Министерство образования РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Методические указания к выполнению самостоятельных работ по прикладной механике

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2003

УДК 539.3 (076)

Анализ напряженно-деформированного состояния стержневых систем при различных внешних воздействиях. Методические указания к выполнению самостоятельных работ по прикладной механике / Сост.: С. В. Воробьев, С. Н. Даниленко, А. И. Лысков. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2003. 64 с.

Рассмотрены методы решения задач при растяжении (сжатии), кручении и изгибе стержневых систем, а также простых статически неопределимых задач. Приведены примеры построения эпюр внутренних усилий и определения прочностных характеристик при различных внешних воздействиях.

Дана необходимая информация о механических характеристиках материалов.

Приведены варианты задач для выполнения самостоятельных работ по прикладной механике.

Предназначены для использования в курсе прикладной механики студентами вечерней и заочной форм обучения.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2003

ВВЕДЕНИЕ

Многие технические и биологические системы представляют собой композиции соединенных между собой тел, которые можно моделировать стержнями. Внешние воздействия на систему вызывают деформации ее звеньев и приводят к возникновению в них механических напряжений. Наиболее наглядно исследование напряженно - деформированного состояния может быть выполнено на примере анализа стержневых систем.

Свяжем с недеформированным стержнем декартову систему координатных осей: ось *x* направим вдоль оси стержня, оси *y* и *z* совместим с центральными осями инерции поперечного сечения стержня.

Внутренние усилия определяют с помощью метода сечений. Мысленно проведенное перпендикулярно оси стержня сечение разделяет систему на две части. Для одной отсеченной части внешняя нормаль к сечению совпадает с направлением координатной оси *x*, для другой - направлена в сторону, противоположную оси *x*.

Действие отброшенной части на рассматриваемую заменяется системой внутренних сил, распределенных по сечению (интенсивность этих сил называют напряжением). При выполнении статического анализа такую систему сил удобно заменить простейшей статически эквивалентной системой, приведенной к геометрическому центру сечения, - главным вектором внутренних сил и главным моментом внутренних сил. Компоненты (проекции на координатные оси) этих векторов имеют соответствующий физический смысл и следующие названия: *N* -нормальная (осевая, или продольная) сила; Q_y, Q_z поперечные (перерезывающие) силы; M_x - крутящий момент; M_y, M_z -изгибающие моменты. Их называют внутренними усилиями. В общем случае нагружения в сечениях стержней возникают шесть внутренних усилий. Внутренним усилиям присваивают знак в соответствии с принятым правилом знаков.

Правило знаков для внутренних усилий.

1. Если внешняя нормаль к сечению совпадает по направлению с осью x, то положительными считаются силы *N*, Q_y, Q_z и мо-

менты M_x, M_y, M_z, совпадающие по направлению с соответствующими осями координат.

2. Если внешняя нормаль к сечению имеет направление, обратное оси x, то положительными считаются внутренние усилия, направленные противоположно соответствующим осям координат.

При решении практических задач возникает необходимость исследовать опасные состояния систем, вызванные нагруженном. С этой целью строят эпюры внутренних усилий (графики функций от координаты на оси стержня), которые наглядно показывают распределение усилий по длине стержней. Построение эпюр является важным и наиболее трудоемким этапом оценки прочности и жесткости конструкций.

Рекомендуется следующий общий порядок построения эпюр внутренних усилий для статически определимых задач.

1. Выбрать декартову систему координат *Oxyz*.

2. Вычислить реакции опор или неизвестные параметры внешней нагрузки из условий статического равновесия.

3. Определить грузовые участки (интервалы непрерывности приложенной нагрузки).

4. Для каждого грузового участка (участка нагружения) записать выражения внутренних усилий.

5. Построить эпюры внутренних усилий.

В дальнейшем, рассматривая примеры задач, будем применять указанный порядок построения эпюр.

В частных случаях нагружения число внутренних усилий, подлежащих определению, может быть различно.

По найденным выражениям внутренних усилий можно рассчитывать напряжения и перемещения стержня. Основные зависимости для анализа напряженно-деформированного состояния стержней приводятся в каждом из разделов.

Во всех расчетах предполагается, что материал стержней однородный, изотропный, линейно деформируемый, не имеет дефектов и микротрещин.

