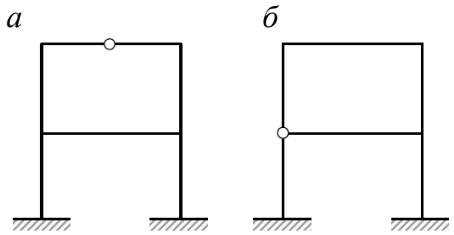


Рис. 2.5. Модификации рамы

Шарнир, включенный в узел, где сходятся n стержней (рис. 2.5, *б*), снижает степень статической неопределимости на –1, так как заменяет собой столько же одиночных шарниров. Такой шарнир называется общим. Рама, изображенная на рис. 2.5, *б*, четыре раза статически неопределима.

Для определения степени статической неопределимости плоских систем можно пользоваться формулой

$$S = 3K - n,$$

где S – степень статической неопределимости, K – число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров, n – число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень. Например, рама, приведенная на рис. 2.4, имеет четыре замкнутых контура. У каждого шарнира указано соответствующее число одиночных шарниров; при этом группа стержней, жестко связанных между собой (не разделенных шарнирами), принимается за один стержень. В рассматриваемом случае $K = 4$, $n = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$. Следовательно, $S = 6$.

Для определения усилий в статически неопределимых системах дополнительно к уравнениям статики составляют так называемые уравнения совместности деформаций. Лишние связи накладывают определенные ограничения на перемещения тех сечений, к которым они приложены. Это обстоятельство и используют для составления дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями статики позволяют определить все внутренние усилия в элементах системы. Дополнительные уравнения могут быть составлены с помощью метода сил или метода перемещений.

Основные этапы расчета статически неопределимой системы:

1) устанавливаем степень статический неопределимости, т. е. число лишних связей или лишних усилий в опорах;

2) удаляя лишние связи, заменяем исходную систему статически определимой, которая называется основной системой. Выбор лишних связей зависит от желания расчетчика, так что для одной и той же статически неопределимой исходной системы возможны различные варианты основных систем. Однако нужно следить за тем, чтобы каждая из них была геометрически неизменяемой. Рациональным выбором удаляемых лишних связей упрощается расчет.

Таким образом, основной системой называется любой из статически определимых вариантов рассматриваемой системы, полученный освобождением ее от лишних связей. Найдя лишние неизвестные усилия, определение реакций и построение эпюр внутренних усилий, а также подбор сечений и проверку прочности, проводим обычными способами.

2.1. Определение внутренних усилий в поперечном сечении стержня

Внутренние силы по своей природе – это силы взаимодействия частей тела между собой. Они могут быть выявлены при отбрасывании части тела и замены ее действия внутренними силами. Этот прием носит название «метод сечений».

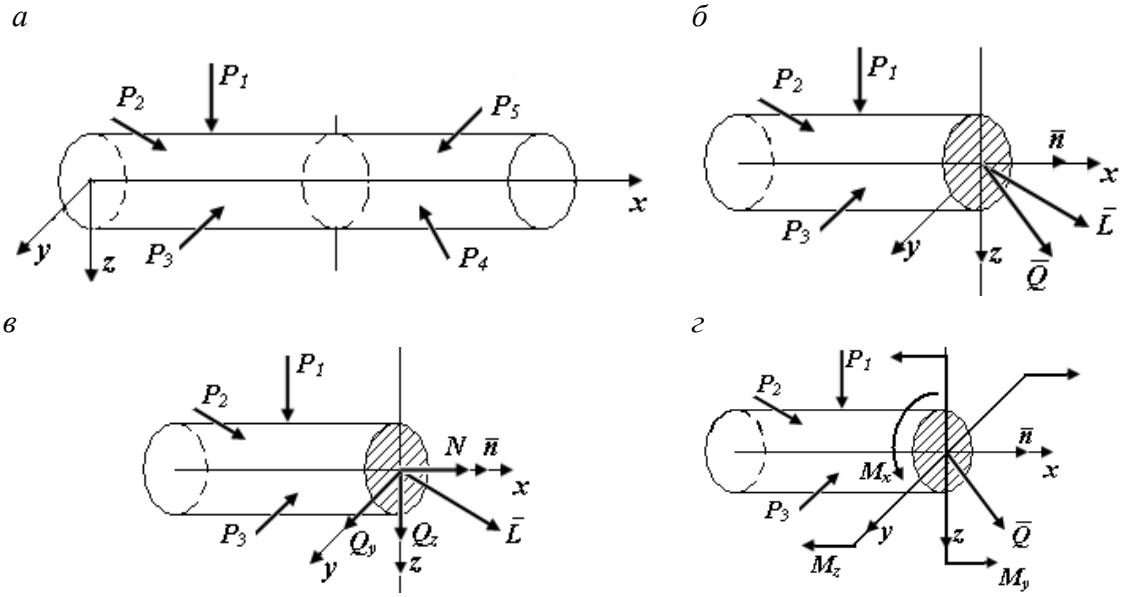


Рис. 2.6. Определение внутренних усилий

На рис. 2.6, *а* представлен стержень, находящийся под действием внешних сил в состоянии равновесия. Мысленно рассечем стержень плоскостью, перпендикулярной продольной оси, и отбросим одну из частей стержня. Действие мысленно отброшенной части на оставшуюся часть заменим

силами. Внутренние силы можно представить главным вектором сил $\overline{Q}$ и вектором главного момента $\overline{L}$ (рис. 2.6, *б*).

В поперечном сечении введем систему координат xyz: оси y и z – центральные оси инерции поперечного сечения; ось x – перпендикулярна плоскости поперечного сечения и совпадает с направлением продольной оси стержня.

Выделим в плоскости поперечного сечения элементарную площадку *dF*. Разложим вектор внутренних сил, действующих в пределах элементарной площадки, на составляющие по направлениям осей x, y, z:

$$d\overline{L} = d\overline{N}_x + d\overline{Q}_y + d\overline{Q}_z, \text{ или } d\overline{L} = dN_x\overline{i} + dQ_y\overline{j} + dQ_z\overline{k}.$$

Интенсивность распределенной силы в точке определяется как отношение равнодействующей к величине элементарной площадки, на которой она возникает. Направление полного напряжения $\overline{\sigma} = d\overline{L}/dF$ совпадает с направлением вектора силы $d\overline{L}$. Полное напряжение может быть разложено на составляющие в направлении координат x, y, z.

Нормальное напряжение действующее вдоль нормали к площадке (вдоль оси x):

$$\sigma_n = dN_x/dF\,; \tag{2.1}$$

Касательные напряжения действующие в направлении осей y и z (по касательной к площадке):

$$\tau_y = dQ_y/dF;\ \tau_z = dQ_z/dF. \tag{2.2}$$

С учетом этого

$$dN_x = \sigma_n\, dF;\ dQ_y = \tau_y dF;\ dQ_z = \tau_z dF.$$

Используя лемму о параллельном переносе силы, перенесем силы dN_x, dQ_y, dQ_z в центр тяжести сечения. При этом получим моменты $dM_y = $ $= zdN_x = \sigma_n\, zdF;\ dM_z = ydN_x = \sigma_n\, ydF;\ dM_x = ydQ_z - zdQ_y =$ $= \left(\tau_z y - -\tau_y z\right)dF.$ Просуммировав $dN_x, dQ_y, dQ_z, dM_x, dM_y, dM_z$ по всем элементарным площадкам, в центре тяжести поперечного сечения получим силы

$$N_x = \sum_{i=1}^{\infty} dN_x = \int_F \sigma_n\, dF\,;\ Q_y = \sum_{i=1}^{\infty} dQ_y = \int_F \tau_y dF\,;\ Q_z = \sum_{i=1}^{\infty} dQ_z = \int_F \tau_z dF$$

и моменты

$$M_x = \sum_{i=1}^{\infty} dM_x = \int_F (\tau_z y - \tau_y z) dF \; ; \; M_y = \int_F \sigma_n \, z dF \; ; \; M_z = \int_F \sigma_n \, y dF \; .$$

Таким образом, совокупность сил N_x, Q_y, Q_z и моментов M_x, M_y, M_z есть интегральная характеристика внутренних сил, возникающих в поперечном сечении.

Продольная сила N – компонента главного вектора внутренних сил в направлении продольной оси x – всегда перпендикулярна плоскости поперечного сечения и называется нормальной силой (рис. 2.6, *в*). Внешние силы, соответствующие нормальной силе, вызывают растяжение или сжатие стержня. Поперечные силы Q_y, Q_z – компоненты главного вектора внутренних сил в направлении главных центральных осей инерции сечения y, z – лежат в плоскости сечения и называются перерезывающими силами (рис. 2.6, *в*)

Крутящий момент M_x – момент внутренних сил относительно продольной оси x. Изгибающие моменты M_y, M_z – моменты внутренних сил относительно главных центральных осей инерции сечения y, z (рис. 2.6, *г*).

Эти силы и моменты называются внутренними силовыми факторами. При исследовании напряжений и деформаций эти силы должны быть определены в первую очередь. Знаки составляющих внутренних сил находят с помощью правила знаков для сил и моментов.

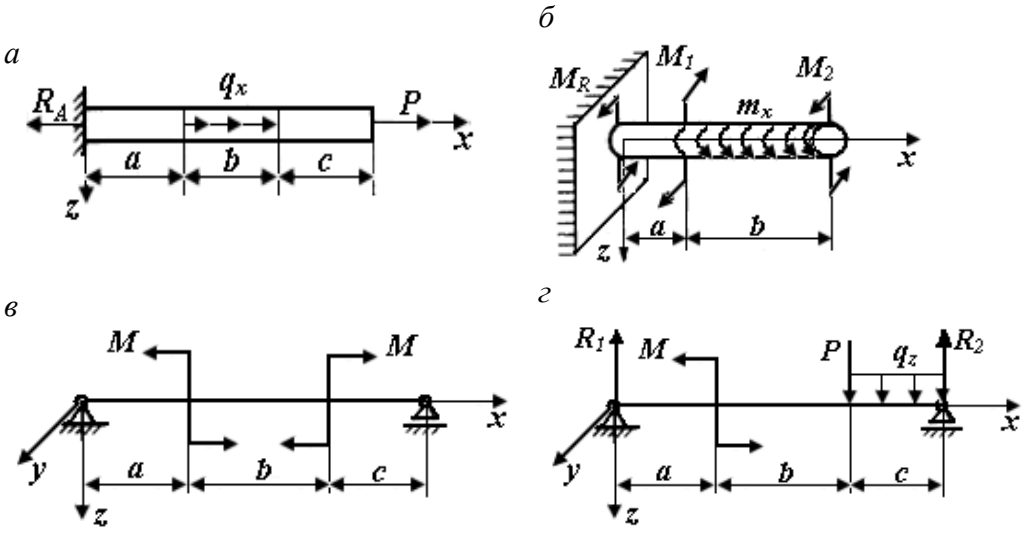


Рис. 2.7. Частные простейшие виды деформации стержня

Внутренние силовые факторы в сечениях левой и правой частей стержня численно равны и противоположно направлены. Это следует также из третьего закона Ньютона.

Для анализа удобно выделить частные простейшие виды деформации стержня:

– осевое растяжение сжатие – при этом $N \neq 0$ (Рис. 2.7, *а*);

– кручение – при этом $M_x \neq 0$ (Рис. 2.7, *б*);

– чистый изгиб – при этом в плоскости *xOz* $M_y \neq 0$ (Рис. 2.7, *в*), в плоскости *xOy* $M_z \neq 0$;

– плоско-поперечный изгиб – при этом при этом в плоскости *xOz* $Q_z \neq 0$, $M_y \neq 0$ (Рис. 2.7, *г*), в плоскости *xOy* $Q_y \neq 0$, $M_z \neq 0$

Порядок определения внутренних сил и построения их эпюр одинаков при различных видах нагружения. Эпюр внутренних сил отражает распределение внутренних сил по длине стержня. Участок стержня, на границах которого изменяется характер внешних воздействий, называют грузовым.

Сначала из условия статического равновесия определяют опорные реакции *R*. После определения опорных реакций, а значит, и всех внешних сил, на каждом грузовом участке, используя метод сечений и правила знаков, представляют отличные от нуля внутренние силы. Записав условия статического равновесия, выводят закон, по которому изменяются внутренние силы на данном грузовом участке. Вычисляют значения внутренних сил на границах участков и строят графики – эпюры внутренних сил. Ось эпюра всегда проводят параллельно оси стержня; значения внутренних силовых факторов откладывают на оси ординат, перпендикулярной оси эпюра в масштабе; эпюр заштриховывают линиями, перпендикулярными оси; в характерных точках эпюра проставляют числовые значения, на поле эпюра в круге ставят знак. Выполняют проверку. В качестве проверки можно использовать следующий факт: если на границе участка действует сосредоточенная сила вдоль оси x (оси y, оси z), то при переходе через эту границу продольная сила (поперечная сила) должна измениться скачкообразно (величина скачка равна величине сосредоточенной силы). Это правило справедливо и для моментов.

2.2. Определение напряжений в стержне

При воздействии различных внешних нагрузок в сечениях стержня возникают шесть составляющих внутренних усилий: нормальная сила N при растяжении или сжатии; перерезывающие силы Q_y и Q_z при плоском поперечном изгибе и при срезе; крутящий момент M_x при кручении; изгибающие моменты M_y и M_z при чистом изгибе и при плоском поперечном изгибе.

Нагружение электронных приборов в процессе эксплуатации и испытаний не приводит к возникновению в сечениях стержня крутящего момента, поэтому напряжения кручения обычно не рассматриваются.

При растяжении – сжатии и чистом изгибе стержневых элементов возникающие в их сечениях нормальные напряжения могут быть рассчитаны с помощью трехчленной формулы:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \qquad (2.3)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня; I_y и I_z – осевые моменты инерции сечений; y и z – координаты точек, в которых определяется напряжение.

Формула (2.3) может быть использована для определения нормальных напряжений в сечениях, у которых ось x, совмещенная с осью стержня, проходит через центр тяжести, а оси y и z являются главными осями инерции. Следует отметить, что это условие выполняется, если сечение имеет хотя бы одну центральную ось симметрии. Для наиболее распространенных прямоугольного и круглого сечений осевые моменты инерции приведены в таблице 1.1. Внутренние усилия N, M_y, M_z определяются по эпюрам внутренних усилий.

Прямая, проходящая через точку, где нормальное напряжение равно нулю, называется нейтральной линией. Уравнение нейтральной линии может быть получено из (2.3):

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 0,$$

Откуда

$$z = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z} - \frac{N}{M_y}\frac{I_y}{F} \quad \text{или } z = y\,\mathrm{tg}\,\beta - \alpha,$$

где $\beta = \mathrm{arctg}\,(M_z I_y/(M_y I_z))$ – угол наклона нейтральной линии относительно оси; $\alpha = (NI_y/(M_y F))$ – смещение нейтральной линии относительно центра тяжести сечения вдоль оси.

Нейтральная линия разделяет растянутую и сжатую части сечений. При изгибе наибольшие нормальные составляющие напряжений в каждой из этих частей возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

При чистом изгибе касательные напряжения в сечении стержня отсутствуют, а нормальные напряжения σ_x во всех точках сечения являются главными (σ_1 или σ_3).

В случае плоского поперечного изгиба в сечениях стержня возникает перерезывающая сила Q_z или Q_y, при сложном изгибе добавляется перерезывающая сила Q_y или Q_z. Касательные напряжения от этих сил можно посчитать по формуле Журавского:

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b_z}, \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b_y},$$

где S_y^* и S_z^* – статические моменты отсеченной площади относительно осей y и z соответственно; b_z и b_y – ширина сечения на расстояниях z или y соответственно от центра тяжести сечения.

Наибольшего значения касательные напряжения достигают на нейтральной линии $z = 0$.

С учетом касательных напряжений при плоском поперечном изгибе главные напряжения (они являются наибольшими нормальными напряжениями в точке тела) определяются выражением

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \pm \sqrt{{\sigma_x}^2 + 4\tau_{zx}^2}\right].$$

Как правило, величины касательных напряжений при изгибе стержня круглого сечения и стержня прямоугольного сечения невелики и ими можно пренебречь.