1. ОСЕВАЯ ДЕФОРМАЦИЯ - РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

При осевой деформации стержней в сечениях возникает только нормальная сила *N(x),* остальные внутренние усилия $Q_y = Q_z = M_x = M_y = M_z = 0$. Деформации растяжения соответствуют положительные значения нормальной силы ($N>0$), а деформации сжатия - отрицательные ($N<0$).

При выполнении инженерных расчетов предполагаем, что нормальные напряжения σ_x равномерно распределены по сечению стержня и вычисляются по формуле

$$\sigma_x = \frac{N}{F}, \qquad (1.1)$$

где *F* - площадь поперечного сечения стержня, м^2.

Функция перемещения *u(x)* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EF},$$

где *E* - модуль нормальной упругости материала стержня, Па.

Тогда перемещение в направлении оси *x* сечения, расположенного на расстоянии *x* от начала координат, определяют по формуле

$$u(x) = u(c) + \int_c^x \frac{N(x)dx}{EF}, \qquad (1.2)$$

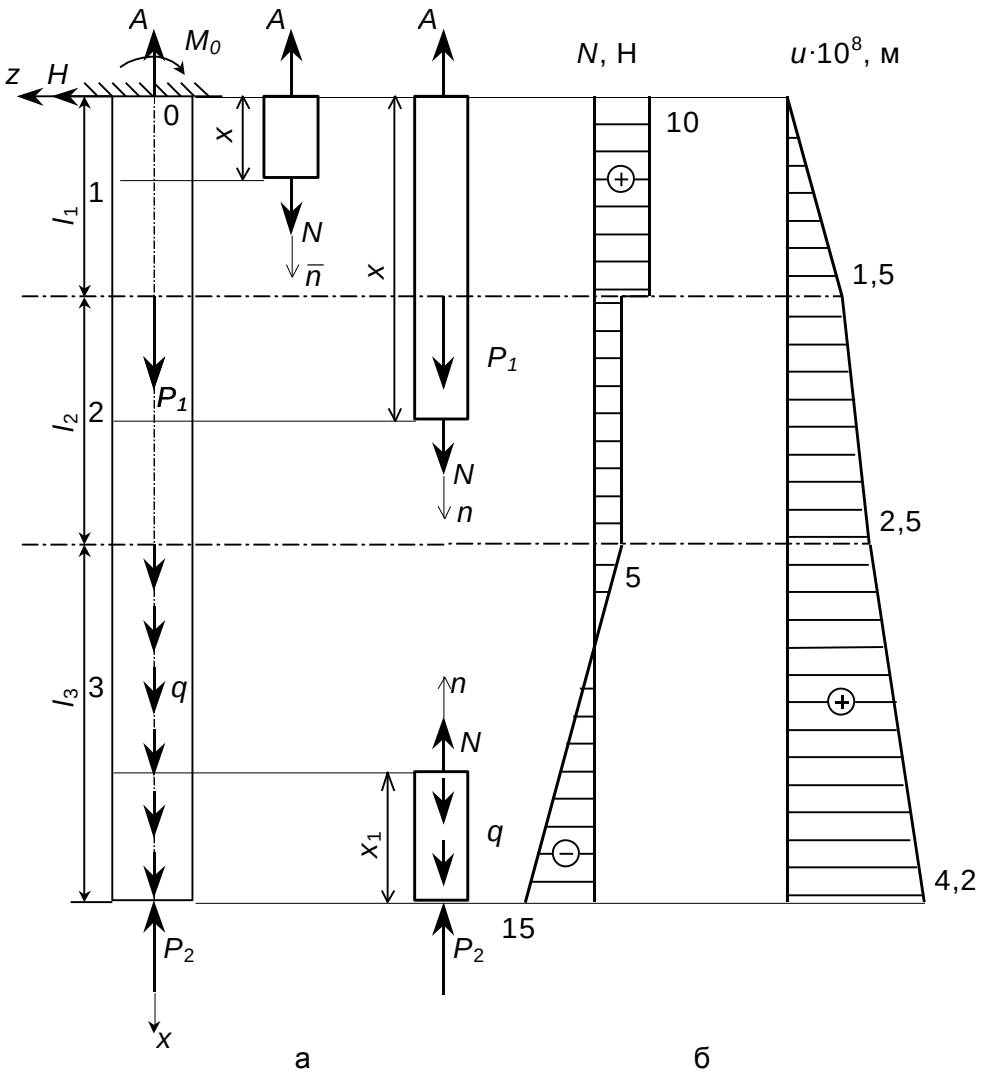
где *c* - координата сечения с известным перемещением, м.

1.1. Определение напряженно-деформированного состояния при растяжении (сжатии)

Пример**.** На рисунке, а приведена расчетная схема, моделирующая реальную конструкцию стержнем постоянного поперечного сечения. На стержень действует заданная система сил.

Известно: l_1 = 0,15 м; l_2 = 0,20 м; l_3 = 0,20 м; $F = 5\cdot10^{-4}$ м^2; P_1 = 5 Н; P_2 = 15 Н; E = 200 ГПа; q = 100 Н/м.

Требуется: построить эпюры нормальной силы *N* и перемещения *u* точек сечения стержня; определить максимальное значение нормального напряжения σ_x, нормальное и касательное напря-



жения на площадке, составляющей угол α =60° с осью *x* в точке с координатой $x = l_2/2$, а также главные напряжение в этой же точке.

Решение.

1. Выберем начало системы координат в заделке. Направим ось *x* вдоль оси стержня, а ось *z* - налево (рисунок, а).

2. Поскольку ось стержня и внешние силы расположены в одной плоскости (плоскости рисунка), можно решать плоскую задачу. В заделке возникают в общем случае три реакции опоры: *A*, *H*, M_O (см. рисунок, а). Реакции определяют из уравнений статического равновесия:

$$\sum P_{zi} = 0 \Rightarrow H = 0,$$

$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow -A + P_1 + ql_3 - P_2 = 0 \Rightarrow A = 10 \text{ Н},$$

$$\sum M_0(P_i) = 0 \Rightarrow M_0 = 0.$$

3. Расчетная схема имеет три грузовых участка (три интервала изменения координаты x): (0, 0,15), (0,15, 0,35), (0,35, 0,55), м.

4. Значения внутреннего усилия $N(x)$ для каждого участка нагружения определяют из условий статического равновесия отсеченной части.

Рассмотрим первый грузовой участок (см. рисунок, а). Проведем сечение на расстоянии $x \in (0, 0{,}15)$ от верхнего конца стержня. Сечение делит стержень на две части. Рассмотрим равновесие верхней отсеченной части. На нее действует реакция опоры A и нормальная сила N , направление которой выбираем совпадающим с направлением внешней нормали $\bar{n}$ к сечению. В этом случае положительное направление N соответствует указанному ранее правилу знаков для внутренних усилий. Составим уравнение равновесия отсеченной части (см. рисунок, а) и получим следующее выражение нормальной силы:

$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow -A + N = 0 \Rightarrow N = 10 \text{ Н}.$$

Проведем сечение $x \in (0{,}15, 0{,}35)$ на втором участке (см. рисунок, а). Сечение делит стержень на две части. Рассмотрим равновесие верхней отсеченной части и составим уравнение равновесия:

$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow -A + P_1 + N = 0 \Rightarrow N = 5 \text{ Н}.$$

Проведем сечение $x \in (0{,}35, 0{,}55)$ на третьем участке. Сечение делит стержень на две части. Рассмотрим равновесие нижней части и составим уравнение равновесия этой части, получим выражение нормальной силы и частные значения в сечениях, близких к границам интервала:

$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow -P_2 + q(0{,}55 - x) - N = 0 \Rightarrow N = -P_2 + q(0{,}55 - x),$$

$$N(0{,}55) = -15 \text{ Н}, \; N(0{,}35) = -5 \text{ Н}.$$

5. По результатам расчета построим графики нормальной силы N и перемещений u, которые называются эпюрами соответствующих характеристик. Рассмотрим подробнее построение эпюры нормальной силы. Эпюру строят рядом с расчетной схемой, что позволяет иметь наглядное представление о характере изменения