В наиболее удаленных от нейтральной линии волокнах ($z = \pm h/2$, $y = \pm b/2$ – для прямоугольного сечения и $y = z = R$ – для круглого сечения) касательные напряжения равны нулю и действующие там нормальные напряжения являются главными: $\sigma_x = \sigma_1$ – в растянутых волокнах и $\sigma_x = \sigma_3$ – в сжатых волокнах.

Таким образом, в точках поперечного сечения стержня при растяжении – сжатии, при чистом изгибе и в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, при плоском поперечном изгибе только одно главное напряжение не равно нулю – возникает линейное напряженное состояние.

При плоском поперечном изгибе во всех точках сечения, кроме точек $cz = \pm h/2$, возникают два главных напряжения σ_1 и σ_3, т. е. возникает плоское напряженное состояние.

3. РАСЧЕТ ЖЕСТКОСТИ ПО СТЕРЖНЕВОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Помимо оценки прочности конструкции также необходимо определять и жесткость изделия. Расчет жесткости стержня — это оценка его упругой податливости под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут выходить за установленные нормами пределы.

Для количественной оценки жесткости изделия необходимо знать перемещения, которые совершают элементы конструкции под влиянием различных внешних воздействий.

Искривленную при изгибе ось стержня называют изогнутой, перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси стержня, — прогибом стержня в данном сечении, наибольший прогиб — стрелой прогиба. Угол θ, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, носит название угла поворота сечения. Прогиб в плоскости *xOz* считают положительным, если его направление совпадает с направлением оси *z*. Угол поворота считают положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

3.1. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

Рассмотрим стержень (рис. 3.1), подвергающийся чистому изгибу. В окрестностях каждой точки поперечного сечения стержня из составляющих тензора напряжения от нуля отлична только составляющая $\sigma_x = \left(M_y/I_y\right)z$.

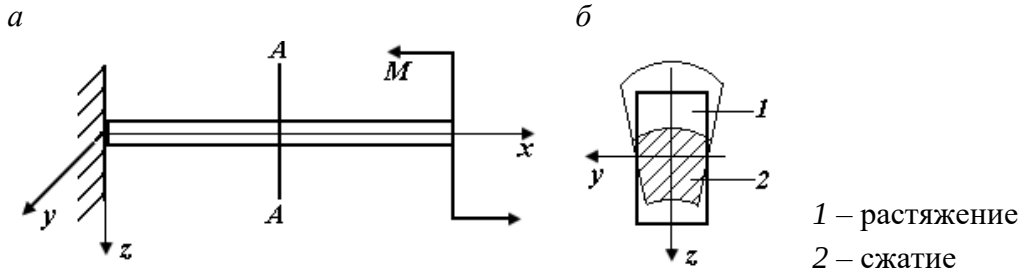


Рис. 3.1. Стержень, подвергающийся деформации чистого изгиба

Представленный на рисунке стержень имеет слева одну жестко защемленную опору. Поэтому в начале координат при $x = y = z = 0$ перемещения $u_x = u_y = u_z = 0$ и углы поворота оси стержня относительно осей координат также равны нулю $\partial u_x/\partial y = \partial u_y/\partial z = \partial u_z/\partial x = 0$.

С помощью закона Гука можно определить составляющие тензора деформаций и подставив их в дифференциальные уравнения Коши, можно получить зависимости для определения перемещений при чистом изгибе.

Тогда формулы для определения составляющих перемещений при чистом изгибе стержня, жестко защемленного в начале координат, будут иметь следующий вид:

$$u_x = \frac{M_y}{EI_y} zx;\ \ u_y = -\nu \frac{M_y}{EI_y} zy;\ u_z = -\frac{M_y}{2EI_y}(x^2 - \nu y^2 + \nu z^2). \qquad (3.1)$$

На рис. 3.1, *б* показано, как изменяется форма прямоугольного поперечного сечения стержня на некотором расстоянии от начала координат. Линии, параллельные оси z, поворачиваются, оставаясь прямыми (выражение для u_y), а линии, параллельные оси y, принимают форму кривых второго порядка (выражение для u_z).

При $y = z = 0$ уравнения (3.1) приобретают вид

$$u_x = 0;\ \ u_y = 0;\ u_z = -\frac{M_y}{2EI_y} x^2. \qquad (3.2)$$

При чистом изгибе точка оси стержня перемещается только в вертикальном направлении. Каждая точка, лежащая вне оси стержня, перемещаются при изгибе в продольном направлении на $u_x = M_y zx/EI_y$. При $x = \text{const}$ перемещение зависит только от z. Зависимость эта линейная: поперечное сечение поворачивается вокруг оси y, оставаясь при этом плоским.

Введя допущение о малости угла поворота ($\text{tg}\,\theta \approx 0$), получим:

$$\theta = \frac{u_x}{z} = \frac{M_y}{EI_y} x. \qquad (3.3)$$

Положительным направлением угла θ считаем направление против часовой стрелки при рассмотрении с конца оси y. Учитывая, что при чистом изгибе $M_y = \text{const}$, находим:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \qquad (3.4)$$

Сравнивая два последних выражения, устанавливаем зависимость между прогибом и углом поворота:

$$\theta = -\frac{\partial u_z}{\partial x}. \qquad (3.5)$$

Выражение (3.5) при инженерных расчетах правомерно распространять на плоско-поперечный изгиб. Его называют приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня.

3.2. Расчет перемещений при кручении круглых стержней

При кручении стержня круглого поперечного сечения в тензоре напряжений отличны от нуля только составляющие

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} z;\ \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_p} y,$$

а в тензоре деформаций

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{M_x}{GI_p} z;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{M_x}{GI_p} y.$$

Используя дифференциальные уравнения Коши и граничные условия, что стержень жестко защемлен в начале координат, а, следовательно, в сечении, проходящем через начало координат, составляющие перемещения и составляющие углов поворота равны нулю, получим что:

$$u_x = 0;\ \ u_y = -\frac{M_x}{GI_p} xz;\ u_z = \frac{M_x}{GI_p} xy. \tag{3.6}$$

Поскольку $u_x = 0$, все точки, находящиеся в любом поперечном сечении, до деформации и в процессе деформации остаются в плоскости этого же поперечного сечения. Вектор полного упругого перемещения u перпендикулярен положению радиус-вектора точки сечения. Изменение положения радиус-вектора характеризует угол закручивания стержня φ. Так как упругие деформации малы, введем допущение, что $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$, и тогда

$$\varphi = \frac{M_x}{GI_p} x. \tag{3.7}$$

Если $M_x = \text{const}$, можно продифференцировать соотношение (3.7) по x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M_x}{GI_p}. \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) называют дифференциальным уравнением угла закручивания поперечного сечения стержня. В инженерной практике его применяют и в тех случаях, когда значение крутящего момента изменяется вдоль оси стержня.

Формула угла закручивания φ_Σ для стержня, имеющего n участков с различными механическими характеристиками материала на каждом i-том

участке, при постоянных в пределах каждого участка значениях момента M_x, имеет следующий вид:

$$\varphi_\Sigma = \sum_{i=0}^{n} \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{pi}}.$$

Условие жесткости при кручении стержня характеризуется выражением

$$\varphi_{max} = \frac{|M_x|^{max} l_p}{G I_p} \le [\varphi],$$

где $|M_x|^{max}$ – наибольший по модулю на эпюре M_x крутящий момент; l_p – расчетная длина, на которой определяют угол закручивания; $[\varphi]$ – допустимый на данной длине угол закручивания.

3.3. Расчет перемещений по методу начальных параметров

Для элементов конструкции электронной техники, которые могут быть представлены в виде стержневой расчетной схемы, наибольший интерес представляет определение перемещения оси стержня в плоскости нагружения при чистом или плоском поперечном изгибе.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{E I_y} \qquad (3.9)$$

где u_z – компонента вектора перемещения в направлении оси z (рис. 3.2).

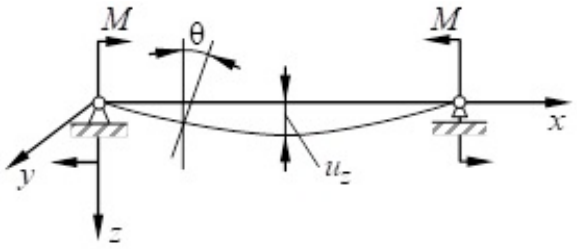


Рис. 3.2. Прогиб стержня

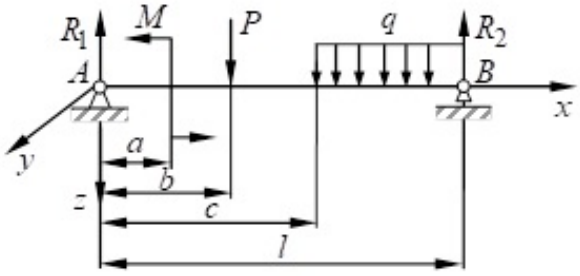


Рис. 3.3. Стержень, нагруженный в плоскости *xOz*

Угол поворота сечений связывается с прогибом зависимостью $\theta = -\frac{\partial u_z}{\partial x}$, при этом используется допущение о малости угла θ = tg θ.

Если жесткость поперечного сечения при изгибе EI_y постоянна по длине стержня, то прогибы оси и угла поворота различных поперечных сечений мо-

гут быть получены непосредственным интегрированием уравнения (3.9) или интегрированием по методу начальных параметров.

Метод начальных параметров удобно использовать при наличии нескольких нагрузок (рис. 3.3), так как при любом числе грузовых участков нужно определить всего две произвольные постоянные интегрирования: прогиб u_{z0} и угол поворота θ_0 в начале координат.

Уравнения метода начальных параметров имеют вид

$$u'_z = -\theta = u'_{z_0} + \frac{\sum_i M_i (x-a)}{EJ_y} + \frac{\sum_j P_i (x-b)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum_k g_k (x-c)^3}{6EJ_y},$$

$$u_z = u_{z_0} + u'_{z_0} x + \frac{\sum_i M_i (x-a)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum_j P_i (x-b)^3}{6EJ_y} + \frac{\sum_k g_k (x-c)^4}{24EJ_y}. \quad (3.10)$$

При использовании этих уравнений нужно соблюдать следующие условия:

– начало координат помещается в крайнюю левую точку оси стержня;

– знак «плюс» в уравнениях соответствует положительному направлению сил и моментов;

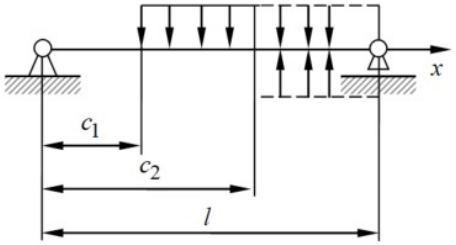


Рис. 3.4. Использование метода начальных параметров

– a, b, c – расстояния от начала координат до точки приложения соответствующей нагрузки (для распределенной нагрузки – до начала участка, где она действует);

– выражение для изгибающего момента M_y составляют применительно к левой отсеченной части стержня, под знак суммирования включаются только те нагрузки, которые лежат левее рассматриваемого сечения;

– если распределенная нагрузка заканчивается ранее сечения, где определяются прогиб и угол поворота, то она должна быть продолжена до указанного сечения и при этом следует добавить к ней нагрузку той же интенсивности, но противоположного знака (рис. 3.4).

Угол поворота $u_{z_0} = -\theta_0$ и прогиб u_{z_0} в начале балки определяются из граничных условий, которые для наиболее распространенных случаев закрепления могут быть записаны следующим образом (рис. 3.5, *а – б*):

при $x = 0$ $u_z = u_{z_0} = 0$, при $x = l$ $u_z = 0$;

при $x = 0\, u_z = u_{z_0} = 0$, при $u'_z = u'_{z_0} = 0$;

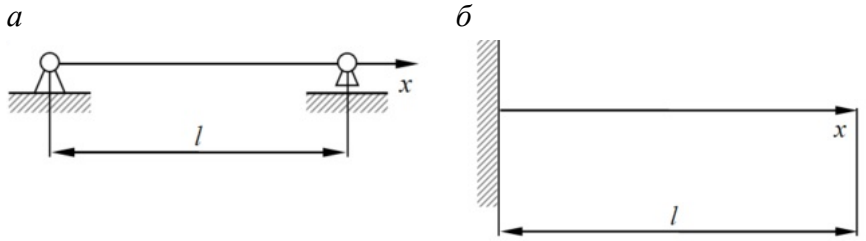


Рис. 3.5. Схемы стержней для определения граничных условий

Пример 1. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой представлена на рис. 3.6. На стержень, опертый на две опоры, действуют внешние воздействия: q = 100 Н/м, P_1 = 10 Н, P_2 = 20 Н, М = 1 Н·м. Общая длина стержня L=5l=0,5 м. Жесткость стержня при изгибе $EI_y = \text{const}$. Стержень имеет четыре грузовых участка.

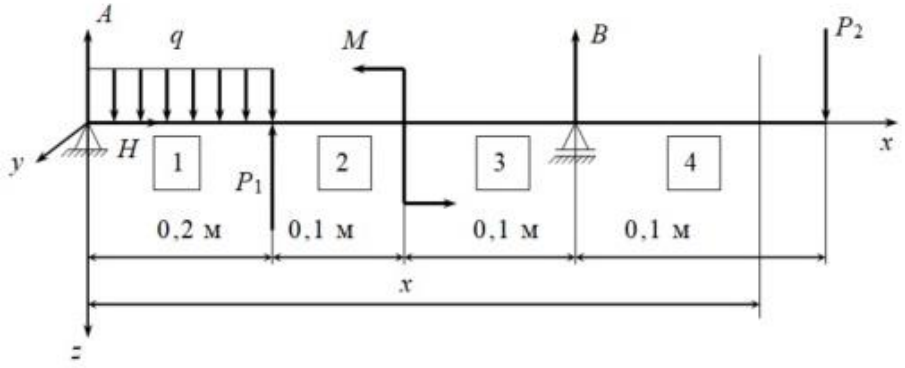


Рис. 3.6. Стержень к примеру 1

Требуется определить линейное перемещение u_z сечения x = 0.3 м и угол поворота θ сечения x = 0.4 м.

Решение: Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z – вниз, а ось y – перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

Обозначим на схеме реакции опор A, H, B (рис. 3.6) и определим неизвестные внешние силы (реакции опор) из уравнений статического равновесия стержня:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0;\ H = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ A)} = 0;\ B4l - q2l^2 + P_1 2l + M - P_2 5l = 0;\ B = 22{,}5 \text{ Н};$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ B)} = 0;\ -A4l + q6l^2 - P_1 2l + M - P_2 l = 0;\ A = 7{,}5 \text{ Н}.$$

Запишем выражения для определения прогиба и угла поворота произвольного сечения x стержня на четвертом участке.

$$u_z(x) = u_{z0} + \theta x + \frac{1}{EI_y}\left[-\frac{Ax^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{q(x-2l)^4}{24} - \frac{P_1(x-2l)^3}{6} + \frac{M(x-3l)^2}{2} - \frac{B(x-4l)^3}{6}\right];$$

$$-\theta = -\theta_0 + \frac{1}{EI_y}\left[-\frac{Ax^2}{2} + \frac{qx^3}{6} - \frac{q(x-2l)^3}{6} - \frac{P_1(x-2l)^2}{2} + M(x-3l) - \frac{B(x-4l)^2}{2}\right];$$

Определим из граничных условий начальные параметры u_{z0}, θ_0:

1) $u_z|_{x=0} = 0, u_{z0} = 0; u_z|_{x=4l} = 0,$

$$0 = \theta_0 4l + \frac{1}{EI_y}\left[-\frac{A(4l)^3}{6} + \frac{q(4l)^4}{24} - \frac{q(2l)^4}{24} - \frac{P_1(2l)^3}{6} + \frac{Ml^2}{2} - \frac{B(2l)^3}{6}\right];\ \theta_0 = -\frac{0{,}072}{EI_y}.$$

Определим перемещения u_z и угол поворота θ. Получим:

$$u_z|_{x=3l} = -\frac{0{,}031}{EI_y};\ \theta = -\frac{0{,}306}{EI_y}.$$

3.4. Понятие об обобщенной силе и обобщенном перемещении

Работа A постоянной по значению силы P, совершаемая ею на упругом перемещении δ точки ее приложения, равна скалярному произведению векторов силы P и перемещения δ: $A = (P, \delta)$.