функции вдоль оси стержня. Сначала проводим линию (основание эпюры), параллельную оси стержня. Перпендикулярно этой линии в сечениях, где подсчитаны значения *N*, откладываем в выбранном масштабе ординаты, соответствующие этим значениям, затем ординаты соединяем, в нашем случае, прямыми линиями, поскольку *N* линейно зависит от *x*. Положительные и отрицательные значения *N* откладываем по разные стороны от основания эпюры. На поле эпюры ставим знак усилия, заключая его в кружок. Отмечаем значения усилия в характерных точках (граничных, возле разрывов функции, экстремальных). Эпюру штрихуем перпендикулярно ее основанию. Рядом с эпюрой необходимо поставить знак, указывающий условное обозначение функции, в данном случае *N*. Следует обратить внимание на то, что на эпюре нормальной силы в сечениях, где действует сосредоточенная продольная внешняя сила, имеет место скачок внутреннего усилия на величину приложенной силы (см. рисунок, б).

6. Определим величину нормальных напряжений на первом грузовом участке; они постоянны и

$$\sigma_x = \frac{N}{F} = \frac{A}{F} = 20 \text{ кПа}.$$

На втором участке значения напряжений постоянны и

$$\sigma_x = \frac{N}{F} = 10 \text{ кПа}.$$

На третьем участке напряжения могут быть вычислены по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} = \frac{-P_2 + q(0{,}55 - x)}{F},$$

они изменяются линейно вдоль оси стержня и в граничных точках участка принимают следующие значения:

σ_x (0,35) = 10 кПа, σ_x (0,55) = -30 кПа.

Таким образом, максимальное по модулю нормальное напряжение достигается в конце третьего участка. Как будет показано ниже, это напряжение является определяющим при расчете стержня на прочность.

7. Перемещение сечений стержня вдоль оси x на первом участке можно определить по формуле

$$u(x) = u(0) + \int_0^x \frac{N(x)dx}{EF} = \frac{Ax}{EF}.$$

На втором участке функция перемещения имеет вид

$$u(x) = u(0{,}15) + \int_{0{,}15}^{x} \frac{N(x)dx}{EF} = 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 5 \cdot 10^{-8} x.$$

Перемещения сечений третьего участка вычисляются по формуле

$$u(x) = u(0{,}35) - \frac{P_2(x - 0{,}35) + \frac{q(0{,}55 - x)^2}{2} - \frac{q}{2}(0{,}15)^2}{EF}.$$

Эпюра перемещения u, построенная по приведенным уравнениям, показана на рисунке, б.

8. Определим напряжения в точке сечения с координатой $x = l_2/2$ на площадке, составляющей угол $\alpha = 60°$ с осью x. Нормальные и касательные напряжения на этой площадке определяем по формулам

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha = 5 \text{ кПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = 8{,}66 \text{ кПа}.$$

Главные напряжения при деформации растяжения (сжатия) находим по формуле

$$\sigma_{1,3} = 0{,}5(\sigma_x \pm |\sigma_x|),$$

тогда

$$\sigma_1 = \sigma_x = 10 \text{ кПа}, \ \sigma_3 = 0.$$

Таким образом, в точках сечения только одно главное напряжение не равняется нулю, а это означает, что в этих точках реализуется линейное напряженное состояние.

1.2. Ограничения на применение формулы для определения нормального напряжения

Используемая для расчета нормальных напряжений формула (1.1) предполагает равномерное распределение напряжений по поперечному сечению стержня. Однако она имеет ограничения на применение.

Формулу $\sigma_x = N/F$ нельзя использовать для подсчета напряжений:

1) в области резкого изменения площади поперечного сечения стержня;

2) в зоне сечений, ослабленных отверстиями, выточками. Поле напряжений в этой области неравномерно;

3) в тех сечениях стержня, где действуют сосредоточенные силы. Лишь в сечениях, удаленных от точек приложения сил на расстояние порядка размера сечения, формула (1.1) справедлива.

Если учесть эти замечания, то следует сказать, что эпюра напряжений, представленная на рисунке, б, построена неверно. Однако при построении этой эпюры предполагается, что напряжения равномерно распределены по сечению, а влияние местных напряжений учитывается в условии прочности путем введения соответствующего коэффициента запаса прочности.

2. ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ

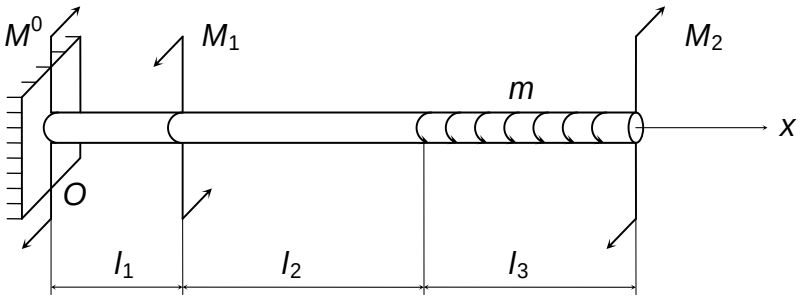
Если стержень испытывает деформацию кручения, то в нормальных сечениях отличен от нуля крутящий момент M_x.

Связь между углами поворота сечения (углами закручивания) и внутренними усилиями (закон Гука для кручения) задается дифференциальным соотношением

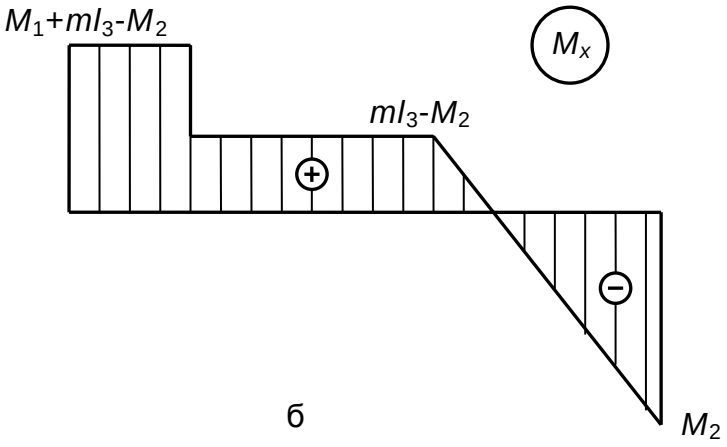
$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_p}, \qquad (2.1)$$

где θ - относительный угол закручивания сечения, рад/м; φ - абсолютный угол закручивания сечения, рад; x - координата, определяющая рассматриваемое сечение, м; G - модуль сдвига, Па.

Пример**.** Определить экстремальное значение касательного напряжения и полный угол закручивания неподвижного стержня, схема нагружения которого представлена на рис. 2.1, а; сечение стержня - сплошное круглое диаметром D. Длины участков l_1, l_2, l_3, крутящие моменты M_1, M_2 и интенсивность крутящего момента m полагаются заданными.



а



б

Рис. 2.1

Решение.

1. Начало координат располагается в крайнем левом сечении, направление оси x выбрано слева направо, как показано на рис. 2.1, а.

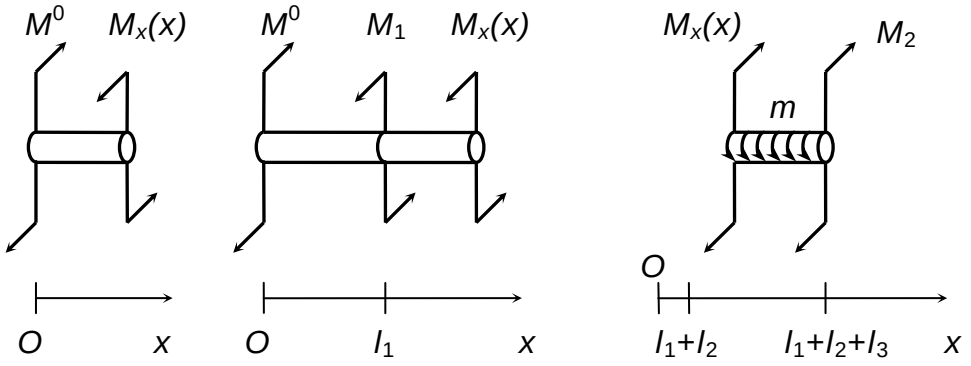
2. Момент в опоре M^0 определяется из условия равновесия (отсутствие вращения) и

$$M^0 = M_1 + ml_3 - M_2 .$$

Выбранное направление опорного момента показано на рис. 2.1, а.

3. Расчетная схема имеет три грузовых участка (интервала изменения координаты x): $(0, l_1)$, $(l_1, l_1+ l_2)$, $(l_1+ l_2, l_1+ l_2+ l_3)$.

4. Значения внутреннего крутящего момента дня каждого участка нагружения определяются из условий статического равновесия рассматриваемой отсеченной части. На рис. 2.2 показаны рассматриваемые отсеченные части стержня с положительными направлениями действующего в нормальных сечениях крутящего момента M_x (для большей наглядности координатная ось x условно смещена вниз от оси стержня).



а б в

Рис. 2.2

На первом грузовом участке уравнение статического равновесия, выражающее отсутствие вращения относительно оси x, имеет вид

$$-M^0 + M_x(x) = 0.$$

Тогда крутящий момент постоянен и равен моменту в опоре

$$M_x(x) = M^0.$$

На втором участке крутящий момент

$$M_x(x) = M^0 - M_1.$$

Крутящий момент на третьем участке определяется из соотношения

$$-M_x(x) + m(l_1 + l_2 + l_3 - x) - M_2 = 0 .$$

5. Полная функция крутящего момента имеет вид

$$M_x(x)=\begin{cases} M_1+ml_3-M_2, & x\in(0,l_1),\\ ml_3-M_2, & x\in(l_1,l_1+l_2),\\ m(l_1+l_2+l_3-x)-M_2, & x\in(l_1+l_2,l_1+l_2+l_3). \end{cases}$$

На рис. 2,1, б представлена эпюра крутящего момента. Как видно из графика функции, максимальное по модулю значение момента возникает в сечениях, бесконечно близких к свободному (незакрепленному) концу стержня - опасных сечениях. Здесь величина крутящего моменте равна M_2.

Следует отметить подобие эпюр внутренних усилий в данном примере и примере предыдущего раздела. Такой результат не случаен, поскольку исходные данные примеров и порядок построения эпюр идентичны, если принять во внимание аналогию "сила-момент" для осевого растяжения (сжатия) и кручения.

6. Функция угла закручивания стержня является решением дифференциального уравнения (2.2)

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{1}{GJ_\rho}\int_0^x M_x(x)dx$$

при граничном условии (закрепление левого сечения)

$$\varphi(0)=0.$$

После интегрирования выражения крутящею момента угол закручивания будет

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{GJ_\rho}(M_1+ml_3-M_2)x, & x\in(0,l_1),\\ \dfrac{1}{GJ_\rho}(M_1l_1+(ml_3-M_2)x), & x\in(l_1,l_1+l_2),\\ \dfrac{1}{GJ_\rho}\left(M_1l_1+ml_3(l_1+l_2)-M_2x-m\dfrac{(l_1+l_2+l_3-x)^2}{2}+m\dfrac{l_3^2}{2}\right), & \\ x\in(l_1+l_2,l_1+l_2+l_3). \end{cases}$$

Полный угол закручивания стержня $\Delta\varphi$

$$\varphi(l_1+l_2+l_3)-\varphi(0)=\frac{1}{GJ_\rho}\left(M_1l_1+ml_3(l_1+l_2)-M_2(l_1+l_2+l_3)+\frac{ml_3^2}{2}\right).$$

3. ДЕФОРМАЦИЯ ПЛОСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА

Плоский поперечный изгиб стержня вызывают силы, направление действия которых перпендикулярно оси стержня, а сами они расположены в одной плоскости. Пусть плоскость действие нагрузки совпадает с координатной плоскостью *xOz*. Тогда в сечениях стержня возникает поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_y. Остальные внутренние усилия $N = Q_y = M_z = M_x = 0$.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента стержня при изгибе имеют вид:

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \qquad (3.1)$$

Согласно уравнениям (3.1), внутренние усилия Q_z, M_y связаны с внешней нагрузкой. Эти уравнения часто используются для проверки правильности построения эпюр усилий Q_z и M_y или для определения усилий путем интегрирования уравнений (3.1) на участках непрерывности внешней нагрузки.

3.1. Определение напряженно-деформированного состояния

Пример. На рисунке, а приведена расчетная схема, моделирующая реальную конструкцию стержнем постоянного поперечного сечения. Стержень закреплен с помощью двух опор. На расстоянии *l* от левого конца стержня расположена шарнирная неподвижная опора, а на расстоянии 3*l* - шарнирная подвижная опора.