Если сила P изменяется вместе с δ и между ними существует определенная зависимость $P(t) = f(\delta(t))$, то работа, совершаемая этой силой, может быть найдена следующим образом. Рассматриваем два близких момента времени. В первом из них имеем $P(t)$ и $\delta(t)$, а во втором – $P(t) + dP(t)$ и $\delta(t) + d\delta(t)$. Работа, совершаемая силой за отрезок времени между этими моментами, равна $dA = P(t)\,d\delta(t)$.

Работа, совершаемая силой $dP(t)$ на перемещении $d\delta(t)$, является величиной второго порядка малости, и ею можно пренебречь. Отсюда

$$A = \int_0^{\delta} P(t)\, d\delta(t) = \int_0^{\delta} f\,(\delta(t)\, d\delta(t)).$$

Если зависимость между силой и перемещением линейная, т. е. $P(t) = \alpha\delta(t)$ и, в частности, в конце роста силы $P = \alpha\delta$, то работа A представляется в виде

$$A = \int_0^{\delta} \alpha\delta(t)\, d\delta(t) = \frac{\alpha\delta^2}{2} = \frac{1}{2} P\delta.$$

Любая система уравновешенных сил есть обобщенная сила. Перемещение в направлении обобщенной силы есть обобщенное перемещение.

Потенциальная энергия деформации, если не учитывать потери, равна работе силы на перемещение. В твердом деформированном теле в окрестности точки, где известны составляющие напряжений, выделим бесконечно малый элемент dx, dy, dz.

На рис. 3.7, *а* показаны нормальные составляющие напряжений, на рис. 3.7, *б* – касательные составляющие напряжений, действующие на выделенный элемент.

а *б*

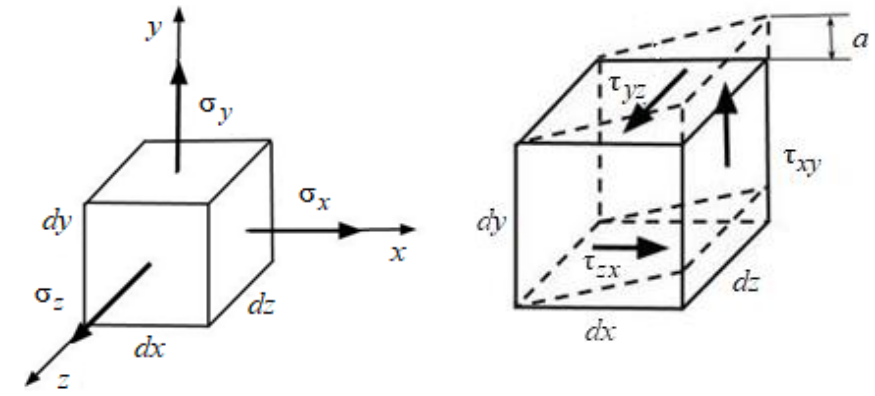


Рис. 3.7. Нормальные и касательные составляющие напряжений

В соответствии с принципом независимости действия сил работа (потенциальная энергия деформации) сил, действующих на грани $dy\,dz$ выделенного элемента, равна:

$$\frac{1}{2}\sigma_x\, dy\, dz\, \Delta dx + \frac{1}{2}\tau_{xy}\, dy\, dz\, a,$$

где $\sigma_x\, dy\, dz$ – сила, действующая на грани $dy\, dz$ выделяемого элемента в направлении оси координат x; Δdx – удлинение элемента в направлении оси

координат x (перемещение); $\tau_{xy}\,dy\,dz$ – сила, действующая по касательной к грани $dy\,dz$ выделенного элемента; a – сдвиг грани (перемещение).

Учитывая, что $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx}$, $\operatorname{tg}\gamma_{xy} = \dfrac{a}{dx} \cong \gamma_{xy}$ (ввиду малости угла сдвига), потенциальная энергия деформации от сил, действующих на грани $dy\,dz$ выделенного элемента, может быть записана как

$$\frac{1}{2}\sigma_x\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_x + \frac{1}{2}\tau_{xy}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{xy}.$$

Аналогично потенциальная энергия деформации запишется от сил, действующих на гранях $dx\,dz$ и $dx\,dy$ выделенного элемента:

$$\frac{1}{2}\sigma_y\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_y + \frac{1}{2}\tau_{yz}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{yz},$$

$$\frac{1}{2}\sigma_z\,dx\,dy\,dz\,\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{zx}\,dx\,dy\,dz\,\gamma_{zx}.$$

Потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема равна

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right).$$

В полученное уравнение потенциальной энергии деформации вместо линейных и угловых деформаций подставим их выражения из закона Гука. В результате получим:

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right).$$

3.5. Потенциальная энергия стержня при различных видах деформации

На рис. 3.8, *а* показан стержень, испытывающий деформацию растяжения-сжатия. На рис. 3.8, *б* распределение составляющих напряжений σ_x по сечению стержня. Выделим в стержне элемент длиной dx.

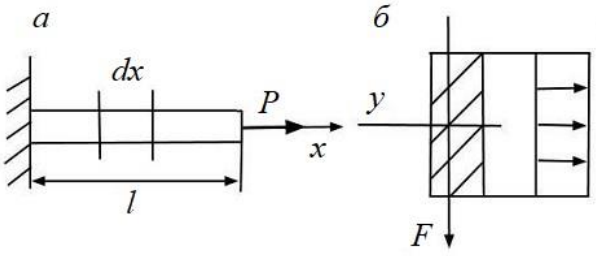


Рис. 3.8. Стержень, испытывающий деформацию растяжения-сжатия

При растяжении-сжатии нормальное напряжение $\sigma_x = N/F$, отсюда потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема стержня при деформации растяжения-сжатия

$$U_{0(N)} = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{N^2}{2EF^2}.$$

Потенциальная энергия деформации элементарного объема стержня длиной *dx*

$$U_{ax(N)} = \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

Потенциальная энергия деформации всего стержня длиною l:

$$U_{(N)} = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

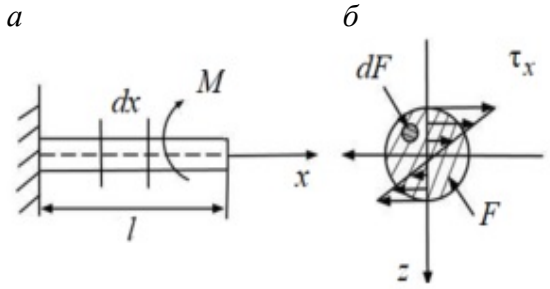


Рис. 3.9. Стержень, испытывающий деформацию кручения

На рис. 3.9, *а* изображен стержень, испытывающий деформацию кручения; на рис. 3.9, *б* показано распределение действующих напряжений по сечению.

При деформации кручения полное касательное напряжение составляет

$$\tau_x = \frac{M_x}{J_\rho}\rho.$$

Потенциальная энергия деформации единицы объема, выделенного элемента стержня длиной *dx*,

$$U_{0(M_x)} = \frac{M_x^2}{2GJ_\rho^2}\rho^2.$$

Касательные напряжения, возникающие при кручении, изменяются по сечению стержня (рис. 3.9, *б*). Поэтому для расчета потенциальной энергии элементарного объема выделенного элемента необходимо в сечении выделить элементарную площадку dF и проинтегрировать полученное выражение потенциальной энергии по площади сечения F:

$$U_{ax(M_x)} = \int_F \frac{M_x^2 \rho^2 dx\, dF}{2GJ_\rho^2} = \frac{M_x^2 dx}{2GJ_\rho^2}\int_F \rho^2 dF,$$

где интеграл вида $\int_F \rho^2 dF$ есть полярный момент инерции сечения J_ρ. Окончательно имеем:

$$U_{ax(M_x)} = \frac{M_x^2\,dx}{2GJ_\rho^2}.$$

Потенциальная энергия деформации стержня длиною l при кручении имеет вид

$$U_{M_x} = \int_0^l \frac{M_x^2\,dx}{2GJ_\rho^2}.$$

На рис. 3.10, *а* показан стержень, испытывающий деформацию чистого изгиба; на рис. 3.10, *б* дано распределение нормального составляющего напряжения, возникающего в сечении.

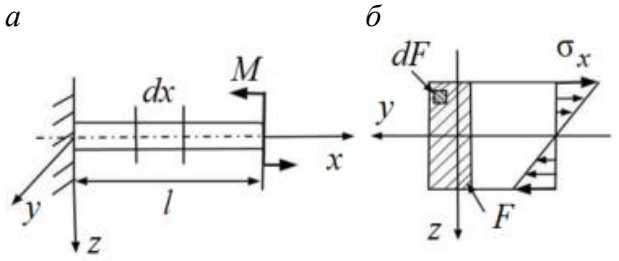


Рис. 3.10. Стержень, испытывающий деформацию чистого изгиба

При чистом изгибе нормальные составляющие напряжения вычисляются: $\sigma_x = M_y z/J_y$ если изгиб происходит в плоскости xOz, $\sigma_x = M_z y/J_z$ в плоскости xOy.

Потенциальная энергия деформации единицы объема выделенного элемента длиной dx имеет вид

$$U_{0(M_y)} = \frac{M_y^2 z^2}{2EJ_y^2}.$$

При чистом изгибе нормальные составляющие напряжения σ_x меняются по сечению (рис. 3.10, *б*). Поэтому при вычислении потенциальной энергии элементарного объема выделенного элемента необходимо в сечении выделить элементарную площадку dF и проинтегрировать полученное выражение по площади сечения F:

$$U_{dx(M_y)} = \int_F \frac{M_y^2 z^2 dx dF}{2EJ_y^2} = \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y^2}\int_F z^2\,dF,$$

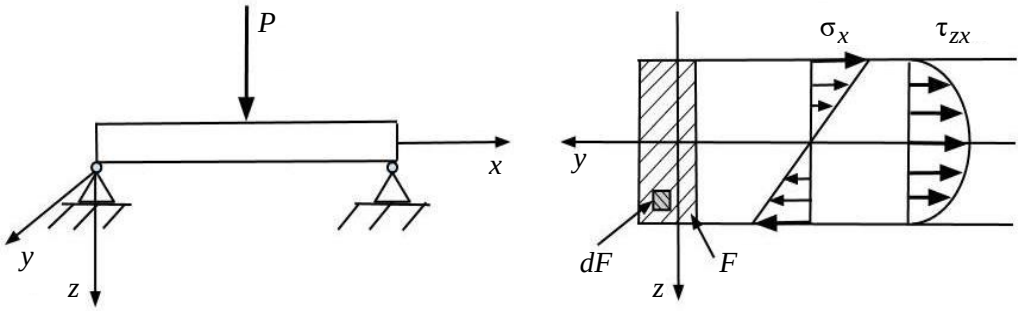
где $\int_F z^2\,dF = J_y$ – осевой момент инерции сечения относительно оси координат z. Потенциальная энергия деформации стержня длиной l

$$U_{(M_y)} = \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y}.$$

Аналогично потенциальная энергия для стержня, испытывающего чистый изгиб в плоскости *xOy*,

$$U_{(M_z)} = \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z}.$$

Рассмотрим на рис. 3.11, *а* потенциальную энергию стержня, испытывающего деформацию плоско-поперечного изгиба. На рис. 3.11, *б* представлено распределение нормальных и касательных составляющих напряжений по сечению стержня.



а *б*

Рис. 3.11. Стержень, испытывающий деформацию плоско-поперечного изгиба

При плоско-поперечном изгибе, если силы и моменты сил действуют в плоскости *xOz*, то

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \ \tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^*}{bJ_y};$$

если в плоскости *xOy* –

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z, \ \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^*}{bJ_z}.$$

Потенциальная энергия деформации единицы выделенного объема от действия перерезывающей силы Q_z составляет

$$U_{0(Q_z)} = \frac{Q_z^2 S_y^{*2}}{2Gb^2 J_y^2}.$$

Потенциальная энергия деформации элементарного объема выделенного элемента вычисляется аналогично потенциальной энергии при чистом изгибе, при этом разделим и умножим полученное выражение на F:

$$U_{dx(Q_z)} = \int_F \frac{Q_z^2 S_y^{*2}}{2Gb^2 J_y^2} dx dF = \frac{Q_z^2 dx}{2GJ_y^2} \frac{F}{F} \int_F \frac{S_y^{*2}}{b^2} dF = \frac{Q_z^2 dx}{2GF} K_z.$$

Аналогично, когда силы и моменты сил действуют в плоскости *xOy*,

$$U_{dx(Q_y)} = \frac{Q_y^2 dx}{2GF} K_y,$$

где $K_z = \frac{1}{J_y^2}\int_F \frac{S_y^{*2}}{b^2} dF$, $K_y = \frac{1}{J_z^2}\int_F \frac{S_y^{*2}}{b^2} dF$ – коэффициенты, зависящие от геометрических характеристик площади сечения стержня.

Потенциальная энергия деформации от действия перерезывающих сил в сечении стержня длиной l

$$U_{(Q_z)} = K_z \int_0^l \frac{Q_z^2 dx}{2GF}, \quad U_{(Q_y)} = K_y \int_0^l \frac{Q_y^2 dx}{2GF}.$$

Окончательно потенциальная энергия деформации стержня при общем пространственном нагружении, когда возникают все шесть внутренних усилий, имеет вид

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_p} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} + K_y \int_0^l \frac{Q_y^2 dx}{2GF} + K_z \int_0^l \frac{Q_z^2 dx}{2GF}.$$

3.6. Теорема Кастельяно

Теорема Кастельяно устанавливает зависимость между обобщенным перемещением и потенциальной энергией. Пусть к твердому телу приложена обобщенная сила P. От силы P тело получило перемещение δ. Работа силы P на перемещение δ, а следовательно, и потенциальная энергия деформации будет равна $A = U = P\delta$.

Дадим силе приращение dP. Твердое тело от силы dP получит перемещение $d\delta$ и, соответственно, потенциальная энергия получит приращение $U + \frac{\partial U}{\partial P} dP$.

Приложим силы в обратном порядке. Сначала приложим силу dP, и она на перемещении $d\delta$ совершит работу $\frac{1}{2} dP\, d\delta$. Затем приложим силу P, и она совершит работу на перемещение δ, которая будет равна потенциальной энергии U. Одновременно сила dP, приложенная раньше, совершит работу на перемещение $\delta - dP\delta$.

Сопоставим потенциальную энергию деформации в первом случае приложения сил и во втором:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P} dP = U + \frac{1}{2} dP\, d\delta + dP\delta.$$

Членом $\frac{1}{2} dP\, d\delta$ можно пренебречь как величиной второго порядка малости, и тогда имеем

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Отсюда следует формулировка теоремы Кастельяно: обобщенное перемещение равно частной производной от потенциальной энергии по обобщенной силе.

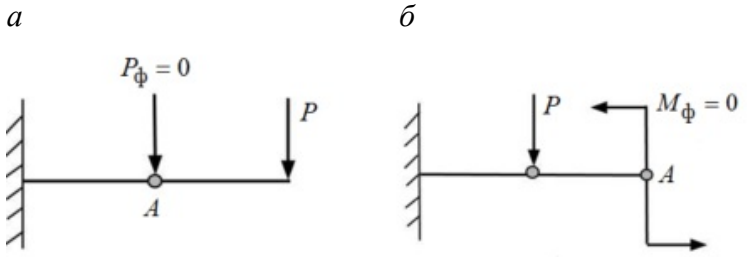


Рис. 3.11. Использование фиктивных силы и момента

В общем случае для стержня, испытывающего деформации растяжения-сжатия, кручения и изгиба, теорема Кастельяно имеет вид

$$\delta_i = \int_l \frac{N \dfrac{\partial N}{\partial P_i}}{EF} dx + \int_l \frac{M_x \dfrac{\partial M_x}{\partial P_i}}{GJ_\rho} dx + \int_l \frac{M_y \dfrac{\partial M_y}{\partial P_i}}{EJ_y} dx + \int_l \frac{M_z \dfrac{\partial M_z}{\partial P_i}}{EJ_z} dx +$$

$$+ K_z \int_l \frac{Q_z \dfrac{\partial Q_z}{\partial P_i}}{GF} dx + K_y \int_l \frac{Q_y \dfrac{\partial Q_y}{\partial P_i}}{GF} dx. \qquad (3.11)$$

Процесс расчета перемещений по данной формуле заключается в составлении уравнений для внутренних усилий по участкам стержня, вычисления производных от них по некоторой обобщенной силе и вычисления интегралов.