Известно: l = 0,2 м; q = 100 Н/м; [σ] - 10^7 Па; $P = ql$; $M = ql^2$, $b = 6 \cdot 10^{-2}$ м; $h = 12 \cdot 10^{-2}$ м.

Требуется: построить эпюры поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y.

Решение.

1. Выберем систему координат так, как показано на рисунке, а.

2. Обозначим реакции опор через *A*, *H*, *B*. Запишем уравнения равновесия стержня:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0,$$

$$\sum_i M_A(P_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -Pl + M + 1{,}5ql^2 - 2Bl = 0,$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3Pl + M - 0{,}5ql^2 + 2Al = 0.$$

Решая последние дна уравнения, получим.

$$A = 1{,}25ql, \qquad B = 0{,}75ql.$$

3. Стержень имеет три грузовых участка.

4. Запишем выражения внутренних усилий на первом участке. Проведем сечение на расстоянии $x \in (0, l)$ от начала координат. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части стержня (рисунок, б):

$$\sum_i P_{iz} = 0 \quad \Rightarrow \quad P + Q_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_z = -P = -ql = -20 \text{ Н},$$

$$\sum M_{o_1}(P_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad Px + M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = -Px = -qlx.$$

Функция изменяется по закону прямой линии и принимает в граничных точках участка следующие значения:

$$M_y(0) = 0, \quad M_y(l) = -4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Проведем сечение на расстоянии $x \in (l, 2l)$ от начала координат на втором участке. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части стержня (рисунок, б):

$$\sum_i P_{iz} = 0 \quad \Rightarrow \quad P - A + Q_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_z = A - P = 5 \text{ Н}.$$

$$\sum_i M_{o_2}(P_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad Px - A(x - l) + M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = -Px + A(x - l).$$

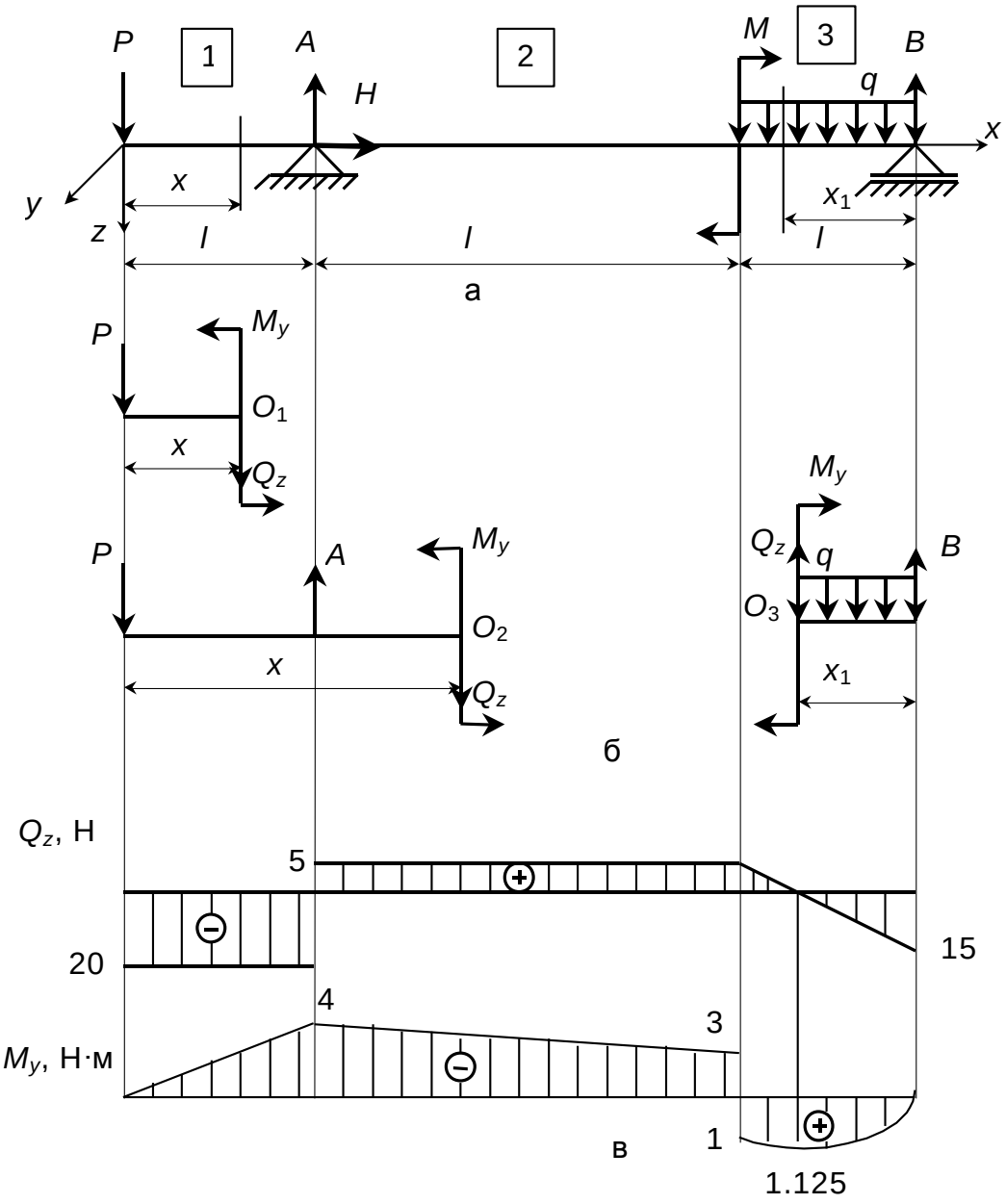
Изгибающий момент изменяется по закону прямой линии, принимая на концах участка значения