Если вычислению подлежат перемещения в сечениях, где не приложена внешняя сила (это относится к деформации изгиба), то прибегают к искусственному приему дополнения нагрузки, т. е. в данном сечении прикладывается фиктивная сила, равная нулю, если определяется линейное перемещение (рис. 3.11, *а*), или фиктивный момент, равный нулю, если определяется угловое перемещение (рис. 3.11, *б*).

3.7. Формула Максвелла–Мора

Внутренние усилия, входящие в (3.11) являются линейными функциями приложенных сил P_i и могут быть записаны в форме сумм:

$$N=\sum_{i=1}^{n}N^{(i)}P_i,\quad Q_y=\sum_{i=1}^{n}Q_y^{(i)}P_i,\quad Q_z=\sum_{i=1}^{n}Q_z^{(i)}P_i,$$
$$M_x=\sum_{i=1}^{n}M_x^{(i)}P_i,\quad M_y=\sum_{i=1}^{n}M_y^{(i)}P_i,\quad M_z=\sum_{i=1}^{n}M_z^{(i)}P_i. \tag{3.12}$$

Смысл коэффициентов $N^{(i)}$, ..., $M_z^{(i)}$ можно выяснить следующим образом: положим силы P_i равными нулю при $i\neq k$ и приравняем силу P_k к единице (при $i=k$). Тогда получим: $N=N^{(k)}$, $Q_y=Q_y^{(k)}$, $Q_z=Q_z^{(k)}$, $M_x=$ $=M_x^{(k)}$, $M_y=M_y^{(k)}$, $M_z=M_z^{(k)}$.

Таким образом, коэффициенты есть внутренние усилия, вызываемые единичной силой.

Дифференцируем (3.12) по P_k и получаем:

$$\frac{\partial N}{\partial P_k}=N^{(k)},\ \frac{\partial Q_y}{\partial P_k}=Q_y^{(k)},\ \frac{\partial Q_z}{\partial P_k}=Q_z^{(k)},$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial P_k}=M_x^{(k)},\ \frac{\partial M_y}{\partial P_k}=M_y^{(k)},\ \frac{\partial M_z}{\partial P_k}=M_z^{(k)}.$$

Производная от внутреннего усилия по обобщенной силе есть внутреннее усилие от внешней силы, равной единице.

Окончательно формула Максвелла–Мора имеет вид

$$\delta_i=\int_l\frac{N\bar{N}}{EF}dx+\int_l\frac{M_x\bar{M}_x}{GJ_\rho}dx+\int_l\frac{M_y\bar{M}_y}{EJ_y}dx+\int_l\frac{M_z\bar{M}_z}{EJ_z}dx+$$
$$+K_z\int_l\frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF}dx+K_y\int_l\frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF}dx, \tag{3.13}$$

где $\bar{N}$, ..., $\bar{Q}_z$ – внутренние усилия от единичной силы.

При определении перемещений по формуле Максвелла–Мора необходимо в сечении, где вычисляется линейное перемещение, приложить внешнюю силу $P_{(1)}=1$ или если определяется угловое перемещение момент

$M_{(1)} = 1$, независимо от того, приложены в этом сечении какие-либо внешние силы или нет.

Изложенные энергетические методы механики твердого деформированного тела широко используются при решении статически неопределимых задач. Известны два метода расчета статически неопределимых систем – метод сил и метод перемещений. В первом за лишние неизвестные принимаются силы, во втором – перемещения.

4. МЕТОД СИЛ ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Для определения лишних связей (реакций опор) при решении статически неопределимых систем методом сил составляются дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных.

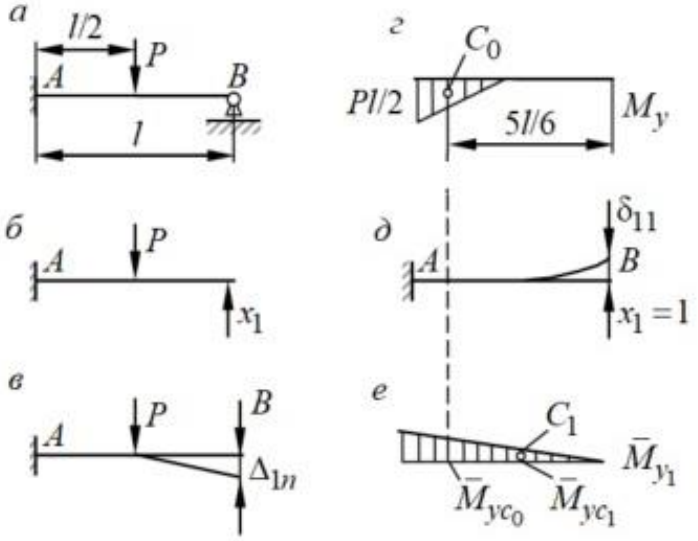


Рис. 4.1. Один раз статически неопределимая система

Эти уравнения удобно составлять в так называемой канонической форме, т. е. по определенной закономерности.

Вначале рассмотрим систему, один раз статически неопределимую (рис. 4.1, *а*).

В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору *B*. Тогда, нагрузив основную систему заданной нагрузкой и лишней неизвестной

силой x_1 (рис. 4.1, *б*), нужно приравнять нулю полное перемещение точки *B* основной системы по направлению x_1:

$$\Delta_1 = \Delta_1\left(P, x_1\right) = 0. \tag{4.1}$$

Для вычисления Δ_1 применим принцип независимости действия сил: $\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}$, где Δ_{1P} – перемещение от заданной нагрузки (рис. 4.1, *в*); Δ_{11} – перемещение от силы x_1.

Если δ_{11} – перемещение по направлению x_1 от силы $x_1 = 1$ (рис. 4.1, *д*), то $\Delta_{11} = \delta_{11} x_1$ и уравнение (4.1) примет вид

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{4.2}$$

Это каноническая форма уравнения перемещений для единожды статически неопределимой системы. Из (4.2):

$$x_1 = \Delta_{1P} / \delta_{11}.$$

Для системы с двумя лишними связями, как, например, на рис. 4.2, *а*, дополнительные уравнения перемещений сечения *A* основной системы (рис. 4.2, *б*) имеют вид $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, где $\Delta_1 = \Delta_1\left(P, x_1, x_2\right)$ – полное перемещение точки *A* по направлению x_1 от заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий x_1, x_2; $\Delta_2 = \Delta_2\left(P, x_1, x_2\right)$ – полное перемещение точки *A* по направлению x_2 от указанных нагрузок.

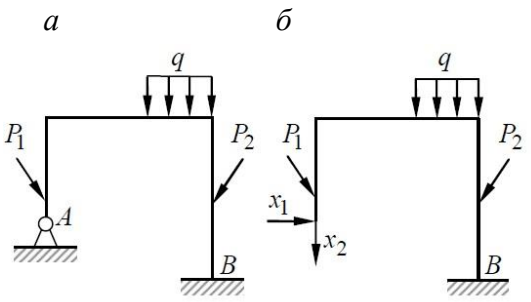


Рис. 4.2. Дважды статически неопределимая система

Исходя из принципа независимости действия сил, запишем перемещения в виде сумм перемещений, вызванных отдельно каждой из неизвестных сил x_1, x_2 и заданной нагрузкой *P*. Использовав введенные ранее обозначения перемещений, найдем, что

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0, \quad \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \tag{4.3}$$

Полное перемещение Δ_{ik} можно записать как произведение удельного перемещения δ_{ik}, вызванного действием единичной силы, на величину соответствующей обобщенной силы:

$$\Delta_{11} = \delta_{11} x_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12} x_2, \quad \Delta_{ik} = \delta_{ik} x_k.$$

Таким образом, выражения (4.3) принимают вид

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Это каноническая форма уравнений перемещений для системы, дважды статически неопределимой.

По аналогии можно записать в канонической форме уравнения перемещений для любой *n* раз статически неопределимой системы:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \ldots + \delta_{1n} x_n + \Delta_{1P} = 0; \\
&\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \ldots + \delta_{2n} x_n + \Delta_{2P} = 0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\delta_{n1} x_1 + \delta_{n2} x_2 + \ldots + \delta_{nn} x_n + \Delta_{np} = 0.
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Перемещения Δ_{ip} и Δ_{ik}, входящие в канонические уравнения, чаще всего определяют по методу Максвелла–Мора (уравнения (3.13)). При этом для балок и рам влиянием перерезывающих и нормальных сил обычно пренебрегают и учитывают лишь изгибающие моменты. Однако определяя перемещения в балках прямоугольного поперечного сечения, для которых отношение высоты сечения к длине пролета $h/L \geq 1/5$, перерезывающие силы следует учитывать обязательно, т.к. ошибка, вызванная не учётом нормальных и перерезывающих сил, становится существенной, особенно для высокой рамы. В реальных балочных, рамных и арочных конструкциях отношение *h/L* обычно меньше 1/10. Поэтому при определении перемещений в общей формуле Мора вполне допустимо сохранить лишь изгибающие моменты.

Для определения перемещений строим эпюры изгибающих моментов в основной системе отдельно от заданной нагрузки (состояние *P*) и от каждой единичной силы: $x_1 = 1$ (состояние 1); $x_2 = 1$ (состояние 2); …; $x_n = 1$ (состояние *n*). Ординаты соответствующих эпюров обозначим, как обычно, через M_{yp}, M_{y1}, M_{y2}, …, M_{yn}.

Тогда на основании (3.13) найдем:

$$\Delta_{1P} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{y1}}}{EJ_y} dx, \quad \Delta_{2P} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{y2}}}{EJ_y} dx, \quad \Delta_{nP} = \int_L \frac{M_{yp}\overline{M_{yn}}}{EJ_y} dx.$$

Удельные перемещения, имеющие одинаковые индексы и называемые главными коэффициентами канонических уравнений, определяют следующим образом:

$$\delta_{11} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y1}}}{EJ_y} dx,\ \delta_{22} = \int_L \frac{\overline{M_{y2}}\,\overline{M_{y2}}}{EJ_y} dx,\ \delta_{nn} = \int_L \frac{\overline{M_{yn}}\,\overline{M_{yn}}}{EJ_y} dx.$$

Эти перемещения положительны.

Удельные перемещения, имеющие неодинаковые индексы и называемые побочными коэффициентами, определяют по формулам

$$\delta_{12} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y2}}}{EJ_y} dx,\ \delta_{13} = \int_L \frac{\overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y3}}}{EJ_y} dx,\ \delta_{ik} = \int_L \frac{\overline{M_{yi}}\,\overline{M_{yk}}}{EJ_y} dx.$$

Они могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

В тех случаях, когда кроме внешних нагрузок нужно учесть и влияние температуры, порядок расчета остается прежним. Свободные члены канонических уравнений (4.4) при этом представляют собой перемещения в основной системе не только от заданных нагрузок, но и от изменения температуры:

$$\begin{gathered} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1T}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nT}, \end{gathered} \qquad (4.5)$$

где Δ_{iT} – перемещения в основной системе по направлению силы X_i, вызванное изменением температуры.

Определив коэффициенты δ_{ik} и четыре свободных члена Δ_{iP} и Δ_{iT} из системы линейных уравнений (4.5) находим значения лишних неизвестных усилий $x_1, x_2, ..., x_n$. Далее обычным способом строим эпюры внутренних усилий N, Q, M_y в элементах системы. Иногда строить эпюры удобно методом сложения эпюров Мура с эпюрами $\bar{M}_{y1}$, $\bar{M}_{y2}$, ..., $\bar{M}_{yn}$, предварительно умноженными на значения $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$M_y = \bar{M}_{y1}x_1 + \bar{M}_{y2}x_2 + ... + \bar{M}_{yP};$$

$$Q = Q_1x_1 + Q_2x_2 + ... + Q_P;$$

$$N = N_1x_1 + N_2x_2 + ... + N_P.$$

Следует отметить, что буквенный вид канонических уравнений остается неизменным при любом возможном варианте основной системы. Изменяется

лишь смысл лишних неизвестных и геометрический смысл перемещений. Например, при выборе в качестве лишних неизвестных внутренних сил в каких-либо сечениях коэффициенты в канонических уравнениях представляют собой соответствующие взаимные перемещения сечений по направлению лишних неизвестных усилий.

На рис. 4.3 показана трижды статически неопределимая плоская рама (рис. 4.3, *а*) и два варианта основной системы (рис. 4.3, *б*, *в*). Для любой трижды статически неопределимой системы канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

При выборе основной системы по первому варианту (рис. 4.3, *б*) система уравнений (4.6) выражает требование равенства нулю перемещений сечения *A* по направлениям x_1, x_2, x_3.

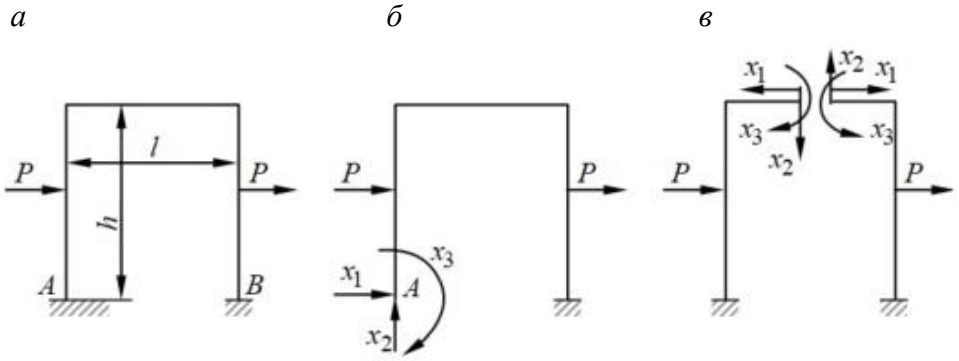


Рис. 4.3. Трижды статически неопределимая плоская рама

Второй вариант основной системы (рис. 4.3, *в*) образован разрезом ригеля. Так как в плоской системе в сечениях действуют три силовых фактора (нормальная сила, перерезывающая сила и изгибающий момент), то к сторонам разреза следует приложить в качестве лишних неизвестных указанные силовые факторы x_1, x_2, x_3, выражающие взаимное действие обеих частей системы друг на друга в данном сечении. При таком выборе основной системы уравнения (4.6) выражают равенство нулю полных взаимных перемещений сторон разреза по направлениям лишних неизвестных. Третье уравнение системы (4.6) означает равенство нулю перемещения по направлению x_3, т. е. взаимного угла поворота сторон разреза под действием заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий.

Приняв в качестве лишних неизвестных внутренние усилия, во многих случаях можно значительно упростить расчет. Например, если исходная система симметрична (по конфигурации и расположению жесткостей), то основную систему выгодно строить также симметричной, приняв при этом, что некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю. Так, при расчете симметричной рамы (рис. 4.3, *а*) основную систему целесообразно получить разрезом горизонтального стержня (ригеля) посередине (рис. 4.4, *а*). При этом основная система будет также симметричной. Тогда в числе лишних неизвестных будем иметь симметричные усилия x_1, x_3 и кососимметричные усилия x_2.

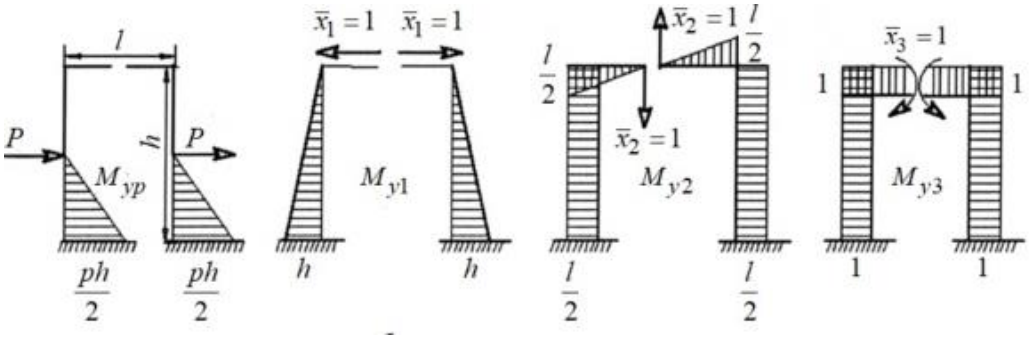


Рис. 4.4. Использование ригеля для создания основной системы

Эпюры изгибающих моментов от усилий $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ и $\bar{x}_3 = 1$ показаны на рис. 4.4, *б – г*. Следует заметить, что эпюры $\overline{M_{y1}}$ и $\overline{M_{y3}}$ симметричны, а эпюр $\overline{M_{y2}}$ кососимметричен. Перемножение симметричного эпюра на кососимметричный дает в результате нуль.

Определим перемещение $\delta_{12} = \delta_{21}$. Пользуясь способом Верещагина, получим:

$$\delta_{12} = \frac{I}{EJ_y}\left(-\frac{h^2}{2}\,\frac{l}{2} + \frac{h^2}{2}\right) = 0.$$

Аналогично $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.$

Таким образом, система уравнений (5.6) упрощается и примет вид

$$\begin{gathered}\delta_{11}x_1 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} = 0;\\ \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0;\\ \delta_{31}x_1 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0.\end{gathered} \qquad (4.7)$$

Если при этом заданная нагрузка P кососимметрична (рис. 4.4, *а*), то эпюр M_{yp} также кососимметричен (рис. 4.4, *а*) и перемещение $\Delta_{1p} = \Delta_{3p} = 0.$ Тогда из первого и третьего уравнений (4.7) следует, что симметричные усилия в месте разреза равны нулю: $x_1 = 0,\ x_3 = 0.$

Следует отметить, что когда нагрузка симметрична, то эпюр M_{yp} также симметричен и $\Delta_{2p} = 0.$ Тогда из второго уравнения (4.7) следует, что кососимметричное усилие $x_2 = 0.$

Как было показано ранее, коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных неизвестных сил и от приложенной нагрузки. Они определяются перемножением эпюров изгибающих моментов. При перемножении эпюров (использование метода Верещагина) могут быть допущены ошибки, что может дать значительные погрешности в определении перемещений. При этом результат решения канонических уравнений будет неверным.

Для оценки ошибки необходимо проводить проверку полученных коэффициентов системы канонических уравнений.

Построчная проверка: 1) загрузим основную систему одновременно всеми лишними неизвестными, равными единице, и построим от них в основной системе эпюр изгибающих моментов. Его ординаты обозначим через $\bar{M}_{ys}$. Тогда для каждого сечения системы имеем:

$$\overline{M_y} = \bar{M}_{y1} + \bar{M}_{y2} + ... + \overline{M_{yn}};$$

2) умножим суммарный эпюр на каждый из единичных эпюров поочередно. При этом получим суммарные значения коэффициентов при неизвестных, входящих в каждое из уравнений системы канонических уравнений:

$$\delta_{1s} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{1i} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \ldots + \delta_{1n},$$

$$\delta_{1s} = \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{y1}}\frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y1}}\bar{M}_{y2}\frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{yn}}\frac{dx}{EJ_y} =$$

$$= \int_L \overline{M_{y1}}\left(\overline{M_{y1}} + \overline{M_{y2}} + ... + \overline{M_{yn}}\right)\frac{dx}{EJ_y} = \int_L \overline{M_{y1}}\bar{M}_{ys}\frac{dx}{EJ_y};$$

$$\delta_{2s} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \ldots + \delta_{2n} = \int_L \overline{M_{y2}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y};$$

$$\delta_{ns} = \delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \ldots + \delta_{nn} = \int_L \overline{M_{yn}}\bar{M}_{ys}\,\frac{dx}{EJ_y},$$

где $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \delta_{3s}, ..., \delta_{ns}$ – сумма коэффициентов в строке.

Проверка вычисленных коэффициентов (перемещений), входящих в первое каноническое уравнение, состоит в сопоставлении их суммы с величиной δ_{1s}, т. е. для каждой *k*-й строки $\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} = \delta_{ks}$.

Для универсальной проверки составим сумму коэффициентов канонического уравнения $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \delta_{3s}, ..., \delta_{ns}$:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{3s} + \ldots + \delta_{ns},$$

$$\delta_{1s} = \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y},$$

$$\delta_{2s} = \int_L \overline{M_{y2}}\bar{M}_{ys}\,\frac{dx}{EJ_y},$$

.....

$$\delta_{ns} = \int_L \overline{M_{yn}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y},$$

Тогда

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \int_L \overline{M_{y1}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y} + \int_L \overline{M_{y2}}\bar{M}_{ys}\,\frac{dx}{EJ_y} + ... + \int_L \overline{M_{yn}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y} =$$

$$\int_L \overline{M_{ys}}\left(\overline{M_{y1}} + \overline{M_{y2}} + ... + \overline{M_{yn}}\right)\frac{dx}{EJ_y} = \int_L \overline{M_{ys}}\bar{M}_{ys}\,\frac{dx}{EJ_y} \int_L \overline{M_{ys}}\,\overline{M_{ys}}\,\frac{dx}{EJ_y} = \delta_{ss}.$$

Универсальная проверка состоит в следующем:

1. Алгебраическим сложением определяется сумма всех найденных коэффициентов (единичных перемещений), входящих в систему канонических уравнений:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{is} = \left(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \ldots + \delta_{nn}\right) + 2\left(\delta_{12} + \delta_{13} + \ldots + \delta_{2n} + \ldots + \delta_{n-1,n}\right).$$

Вычисляется $\delta_{ss} = \int_L \overline{M_{ys}^2} \frac{dx}{EJ_y}$ (умножением эпюра $\overline{M_{ys}}$ на $\bar{M}_{ys}$).

2. Проверяется выполнение условия $\delta = \delta_{ss}$.

Для отыскания ошибок в определении коэффициентов пользуются неравенством $\delta_{ii}\delta_{ik} \geq \delta_{ik}^2$.

Для проверки коэффициентов канонических уравнений от нагрузки поступают следующим образом: вычисляют $\Delta_{sp} = \int_L \overline{M_{ys}} \bar{M}_{yp} \frac{dx}{EJ_y}$, где $\bar{M}_{yp}$ – изгибающий момент от заданной нагрузки в основной системе; проверяют выполнение условия

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + ... + \Delta_{np} = \Delta_{sp}.$$

Для оценки погрешности расчета можно ограничиться универсальной проверкой. Для определения ошибки при вычислении коэффициентов рекомендуется проводить построчную проверку.

Приведенные формулы и рассуждения рассмотрены на примерах стержневых систем, испытывающих деформацию изгиба, однако все полученные математические зависимости справедливы для систем любого вида. Различие заключается лишь в форме выражений для вычисления коэффициентов (4.4)

5. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

5.1. Основные расчетные зависимости при силовом статическом воздействии

Полые корпуса конструкций электронной техники при расчете могут быть сведены к схеме осесимметричного цилиндра.

Рассмотрим напряжения и деформации, возникающие в сечении осесимметричного цилиндра, нагрузив его для общности рассуждений растягивающей нагрузкой *P* по внешнему контуру (рис. 5.1).

В точках сечения возникают радиальные перемещения, которые считаются положительными, если они направлены от оси цилиндра. Радиальное σ_r и окружное σ_φ напряжения, возникающие в точках сечения, связаны между собой уравнением равновесия осесимметричного цилиндра

$$\sigma_r + r\frac{\sigma_r}{dr} - \sigma_\varphi = 0, \tag{5.1}$$

где r – текущий радиус.

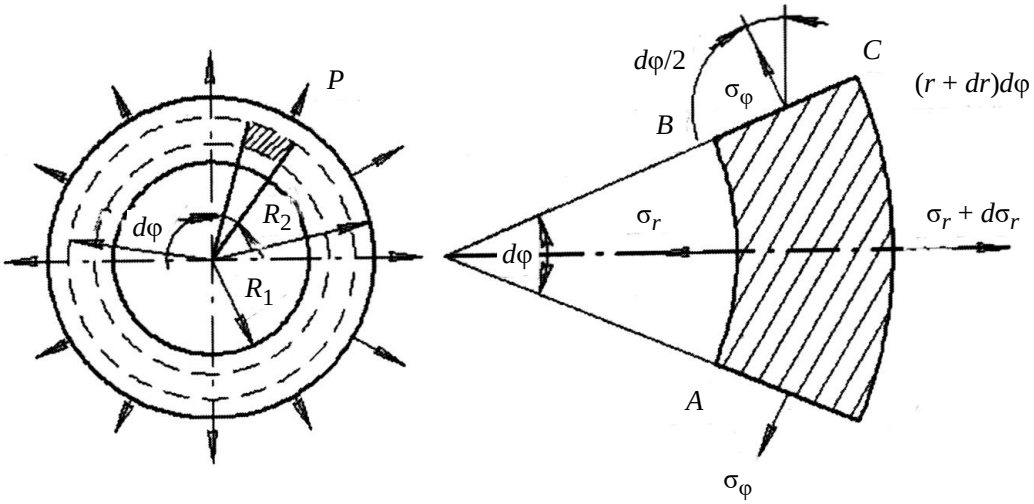


Рис. 5.1. Напряжения и деформации в сечении осесимметричного цилиндра

Напряжения σ_r и σ_φ – главные; касательные напряжения отсутствуют, так как отсутствуют деформации сдвига в силу осевой симметрии сечения. Из (5.1) видно, что задача определения напряжений в осесимметричном цилиндре является статически неопределимой и для ее решения следует ввести дополнительно уравнение совместности деформаций.

В сечении возникают радиальная ε_r и окружная ε_φ относительные линейные деформации, которые определяются через перемещения следующими выражениями:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \tag{5.2}$$

Деформации можно связать с напряжениями при помощи закона Гука в обратной форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right), \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right). \tag{5.3}$$

Подставив значения (5.2) и (5.3) в формулу равновесия осесимметричного цилиндра (5.1), получим уравнение только с одним неизвестным:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \tag{5.4}$$

где u – перемещение по радиусу цилиндра.

Решение этого уравнения:

$$u(r) = Cr + \frac{D}{r}. \tag{5.5}$$

Произвольные постоянные C и D в выражении (5.5) определяются из граничных условий на внутренней и на внешней поверхностях цилиндра. Зная перемещение u, легко подсчитать значение радиального напряжения σ_r и значение окружного напряжения σ_φ.

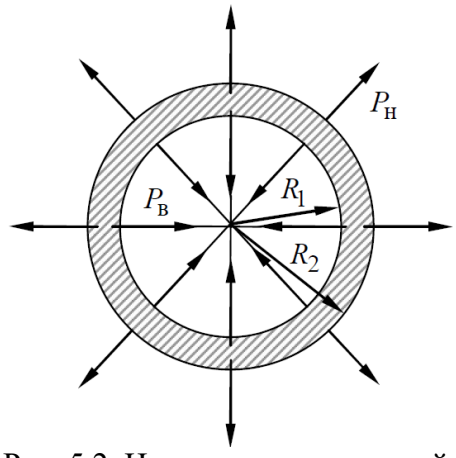


Рис. 5.2. Цилиндр, нагруженный растягивающими нагрузками

Например, для цилиндра, нагруженного растягивающими нагрузками $P_н$ и $P_в$ – внешней и внутренней соответственно (рис. 5.2), напряжения можно найти по формулам:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C - (1-\nu)\frac{D}{r^2}\right), \qquad (5.6)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)C + (1-\nu)\frac{D}{r^2}\right)$$

Граничные условия $\sigma_r|_{R=R_1} = P_в,\ \sigma_r|_{R=R_2} = P_н$. Отсюда:

$$C = \frac{1-\nu}{E}\frac{P_н R_2^2 - P_в R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \qquad (5.7)$$

$$D = \frac{1+\nu}{E}\frac{P_н - P_в}{R_2^2 - R_1^2}R_1^2 R_2^2.$$

С учетом наличия или отсутствия давления на внутренней и на внешней поверхностях цилиндра, а также их знаков «+» – при растяжении, «–» – при сжатии, подставив эти значения в (5.6)–(5.7), можно подсчитать нормальные напряжения при любом варианте нагружения цилиндра.

Многие корпуса полупроводниковых приборов состоят из двух или трех цилиндров, выполненных из различных материалов, например, металлостеклянные, металлокерамические и т. д.

5.2. Составные цилиндры

При расчете составных конструкций каждый из цилиндров рассматривается отдельно с учетом того, что по поверхности контакта действует давление p, которое определяется из условий совместности перемещений на контактной поверхности.

Так, например, при контакте двух цилиндров (рис. 5.3) граничные условия имеют следующий вид:

– для внутреннего цилиндра: при $\sigma_r|_{R=R_1} = P_в,\ \sigma_r|_{R=R_2} = P$,

– для наружного цилиндра: при $\sigma_r|_{R=R_2} = P,\ \sigma_r|_{R=R_3} = P_н$.

Условие совместности перемещений:

$$u_1(r) = u_2(r),$$

$$u_1(r) = C_I R_2 + \frac{D_I}{R_2},\ \ u_2(r) = C_{II} R_2 + \frac{D_{II}}{R_2}.$$

Значения C_I, D_I, C_{II}, D_{II} находим подстановкой в выражения (5.7) для C и D соответствующих значений коэффициента Пуассона ν, модуля упругости E и радиусов цилиндров. Приравняв $u_1(r)$ и $u_2(r)$, получим уравнение с одним неизвестным P. Вычислив контактное давление p, можно подсчитать σ_r и σ_φ в обоих цилиндрах по (5.6)–(5.7).

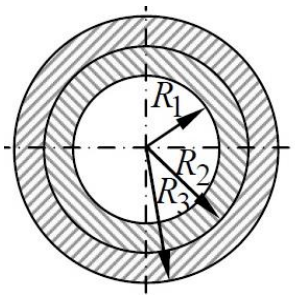


Рис. 5.3. Составной цилиндр

Если слои составного цилиндра соединены с натягом, условие совместности деформаций примет вид

$$u_1(r) - u_2(r) = \Delta/2,$$

где Δ – величина натяга.

При отсутствии внутреннего и внешнего давлений на цилиндры значение контактного давления p, возникающего в результате натяга, может быть получено из приведенных ранее зависимостей в виде

$$p = \frac{\Delta}{2R_к} \Bigg/ \left[\frac{1}{E_1}\left(\frac{R_к^2 + R_в^2}{R_к^2 - R_в^2} - \nu_1 \right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{R_н^2 + R_к^2}{R_н^2 - R_к^2} - \nu_2 \right) \right]. \qquad (5.8)$$

В (5.8) первое слагаемое в квадратных скобках относится к внутреннему цилиндру, второе – к наружному. Соответственно обозначены: $R_в$ – внутренний радиус; $R_к$ – радиус поверхности контакта; $R_н$ – наружный радиус составного цилиндра.

Возможны варианты, когда составная конструкция представляет собой втулку (наружный цилиндр), напрессованную на вал, или втулку (внутренний цилиндр), запрессованную в корпус.

В случае напрессовки втулки толщиной h на вал в квадратных скобках формулы (5.8) первое слагаемое относится к валу, второе – ко втулке. При этом $R_в = 0, R_к = R - h/2\,, R_н = R + h/2$, ($R$ – средний радиус втулки).

Напряжения, возникающие во втулке:

$$\sigma_r = \left[\left(\frac{pR_к^2}{R_н^2 - R_к^2}\right)\left(1 - \frac{R_н^2}{r}\right)\right],\ \sigma_\varphi = \left[\left(\frac{pR_к^2}{R_н^2 - R_к^2}\right)\left(1 + \frac{R_н^2}{r}\right)\right].$$

В случае запрессовки втулки толщиной h в корпус первое слагаемое в квадратных скобках выражения (5.8) относится к втулке, второе – к корпусу. Внутренний радиус втулки $R_в = R - h/2$, радиус контактной поверхности $R_к = R + h/2$, наружный радиус корпуса $R_н$. В этом случае напряжения σ_r и σ_φ, соответственно, равны

$$\sigma_r = \left[\left(\frac{pR_к^2}{R_к^2 - R_в^2}\right)\left(1 - \frac{R_в^2}{r^2}\right)\right],\ \sigma_\varphi = \left[\left(\frac{pR_к^2}{R_к^2 - R_в^2}\right)\left(1 + \frac{R_в^2}{r^2}\right)\right].$$

Таким образом, получены основные уравнения для определения радиальных и окружных напряжений в составных цилиндрических конструкциях при действие внутреннего и внешнего давлений, а также в случае соединения их с натягом.

5.3. Основные расчетные зависимости при определении температурных напряжений и деформаций

Математическая модель термонапряженного состояния описывается известными уравнениями из общей теории напряженно-деформируемого состояния в окрестности точки твердого тела.

При температурном воздействии уравнения равновесия Коши для точки на поверхности тела дифференциальные уравнения равновесия и закон Гука имеют вид, аналогичный уравнениям для напряженно-деформируемого состояния при силовом воздействии, и включают параметры, характеризующие действие температурного поля:

$$\sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma = \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} \cos\alpha;$$

$$\tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma = \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} \cos\beta;$$

$$\tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma = \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} \cos\gamma;$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}=0;\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}=0;$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]+\alpha T;\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]+\alpha T;$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]+\alpha T,$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения.

Математическая модель термонапряженного состояния зависит от выбранной расчетной схемы конструкции. Конструкции полупроводниковых приборов и микросхем при исследовании напряженно-деформированного состояния чаще всего представляются в виде стержневой расчетной схемы, в том числе многослойного стержня, либо в виде расчетной схемы многослойного цилиндра, пластины или многослойной пластины.

Для стержня, испытывающего при температурном воздействии деформацию растяжения-сжатия, условие совместности перемещений запишется в виде

$$\Delta L=\Delta L_R+\Delta L_T=0, \tag{5.9}$$

где $\Delta L_R={RL}/{EF}$ – изменение длины стержня из-за сил, действующих в опорах; $\Delta L_T=\alpha\Delta T$ – изменение длины стержня в зависимости от температуры (ΔT – изменение температур стержня от его начальной температуры до конечной; L, F – длина и площадь поперечного сечения стержня соответственно).

Определив из уравнения совместности перемещений реакцию в опорах R, находим напряжения в стержне вследствие температурного воздействия.

Для стержня, испытывающего при температурном воздействии деформацию изгиба, уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=0,\ \frac{\partial^2(\sigma_x+\alpha E T)}{\partial z^2}=0,$$

отсюда

$$\sigma_x=\alpha E\left[-T+\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}T dz+\frac{3z}{2h^3}\int_{-h}^{h}T dz\right],$$

где h – высота сечения стержня (ширина b = 1). Оси y и z являются главными осями.

Уравнение совместности перемещений для расчетной схемы двухслойного цилиндра запишется в виде

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{I}}(r)\big|_{r=R_{\mathrm{к}}} &= u_{\mathrm{II}}(r)\big|_{r=R_{\mathrm{к}}}, \\ C_{\mathrm{I}}r + D_{\mathrm{II}}/r + \alpha_1 r\Delta T\big|_{r=R_{\mathrm{к}}} &= C_{\mathrm{II}}r + D_{\mathrm{II}}/r + \alpha_2 r\Delta T\big|_{r=R_{\mathrm{к}}}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $R_{\mathrm{к}}$ – радиус контактной поверхности цилиндров; ΔT – разница между конечной и начальной температурами нагрева конструкции.

Определив из уравнения совместности перемещений контактное давление p, находим по формулам (5.6) напряжения σ_r и σ_φ в обоих цилиндрах.

Произвольные постоянные C_I, C_{II}, D_I, D_{II} определяются по формулам (5.7) в зависимости от давления в месте контакта цилиндров.

Уравнение совместности перемещений для расчетной схемы многослойного стержня (два слоя материала и соединительный слой) имеет вид

$$u_{1x} - u_{2x} = a.$$

При температурном воздействии в многослойной незакрепленной стержневой конструкции возникает деформация изгиба. Перемещения первого слоя u_{1x} и второго слоя u_{2x} складываются из изменения длины слоя от температурного воздействия и от действия на него соединительного слоя.

Величина a определяется из условий деформации соединительного слоя. Определив из уравнения совместности перемещений давление между слоями p, можно определить изгибающий момент, а затем и напряжения, возникающие в каждом слое стержня.

5.4. Температурные напряжения в составных цилиндрах

Полупроводниковые приборы и интегральные микросхемы при изготовлении, испытаниях и эксплуатации испытывают температурное воздействие в достаточно широком диапазоне, поэтому при проектировании этих приборов необходимо анализировать термонапряженное состояние, возникающее в конструкциях.

В местах соединения элементов, выполненных из материалов, имеющих различные температурные коэффициенты линейного расширения, возникают наибольшие температурные напряжения.

Полупроводниковые приборы можно представить как осесимметричные цилиндрические многослойные конструкции. При определении температурных напряжений расчетная схема таких конструкций представляется в

виде многослойных цилиндров. Расчетная схема трехслойного цилиндра представлена на рис. 5.4.

Граничные условия:

– для первого цилиндра – при $r = R_0 \quad \sigma_r = 0$; при $r = R_1 \quad \sigma_r = p_1$.

– для второго цилиндра – при $r = R_1 \quad \sigma_r = p_1$; при $r = R_2 \quad \sigma_r = p_2$.

– для третьего цилиндра – при $r = R_2 \quad \sigma_r = p_2$; при $r = R_3 \quad \sigma_r = 0$.

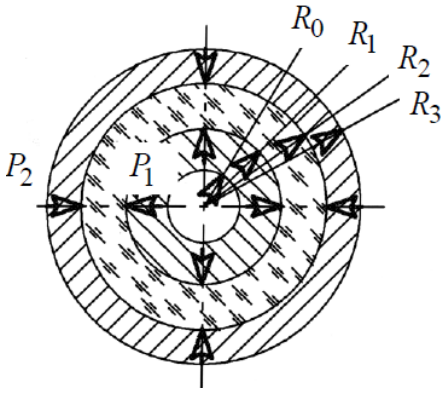


Рис. 5.4. Расчетная схема трехслойного цилиндра

При этом $p_1,\ p_2$ – давления, возникающие, соответственно, между первым – вторым и между вторым – третьим цилиндрами в результате температурного воздействия.

Условия совместности перемещений первого – второго и второго – третьего цилиндров согласно (5.10) имеют вид

$$C_{\mathrm{I}}R_1 + \frac{D_{\mathrm{I}}}{R_1} + \alpha_1 R_1 \Delta T = C_{\mathrm{II}}R_1 + \frac{D_{\mathrm{II}}}{R_1} + \alpha_2 R_1 \Delta T,$$

$$C_{\mathrm{II}}R_2 + \frac{D_{\mathrm{II}}}{R_2} + \alpha_2 R_2 \Delta T = C_{\mathrm{III}}R_2 + \frac{D_{\mathrm{III}}}{R_2} + \alpha_3 R_2 \Delta T.$$

После определения постоянных $C_I, C_{II}, C_{III}, D_I, D_{II}, D_{III}$ по (5.7) условия совместности перемещений запишется в следующем виде:

$$\frac{1-\nu_1}{E_1}\frac{p_1 R_1^3}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1+\nu_1}{E_1}\frac{p_1}{R_1^2 - R_0^2} R_0^2 R_1^2 + \alpha_1 R_1 \Delta T =$$

$$= \frac{1-\nu_2}{E_2}\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} R_1 + \frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{p_2 - p_1}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2 R_1 + \alpha_2 R_1 \Delta T,$$

$$\frac{1-\nu_2}{E_2}\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} R_2 + \frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{p_2 - p_1}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2 + \alpha_2 R_2 \Delta T =$$

$$= \frac{1-\nu_3}{E_3}\frac{p_2 R_2^3}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{1+\nu_3}{E_3}\frac{p_2}{R_3^2 - R_2^2} R_3^2 R_2 + \alpha_3 R_2 \Delta T.$$

Решив совместно эти два уравнения, определим $p_1,\ p_2$. Зная их, по формулам (5.6) можно подсчитать σ_r и σ_φ в каждом элементе конструкции.

Если интервалы между R_1, R_2 и R_2, R_3 разбить с некоторой дискретностью, то можно получить необходимые данные для построения эпюров распределения окружных и радиальных напряжений по толщине элементов конструкций. При этом радиальные напряжения σ_r на наружной поверхности большего цилиндра и внутренней поверхности меньшего цилиндра всегда будут равняться нулю, а окружные напряжения в этих же точках – наоборот.

5.5. Температурные напряжения в многослойном стержне.

Корпусы микросхем представляют собой многослойные конструкции, соединенные между собой припоем. Элементы таких конструкций при температурном воздействии в процессе изготовления корпуса подвергаются деформации изгиба вследствие того, что соединение их осуществляется по поверхности, а концы элементов не закреплены. При этом сами элементы изготовлены из материалов, имеющих различные температурные коэффициенты линейного расширения.

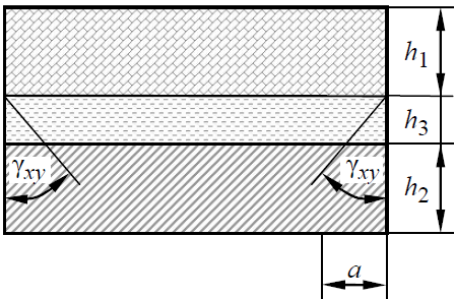


Рис. 5.5. Расчетная схема трехслойного стержня

Наиболее опасным, с точки зрения возникновения напряжений, является соединение элементов конструкций корпуса микросхемы, выполненных из разнородных материалов (керамика – металл). В реальной конструкции корпуса микросхемы длина соединительного шва – припоя, по которому происходит контакт соединяемых элементов конструкции, значительно больше его ширины, а толщина шва значительно меньше толщины соединяемых слоев. Расчетная схема для определения температурных напряжений в конструкциях микросхем (рис. 5.5) может быть представлена в виде трехслойного стержня (слой металла, а соединительный слой, слой керамики).

Условие совместности перемещения слоев имеет вид

$$u_{1x} - u_{2x} = \alpha \qquad (5.11)$$

При этом $\mathrm{tg}\,\gamma_{xy} = {}^{\alpha}/_{h_3}$, т.к. упругие деформации малы, то $\gamma_{xy} = {}^{\alpha}/_{h_3}$ – угловая деформация шва.

В соответствии с (5.9) уравнение перемещения каждого слоя можно записать в следующем виде:

– перемещение слоя керамики

$$u_{1x} = \alpha_1 \frac{L}{2}\Delta T - \frac{PL}{2E_1 b h_1} + \frac{1}{r_1}\left(z + \frac{h_1}{2}\right)\frac{L}{2};$$

– перемещение слоя металла

$$u_{2x} = \alpha_2 \frac{L}{2}\Delta T - \frac{PL}{2E_2 b h_2} + \frac{1}{r_2}\left(z + \frac{h_2}{2}\right)\frac{L}{2},$$

где L – длина слоя.

Третье слагаемое в каждом уравнении учитывает кривизну стержня при изгибе:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{6P}{E_1 b h_1^2};\ \frac{1}{r_2} = \frac{6P}{E_2 b h_2^2},$$

где P – усилие сдвига; z – перемещение крайней точки стержня, лежащего на линии соединения слоев 1 и 2, которое определяется, как для чистого изгиба при постоянном моменте M_y, приложенном в данной точке:

$$M_y = \frac{P(h_1 + h_2)}{2}. \qquad (5.12)$$

В уравнения совместимости перемещения знак перед вторым слагаемым зависит от типа деформации слоя. Знак «+» означает растяжение, Знак «–» – сжатие. В большинстве конструкций корпусов микросхем элементы, выполненные из изоляционного материала (керамика), по толщине значительно превышают элементы конструкции, выполненные из металла. Как было отмечено ранее, подобные конструкции при температурном воздействии испытывают деформацию изгиба, а значит, нейтральная линия может проходить через изоляционный слой (керамика). Хрупкий материал, и в частности керамика, неодинаково сопротивляется деформациям растяжения и сжатия. При деформации растяжения хрупкий материал разрушается при значительно меньших напряжениях, чем при деформации сжатия. Поэтому при расчетах на прочность необходимо знать положение нейтральной линии.

Для вычисления положения нейтральной линии воспользуемся уравнениями статической эквивалентности. Вследствие того, что нормальная сила в сечении равна нулю, можно записать:

$$N = \int_F \sigma_x dF = 0, \quad \int_{F_1} \sigma_{x1} dF + \int_{F_2} \sigma_{x2} dF = 0,$$

где σ_{x1} и σ_{x2} – нормальные напряжения, соответственно, в слое 1 и слое 2.

Пусть оси координат y и z проходят через слой 1. Учитывая, что при изгибе поперечная деформация отсутствует, получим:

$$\sigma_{xi} = \varepsilon_i E_i \frac{1}{1-\nu_i^2},$$

где $\varepsilon_i = u_z/r$; i – номер слоя.

Тогда

$$\int_{F_1} \frac{u_z}{r} E_1 \frac{1}{1-\nu_1^2} dF + \int_{F_2} \frac{u_z}{r} E_2 \frac{1}{1-\nu_2^2} dF = 0,$$

где E_1 и E_2 – модули нормальной упругости, соответственно, слоя 1 и слоя 2; ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона, соответственно, слоя 1 и слоя 2.

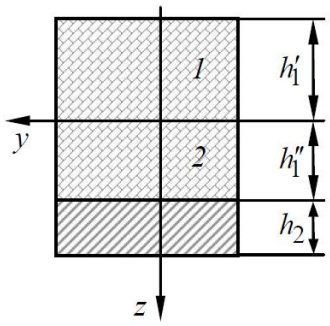


Рис. 5.6. Положение нейтральной линии

Сечение спаенных слов 1 и 2 показано на рис. 5.6. После преобразования выражения (5.12) получим:

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{F_1} z dF + \frac{E_2}{1-\nu_2^2}\int_{F_2} z dF = 0.$$

Определим положение нейтральной линии, для чего вместо интегралов подставим значения статических моментов площади сечений слоя 1 и слоя 2 и подсчитаем значение h_1':

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left[h_1' b\left(-\frac{h_1'}{2}\right) + h_1'' b \frac{h_1''}{2}\right] + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} b h_2 \left(h_1'' - \frac{h_2}{2}\right) = 0,$$

$$h_1' = \left(\frac{E_1 h_1^2}{1-\nu_1^2} + \frac{2E_2 h_1 h_2}{1-\nu_2^2} + \frac{E_2 h_2^2}{1-\nu_2^2}\right) \Big/ 2\left(\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2}\right).$$

Отсюда следует, что положение нейтральной оси в сечении зависит от упругих постоянных материалов.

Допустим, что соединительный слой работает только на сдвиг, тогда максимальные касательные напряжения, возникающие в нем, могут быть подсчитаны по формуле

$$\tau_{3max} = \tau_k l \beta \mathrm{L} \frac{2\beta - 1}{\beta} \mathrm{th}\xi + \frac{1}{2\beta} \mathrm{cth}\xi,$$

где $\tau_k = {}^{p}\Big/_{\frac{l}{2} b}$ – касательное напряжение в наименее прочном элементе конструкции, т. е. в слое 1, выполненном из керамического материала;

$$\beta = \frac{\frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}}{1 + \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}};\ L^2 = \frac{G_3}{E_2 h_2 h_3}\left(1 + \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}\right);\ \xi = \frac{L\frac{l}{2}}{2}.$$

где G_3 – модуль сдвига соединительного шва припоя; h_3 – толщина соединительного шва (припоя).

Если $\tau_{3max} = [\tau]$ и разрушение соединительного шва недопустимо, то касательные напряжения в наиболее опасном слое (керамика) могут быть определены по формуле

$$\tau_k = \frac{[\tau]}{l\beta \mathrm{L}\left(\frac{2\beta - 1}{\beta}\mathrm{th}\xi + \frac{1}{2\beta}\mathrm{cth}\xi\right)}.$$

По закону Гука $[\tau_k] = \gamma_{xy} G_3$, а в соответствии с $\gamma_{xy} = {}^{\alpha}/_{h_3}$:

$$a = \frac{h_3[\tau]}{G_3 l\beta \mathrm{L}\left(\frac{2\beta - 1}{\beta}\mathrm{th}\xi + \frac{1}{2\beta}\mathrm{cth}\xi\right)}.$$

Подставляя значение a в уравнение (5.11), получим неизвестное давление P между слоем 1 и 2, которое возникает в соединительном слое 3:

$$M_y = \frac{P(h_1 + h_2)}{2}.$$

Напряжения в любой точке по высоте сечения:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y E_1 z}{(E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2})(1 - \nu_1^2)}, \sigma_{x2} = \frac{M_y E_2 z}{(E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2})(1 - \nu_2^2)}. \qquad (5.13)$$

Расчет смещения слоев u1x и u2x можно упростить, если считать, что касательная напряжения в наименее прочном слое не превысит допустимых напряжений в соединительном слое. В этом случае согласно закону Гука:

$$\gamma_{xy} = [\tau]\frac{1}{G_3}, \quad \text{и отсюда} \quad \alpha = \frac{[\tau]h_3}{G_3}.$$

Полученное выражение для α подставляем в (5.11) и, пренебрегая разностью между перемещениями первого и второго слоев от изгиба (ввиду малости), получим выражение для P:

$$P = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)b\Delta T - \frac{2[\tau]bh_3}{G_3 l}}{(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2})}.$$

Далее, зная P, определим изгибающий момент M_y по (5.12) и напряжение в каждом слое σ_{x1} и σ_{x2} по (5.13).

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

6.1. Упругие колебания. Расчетные схемы. Уравнение движения

Помимо температурных воздействий значительную опасность для конструкций электронной техники представляют собой вибрации и ударные нагрузки.

Даже при небольших амплитудах вибрационные нагрузки могут вызвать усталостное разрушение элементов конструкции корпусов, подложек и печатных плат с приборами. В этом случае наиболее опасными являются вибрационные нагрузки с частотой, близкой к собственной частоте колебаний элементов конструкций. Возникновение резонанса приводит к резкому росту напряжений и, следовательно, увеличивает возможность разрушения элементов конструкций.

В процессе эксплуатации вибрации и удары испытывают полупроводниковые приборы и интегральные схемы, смонтированные на печатных платах, представляющих собой прямоугольные пластины. Навесные элементы, как правило, распределяются по поверхности плат равномерно. Расчет колебаний и динамической прочности таких плат можно проводить по схеме пластин, нагруженных равномерно распределенным давлением (когда неравномерность распределения навесных элементов и разброс значений их масс находится в пределах 10–15 %). Эти системы имеют бесконечное число степеней свободы. В случае нерегулярного расположения на монтажной плате пленочных проводников и навесных элементов со значительным разбросом масс за расчетную схему в качестве первого приближения может быть принят стержень с распределенной нагрузкой, представляющий собой полосу с элементами наибольшей массы, вырезанную из платы.

При испытаниях обычно проверяется работоспособность отдельных изделий. В зависимости от способа закрепления их расчетные схемы чаще всего могут быть представлены в виде системы с одной степенью свободы, испытывающей изгибные поперечные колебания; или стержня с распределенной массой и бесконечным числом степеней свободы, испытывающего продольные или поперечные колебания. В некоторых случаях представляют ин-

терес колебания отдельных элементов, для которых расчетная схема может быть выбрана в виде цилиндра или круглой пластины.

При описании изделий с одной степенью свободы все наиболее легкие его элементы считаются безмассовыми безынерционными деформируемыми связями, а масса всех тяжелых элементов сосредоточивается в одной точке. Если масса изделия значительно больше массы выводов, то массой выводов обычно пренебрегают. Если масса выводов сравнима с массой самого изделия, то общую массу можно считать в таком случае равной сумме массы изделия и одной трети массы выводов.

При описании изделия системой с бесконечным числом степеней свободы масса всех элементов равномерно распределяется по выбранной расчетной длине.

Для обнаружения резонансных частот проводится расчет свободных собственных колебаний, возникающих под влиянием только упругих и диссипативных сил при отсутствии внешнего силового воздействия на систему.

Для проверки динамической прочности элементов изделия необходимо знать коэффициент динамичности, который вычисляется в соответствии с выбранной расчетной схемой и его способом возбуждения динамических перемещений.

Возможны два способа возбуждения – кинематический, когда возмущающие силы прикладываются к опорам изделия и передаются системе через жесткость и деформирующие элементы закрепления; и динамический, или силовой, при котором возмущающая сила непосредственно воздействует на изделие. Конструкции электронной аппаратуры испытывают, как правило, кинематическое возбуждение.

Уравнение движения в колебательном процессе по методу Д. Аламбера имеет вид

$$\sum p = p_{\text{ин}} + p_{\text{тр}} + p_{\text{в}} + p(t), \qquad (6.1)$$

где $p_{\text{ин}} = -mz$ – силы инерции по закону Ньютона; $p_{\text{тр}} = -kz$ – силы трения, учитывающие трение в опора, сопротивление среды, в которой происходит колебания, внутренне трение в материалах системы; $p_{\text{в}} = -cz$ – восстанавливающая позиционная сила, определяющая отклонение z системы от положения равновесия, (c – коэффициент жесткости, характеризующий упругие свойства системы и являющийся коэффициентом пропорциональности между внешней статически приложенной силой p и вызываемым этой силой пе-

ремещением z); $p(t)$ – возмущающая сила, задающаяся в виде явной функции времени.

С учетом этих значений для изгибных колебаний стержня (9.1) может быть записано в виде

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + cz = p\,(t). \qquad (6.2)$$

Решение (6.2) зависит от выбранной расчетной схемы и сил, действующих на систему.

6.2. Основные расчетные зависимости для определения напряжений при колебаниях систем с одной степенью свободы

Свободные колебания системы происходят при отсутствии возмущающих сил, т. е. когда $p(t) = 0$. Если при этом не учитываются диссипативные силы, т. е. когда $k\dot{z} = 0$, то уравнение (9.2) примет вид

$$m\ddot{z} + cz = 0, \;\; \dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \qquad (6.3)$$

где ω_0 – круговая частота свободных колебаний; $\omega_0^2 = c/m$ (с – коэффициент жесткости, который можно вычислить по формулам, приведенным в табл. 6.1).

Круговая частота свободных колебаний $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi T$, где $f_0 = 1/T$ – циклическая частота колебаний; T – период собственных или вынужденных колебаний.

Решение уравнения (6.3) имеет вид:

$$z(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Амплитуда A и начальная фаза колебаний φ определяются из начальных условий.

При наличии сил сопротивления (6.2) можно записать в виде

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \qquad (6.4)$$

где введено обозначение $2n = k/m$.

Если силы сопротивления малы, то решение (6.4) имеет вид

$$z(t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_{01}^2 t + \varphi), \;\; \omega_{01} = \sqrt{\omega_{01}^2 - n^2}.$$

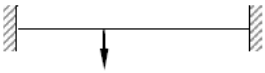
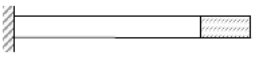
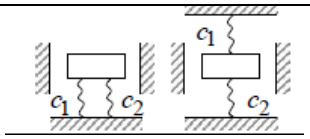
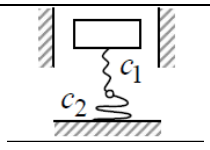
Под действием сил сопротивления колебания затухают. Отношение двух последовательных пиковых отклонений системы от положения равновесия может быть выражено как

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-nt-nT}} = e^{nt}.$$

Степень затухания характеризуется логарифмическим коэффициентом затухания $\delta = nT = \ln(A_i/A_{i+1})$.

Таблица 6.1.

Коэффициенты жесткости некоторых систем

Схема закрепления	Коэффициент жесткости	Примечание
	$c = \frac{3EJ_y(a+b)}{a^2b^2}$ $c = \frac{48EJ_y}{L^3}$	При $a \neq b$ При $a = b$
	$c = \frac{24EJ_y}{L^3}$	
	$c = \frac{3EJ_y}{L^3}$	
	$c = \frac{3EJ_y(a+b)^3}{a^3b^3}$ $c = \frac{192EJ_y}{L^3}$	При $a \neq b$ При $a = b$
	$c = \frac{12EJ_y(a+b)^3}{a^3b^3(3a+4b)}$ $c = \frac{110EJ_y}{L^3}$	При $a < b$ При $a = b$
	$c = \frac{3EJ_y}{b^2(b+L)}$	
	$c = \frac{12EJ_y}{b^2(3L+4b)}$	
	$c = \frac{24EJ_y}{L^3}$	EJ_y – жесткость при изгибе каждой из двух плоских пружин
	$c = c_1 + c_2$	
	$c = \frac{c_1c_2}{c_1+c_2}$	

В справочниках и стандартах на материалы обычно приводится значение коэффициента поглощения ψ, связанного с коэффициентом затухания δ следующей зависимостью: $\psi = 2n/\overline{\omega_0} = \delta/\pi$.

Если на систему действует возмущающая сила, то амплитуда возникающих вынужденных колебаний A_b становится существенно больше амплитуды свободных колебаний A_c:

$$A_b = A_c \mu_c,$$

где μ_c – коэффициент динамичности.

При силовом возбуждении коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического смещения, вызванного значением возмущающей силы и при наличии сил сопротивления рассчитывается по формуле

$$\mu_c = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)+\psi^2\eta^2}}, \tag{6.5}$$

где $\eta = \omega/\omega_0$; ω – частота вынужденных колебаний.

Если в системе затухание отсутствует, т. е. $\eta = 0$, то при совпадении частот колебаний вынужденных ω и свободных ω_0 в системе возникает резонанс. При этом коэффициент динамичности обращается в бесконечность, возрастает бесконечно амплитуда вынужденных колебаний и также бесконечно возрастают напряжения, возникающие в системе.

При расчете на прочность элементов конструкций электроники, чаще всего испытывающих кинематическое возбуждение, обычно представляет интерес деформация упругого элемента, т. е. относительное смещение точки массой m по отношению к опорам. В этом случае коэффициент динамичности при кинематическом возбуждении может быть найден из выражения

$$\mu_k = \frac{A_{1b}}{A_{0c}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)+\psi^2\eta^2}}, \tag{6.6}$$

где A_{1b} – амплитуда вынужденного относительного смещения массы при кинематическом возбуждении; A_{0c} – заданное перемещение опор основания.

В стандартах обычно нормируется не перемещение основания, а его ускорение $\ddot{z}_a$. При этом перемещение можно определить следующим образом:

$$A_{0c} = \ddot{z}_a/\omega^2, \tag{6.7}$$

где ω – круговая частота вынужденных колебаний.

Амплитуду вынужденных колебаний A_b при определении абсолютного смещения массы m можно вычислить с помощью коэффициента динамичности μ, если известна амплитуда z_1 возмущающей силы: $A_b = \mu z_1$.

В этом случае коэффициент динамичности (передачи) может быть вычислен по формуле

$$\mu_c = \frac{\sqrt{1+\psi^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)+\psi^2\eta^2}}. \qquad (6.8)$$

Для расчета динамических напряжений следует определить круговую частоту вынужденных колебаний по заданной циклической частоте вынужденных колебаний: $\omega = 2\pi f$. Циклическая частота f берется из заданного интервала вынужденных частот $f_н$, $f_в$ как ближайшая или равная частоте свободных колебаний. Далее в соответствии с выбранной расчетной схемой по (6.5), (6.6) или (6.8) определяется коэффициент динамичности.

Подсчитав жесткость системы c (см. табл. 6.1) и перемещение системы z или перемещение основания $z = A_{0c}$ по (6.7), определим статическую нагрузку $p_{ст}$, вызвавшую это перемещение $p_{ст} = zc$, затем определяется динамическая сила $p_д = p_{ст}\,\mu$.

Расчет динамических напряжений ведется с учетом этой силы в соответствии с выбранной расчетной схемой по тем же формулам, что и при статическом нагружении. Проверка прочности проводится по условию прочности при динамическом нагружении, рассмотренном далее.

6.3. Основные расчетные зависимости для определения напряжений при колебаниях системы с распределенными параметрами

При поперечных, изгибных, колебаниях однородного стержня (рис. 6.1) уравнение движения системы с бесконечным числом степеней свободы при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$c^2\frac{\partial^4 u_z(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u_z(x,t)}{\partial t^2} = p(t), \qquad (6.9)$$

где $c^2 = {EJ_y}\big/{\rho F}$, $p(x,t) = {p(t)}\big/{\rho F}$.

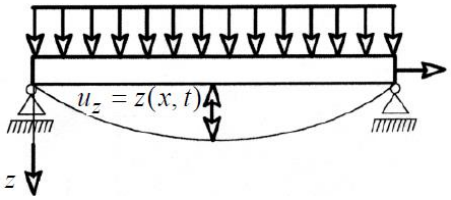


Рис. 6.1. Поперечные колебания стержня

Полагая в (6.9) $p(t) = 0$ и решив однородное уравнение, находим форму главного колебания – собственную форму – в виде

$$z(c) = u_z = A\sin Kx + B\cos Kx + C\ \mathrm{sh}\ Kx + D\ \mathrm{ch}\ Kx, \qquad (6.10)$$

где $K = \sqrt{\omega_0/c}$.

Постоянные интегрирования A, B, C, D из (6.10) определяются из граничных условий. Например, для стержня на двух опорах (рис. 6.1) граничные

условия запишутся как отсутствие смещения и изгибающего момента на опорах:

– при $x = 0$ $\quad u_z = 0$ или $B + D = 0$,

$$M_y = \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x^2} = 0, \text{ или } -B + D = 0,$$

следовательно $B = D = 0$;

– при $x = L$ $\quad u_z = 0$ или $A \sin KL = C \text{ sh } KL$=0,

$$M_y = 0 \text{ или } K^2(-A \sin KL + C \text{ sh } KL) = 0.$$

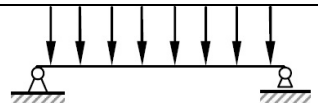
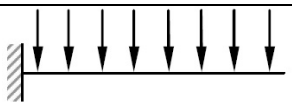
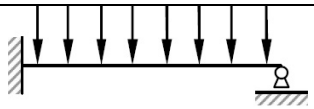
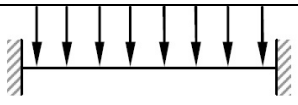
Из совместного решения двух последних равенств получим $C = 0$, $A \sin KL = 0$. Чтобы решение не оказалось тождественно равным нулю, должно соблюдаться условие $A \neq 0$. Тогда частное уравнение $\sin KL = 0$, откуда $kL = i\pi$ (i =1, 2, 3, …; K=K_i=$i\pi$/2). С учетом значений c и K_i круговая частота

$$\omega_0 = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}}. \qquad (6.11)$$

Граничные условия для других видов закрепления стержня приведены в табл. 6.2, а частотные уравнения и их решение – в табл. 6.3.

Таблица 6.2

Граничные условия для различных случаев закрепления стержня

Закрепление стержня	$x = 0$	$x = L$	Примечание
	$z(x) = 0$ $\ddot{z}(x) = 0$	$z(x) = 0$ $\ddot{z}(x) = 0$	$EJ_y\ddot{z} = -M_y$
	$z(x) = 0$ $\ddot{z}(x) = 0$	$\ddot{z}(x) = 0$ $\dddot{z}(x) = 0$	$\dot{z}(x)$ – угол поворота сечения, $z(x) = Q_z$
	$z(x) = 0$ $\dot{z}(x) = 0$	$z(x) = 0$ $\ddot{z}(x) = 0$	
	$z(x) = 0$ $z'(x) = 0$	$z(x) = 0$ $z'(x) = 0$	

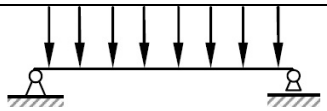
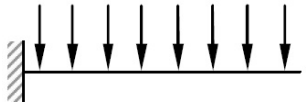
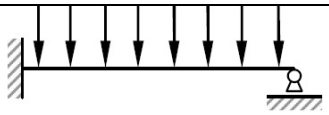
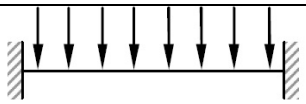
Поскольку в таблицах в качестве решения частотных уравнений обычно приводится значение K_iL, то выражение (6.11) удобнее представить в виде

$$\omega_{0i} = \left(\frac{K_i l}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}},$$

где $\rho F = m_0$ – погонная масса стержня.

Таблица 6.3

Решение частотных уравнений для различных случаев закрепления стержня

Закрепление стержня	Частотное уравнение	kL для решения i-й гармоники			
		i =1	i = 2	i = 3	i = 4
	$\sin KL = 0$	3,142	6,283	9,425	$i\pi$
	$\cos Kl \operatorname{ch} Kl = -1$	1,875	4,694	7,855	$\pi/2(2i - 1)$
	$\operatorname{tg} Kl = \operatorname{th} Kl$	3,927	7,069	10,210	$\pi/4(4i + 1)$
	$\cos Kl \ \operatorname{ch} Kl = 1$	4,73	7,853	10,996	$\pi/2(2i + 1)$

Для определения резонансных амплитуд, деформаций и напряжений в сечениях стержня рассмотрим его вынужденные колебания. В правой части уравнения (6.9) возмущающую силу $p(x, t)$ можно представить в показательной форме:

$$p(x,t) = p(x)e^{-j\omega t}. \qquad (6.12)$$

Решив уравнение движения методом разложения функции $z = z(x, t)$, определяющей смещение точек стержня, в ряд по собственным формам, с учетом (6.12) получим выражение

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{m_0(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} z_i(x)e^{j\omega t}, \quad B_i = \frac{\int_0^L p(x)z_i(x)dx}{\int_0^L {z_i}^2(x)dx}.$$

При кинематическом возбуждении возбуждение стержня возникает за счет колебания опор и возбуждающую силу можно представить в виде $p(x, t) = m_0\ddot{z}(t)$. Ускорение опор $\ddot{z}_1(t) = \ddot{z}_1 \sin \omega t$ задается стандартами и не зависит от координаты x, поэтому $p(x, t)$ также не зависит от x. Следовательно, в выражении для B_i возбуждающую силу p можно вынести за знак интеграла. Возмущающее перемещение опор может быть определено как

$$z_1(t) = \frac{\ddot{z}_1(t)}{\omega^2}. \qquad (6.13)$$

Тогда

$$z_1(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega^2 z_1(t)}{\omega_{0i}^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} K_i(x), \quad K_i(x) = \frac{\int_0^L z_i(x)dx}{\int_0^L {z_i}^2(x)dx}. \qquad (6.14)$$

Если обозначить $\eta = \omega/\omega_{0i}$, то коэффициент передачи между вынужденными относительными перемещениями точек стержня $z(x, t)$ и возбуждающим перемещением опор $z_1(t)$ с учетом затухания можно получить в виде

$$\mu_i = \frac{z_i(x,t)}{z_1(t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta^2 \frac{\sqrt{1+\psi^2\eta^2}K_i(x)}{\sqrt{(1-\eta^2)+\psi^2\eta^2}}. \qquad (6.15)$$

Коэффициент поглощения ψ_i в общем случае зависит от номера возбуждений гармоники, но в расчетах его можно с достаточной степенью точности считать постоянным.

При резонансе, когда частота возбуждающих колебаний равна одной из собственных частот колебаний, приближенно можно считать, что форма вынужденных резонансных колебаний совпадает с собственной формой колебаний стержня. Тогда коэффициент передачи ускорения при резонансе в точке стержня с координатой по отношению к ускорению опор:

$$\mu_i = \frac{\ddot{z}(x,t)}{\ddot{z}_1} = \frac{K_i(x)}{\psi_i}.$$

Круговую частоту вынужденных колебаний можно определить так же, как для одномассовой системы.

В случае кинематического возбуждения колебаний возмущающее перемещение опор $z_1(t)$ рассчитываем по (6.13), а коэффициент передачи μ – по (6.15). С учетом этого коэффициента определим наибольшее динамическое смещение $z(x, t)$ и положим $z(x, t) = u_{z\,max}$. В соответствии с выбранной расчетной схемой и полученным значением прогиба $u_{z\,max}$ находим распределенную динамическую нагрузку g_q затем максимальный изгибающий момент $M_{y\,max}$ и динамическое напряжение σ_q.

7. ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

7.1. Особенности хрупкого разрушения

Разрушение любого реального элемента конструкции начинается с изменений на микроскопическом уровне задолго до видимого разделения элементов конструкции на части.

В пластичных материалах сопротивление необратимому сдвигу меньше сопротивления отрыву. При сдвиге микроскопические эффекты структуры группируются, затрудняя сдвиг, сопротивление сдвигу становится сравнимо с сопротивлением отрыву. Это приводит к появлению множества микропор и

микротрещин. При возрастании нагрузки размеры и плотность микропор и микротрещин увеличиваются. Микроскопические дефекты сливаются в одну или несколько больших трещин, разделяющих тела на части.

Хрупкие материалы еще до появления нагрузки содержат микротрещины и микропоры.

Разрушение любого вида – и пластическое и хрупкое – включает две стадии: зарождение трещины и ее распространение.

Различают пластическое разрушение – при существенной пластической деформации, хрупкое – как результат распространения магистральной трещины при локализованной пластической деформации, усталостное – при циклическом нагружении в результате накопления необратимых повреждений, ползучести – при медленном нарастании во времени пластической деформации материала под действием нагрузок, которые меньше вызывающих остаточную деформацию.

В хрупких материалах при наличии определенного числа трещин критических размеров их рост становится лавинообразным, процесс переходит в самоускоряющийся и разрушение может окончиться без подгружения. Таким образом, задача о разрушении хрупкого материала сводится к нахождению условий равновесия тела с трещинами и определению сопротивления распространению в теле системы трещин.

Под трещиной понимают пространство между двумя поверхностями, отстоящими друг от друга настолько, чтобы между ними не возникало силового взаимодействия. Только часть энергии, высвобождающейся при раскрытии трещины, превращается в упругую энергию. Другая часть переходит в поверхностную энергию, связанную с образованием новых поверхностей при появлении и распространении трещин. Трещина будет расти в том случае, если высвобождаемая энергия достаточна для обеспечения всех затрат на рост. При распространении трещины в ее вершине возникает концентрация напряжений. Вследствие перехода материала у вершины трещины в пластическое состояние интенсивность напряжений падает. Был введен коэффициент интенсивности напряжений K_1, который полностью характеризует локальное деформирование и разрушение на контуре микротрещины. Когда коэффициент достигает критического значения – происходит разрушение. Зная этот коэффициент, можно рассчитать прочность материала с трещиной того

или иного размера, и определить, какого размера трещины допустимы в материале с заданными напряжениями.

Коэффициент трещиностойкости связан с прочностью материала следующей зависимостью:

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{K_{1\text{кр}}}{\psi\sqrt{\pi c}},$$

где ψ – коэффициент формы и расположения дефекта, определяемый методами теории упругости для напряженного состояния в области конца трещины определенного типа; c – размер вызвавшего разрушение дефекта.

Если для данного материала известно $K_{1\text{кр}}$, то с помощью описанного соотношения по результатам испытаний на прочность можно оценить размер дефекта, который явился причиной разрушения.

7.2. Теории прочности

После определения напряжений в сечениях стержня следует проверить прочность. При любом характере нагружения для проверки прочности необходимо найти наибольшее суммарное напряжение и удостовериться, что оно меньше допускаемого $\sigma \leq [\sigma]$ или равно ему. В противном случае происходит разрушение.

Для линейного напряженного состояния опасное напряжение определяют опытным путем. При плоском и объемном напряженном состоянии это практически невозможно, поскольку возникновение и развитие пластической деформации зависит не только от значений главных напряжений, но и от соотношения между ними, а число возможных комбинаций этих соотношений бесконечно велико. Поэтому по известным для линейного напряженного состояния значениям допустимого напряжения устанавливают условия прочности при сложном напряженном состоянии.

Полученные таким образом зависимости между величинами, относящимися к различным напряженным состояниям, на основании которых оценивают прочность, называют критериями прочности, а соображения, определяющие выбор критериев – гипотезами или теориями прочности.

Существует несколько различных теорий прочности.

Теория первая. В хрупких материалах разрушение в точке возникает, когда наибольшее нормальное напряжение в ней является растягивающим и

достигает определенного для данного материала значения (хрупкое разрушение происходит путем отрыва от нормали).

Поскольку максимальные значения нормальных напряжений соответствуют главным напряжениям, а $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то условие прочности можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{\text{в. р}}/n \text{ или } \sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{р}},$$

где $[\sigma]_{\text{р}}$ – допускаемое напряжение растяжения.

По первой теории хрупкий образец не разрушается при сжатии. Поэтому было введено предположение, что хрупкое разрушение обусловливается наибольшими относительными разрушениями.

Теория вторая. Хрупкое разрушение в точке возможно только при условии что $\varepsilon_1 > 0$ и достигает характерного для данного материала критического значения.

По закону Гука $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$. При линейном напряженном состоянии (растяжении) $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ или $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{в.\ р}}{E}$, поэтому во второй теории прочности условием разрушения является следующее: $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{р}}$, причем $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$. Условие прочности можно записать так

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{р}}.$$

Вторая теория, в отличие от первой, допускает возможность разрушения и при простом одноосном сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$. Условие прочности принимает вид $\nu\sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{р}}$. Отсюда следует, что временное сопротивление при растяжении $\left(\sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{в. р}}\right)$ связано с временным сопротивлением при сжатии соотношением $\nu\sigma_{\text{в. сж}} = \sigma_{\text{в. р}}$, так как разрушение наступает при $\nu[\sigma_3] = \sigma_{\text{в. р}}$. Этот вывод подтверждается тем известным фактом, что у хрупких материалов сопротивление разрушению при сжатии выше, чем при растяжении.

Теория третья. *Пластическая деформация возникает, когда максимальное касательное напряжение достигает определенного для данного материала критического значения.*

Третья теория выведена из того факта, что пластическая деформация обусловливается необратимыми относительными сдвигами элементов структуры тела.

Всегда $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, а при растяжении $\tau_{\max} = \sigma_1/2$. Тогда условие прочности описывается неравенством

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Теория четвертая. *Пластические деформации возникают, когда достигает некоторого предела удельная энергия формоизменения. Причем вклад в энергию деформации вносит только та часть работы, которая связана с упругой деформацией (остальная превращается в теплоту).*

По четвертой теории условие прочности характеризуется выражением

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq [\sigma].$$

7.3. Оценка прочности конструкции при динамическом воздействии

При воздействии на систему возмущающих сил, вызывающих колебательное движение, или ударных нагрузок в элементах конструкций электронной техники возникает динамическое напряжение. Условие прочности может быть записано как $\sigma_д \leq [\sigma]_д$, где $\sigma_д$ – действующее динамическое напряжение; $[\sigma]_д$ – допускаемое динамическое напряжение.

При колебаниях системы нагрузка во времени изменяется циклически, при этом напряжения также будут функцией времени. Экспериментально установлено, что при переменных напряжениях разрушение происходит при меньших значениях нагрузок, чем при статическом нагружении. Напряжения зависят не только от максимального значения нагрузки, но и от числа циклов нагружения. Основными характеристиками цикла являются значения напряжений σ_{max} и σ_{min}, а также коэффициент асимметрии цикла $r = \sigma_{max}/\sigma_{min}$. Кривые, характеризующие пульсирующий цикл (r = 0) при ударе и симметричный знакопеременный цикл (r = –1) при колебаниях, приведены на рис. 7.1. Наибольшее напряжение, которое материал выдерживает, не разрушаясь при максимальном числе циклов, называется пределом выносливости, или пределом усталости.

Предел выносливости зависит не только от материала, но также и от метода испытания, и от абсолютных размеров образца, и от характера внешних сил, поскольку от этих факторов зависят условия развития усталостных трещин. Приближенно можно принять: для сталей σ_1=(0,4…0,5) $\sigma_в$, для цветных металлов σ_{-1}=(0,25…0,5) $\sigma_в$.

На величину усталостной прочности детали существенно влияет наличие концентрации напряжений (галтели, канавки, отверстия), а также масштабный фактор и качество обработки детали. Наличие концентраторов напряжений снижает выносливость детали в 1,5–2 раза в зависимости от ее геометрии и чувствительности материала к концентрации напряжений.

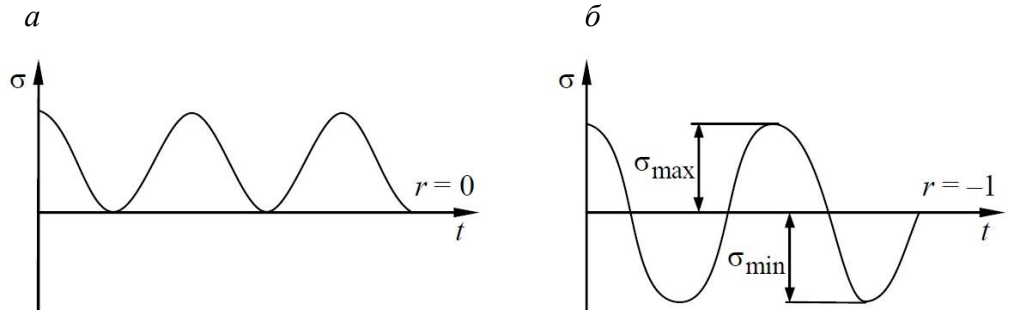


Рис. 7.1. Кривые, характеризующие пульсирующий цикл (*а*) при ударе и симметричный знакопеременный цикл (*б*) при колебаниях

Масштабный фактор при увеличении абсолютных размеров детали тем сильнее влияет на уменьшение предела выносливости, чем более неоднороден материал. Характер обработки поверхности детали и прочность ее поверхностного слоя очень сильно сказываются на прочности детали. Чем чище обработка поверхности детали, тем выше предел ее выносливости и долговечности. При необходимости точного определения значения следует обратиться к специальной справочной литературе по машиностроению.

Допускаемое динамическое напряжение определяется по условию

$$[\sigma]_{\text{д}} = \frac{\sigma_{-1}}{n}.$$

В большинстве случаев допустимым значением коэффициента запаса прочности считается n = 1,5…2,5. При действии ударных нагрузок коэффициент запаса прочности следует несколько увеличить, так как при расчете динамических напряжений с помощью коэффициента динамичности (6.16) значения напряжений могут быть занижены.

Список рекомендуемой литературы

Бегун П. И., Кормилицын О. П. Прикладная механика: учеб. СПб.: Политехника, 2006. 464 с.

Кормилицын О. П. Механика конструкций приборостроения: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 156 с.

Кормилицын О. П. Прочность конструкций электронной техники: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 128 с.

Содержание

1. Расчетные схемы конструкций РЭА ……..... 3
1.1. Конструкции корпусов радиоэлектронной аппаратуры …….. 3
1.2. Внешние воздействия на элементы конструкций …… 7
1.3. Расчетные схемы ……. 12
1.3.1. Схематизация свойств материала и геометрии……..... 13
1.3.2. Схематизация геометрии конструкции…… 13
1.3.3. Схематизация закреплений……..... 14
1.3.4. Схематизация внешних воздействий……..... 15
1.4. Внутренние силы …… 16
1.5. Перемещения и деформации …….. 18
1.6. Массовые и геометрические характеристики сечений ……..... 20
2. Напряжения в элементах конструкций РЭА по стержневой расчетной схеме …….. 22
2.1. Определение внутренних усилий в поперечном сечении стержня…. 26
2.2. Определение напряжений в стержне……. 29
3. Расчет жесткости по стержневой расчетной схеме ……... 32
3.1. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня …….. 32
3.2. Расчет перемещений при кручении круглых стержней …….. 34
3.3. Расчет перемещений по методу начальных параметров ……. 35
3.4. Понятие об обобщенной силе и обобщенном перемещении …….. 38
3.5. Потенциальная энергия стержня при различных видах деформации 40
3.6. Теорема Кастельяно …… 44
3.7. Формула Максвелла–Мора …… 46
4. Метод сил при решении статически неопределимых систем …….. 47
5. Температурные напряжения …… 55
5.1. Основные расчетные зависимости при силовом статическом воздействии …… 55
5.2. Составные цилиндры ……. 57
5.3. Основные расчетные зависимости при определении температурных напряжений и деформаций …….. 59
5.4. Температурные напряжения в составных цилиндрах ……. 61
5.5. Температурные напряжения в многослойном стержне……... 63
6. Динамические напряжения в элементах конструкций …….. 67

6.1. Упругие колебания. Расчетные схемы. Уравнение движения …….. 67
6.2. Основные расчетные зависимости для определения напряжений при колебаниях систем с одной степенью свободы …….. 69
6.3. Основные расчетные зависимости для определения напряжений при колебаниях системы с распределенными параметрами ……. 72
7. Оценка прочности элементов конструкций ……... 75
7.1. Особенности хрупкого разрушения …….. 75
7.2. Теории прочности ……... 77
7.3. Оценка прочности конструкции при динамическом воздействии …. 79
Список рекомендуемой литературы ……... 80

Редактор

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. 5,0.
Тираж экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5