$$M_y(l) = -Pl = -4 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad M_y(2l) = -0.75ql^2 = -3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для вычисления внутренних усилий на третьем участке проведем сечение на расстоянии $x_1 \in (0, l)$ от правого конца стержня. Сечение делит стержень на две части. Рассмотрим равновесие правой отсеченной части (рисунок, б):

$$\sum_i P_{iz} = 0 \quad \Rightarrow \quad -B + qx_1 + Q_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_z = -B + qx_1,$$

$$\sum_i M_{o_3}(P_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad Bx_1 - qx_1^2/2 - M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = Bx_1 - qx_1^2/2.$$



Поскольку на участке поперечная сила меняет знак, то, очевидно, достигает экстремального значения в сечении, где $Q_z = 0$. Определим экстремальное значение M_y:

$$\frac{dM_y}{dx_1} = Q_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -B + qx_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}75l \quad \Rightarrow \quad M_y(0{,}75l) = 1{,}125 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

5. Эпюры поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y построены по общим правилам и показаны на рисунке, в.

3.2. Ограничения на применение формул для определения нормальных и касательных напряжений

Формула (3.2) предполагает линейный закон изменения напряжения σ_x, по высоте сечения, но это справедливо не всегда.

Эту формулу нельзя применять:

1) если отношение длины стержня к высоте его сечения меньше 7, т. е. $l/h < 7$;

2) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы. В этих сечениях имеет место возмущение поля напряжений, и погрешность при подсчете нормальных напряжений по формуле (3.2) будет велика.

Формула Журавского (3.4) при определении касательных напряжений дает допустимую (3%) погрешность, если отношение высоты h к ширине b сечения стержня больше двух. Поэтому, если $h/b < 2$, то формулу Журавского применять не рекомендуется.

В сечениях, расположенных вблизи сосредоточенной внешней силы, формулу Журавского для подсчета касательных напряжений применять недопустимо.

4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИИ

4.1. Задачи теорий прочности.

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. Наиболее просто эта задача решается для простых видов деформации, в частности для одноосных напряженных состояний, так как в этом случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально. Под опасными напряжениями, как уже указывалось, понимают напряжения, соответствующие началу разрушения (при хрупком состоянии материала) или появлению остаточных деформаций (в случае пластического состояния материала).

Так, испытания образцов из данного материала на простое растяжение или сжатие позволяют без особых трудностей определить значения опасных напряжений:

$$\sigma^{o} = \sigma_{T} \text{ или } \sigma^{o} = \sigma_{B}.$$

По опасным напряжениям устанавливают допускаемые напряжения $[\sigma_{+}]$ при растяжении или $[\sigma_{-}]$ при сжатии, обеспечивая известный коэффициент запаса против наступления предельного состояния. Таким образом, условие прочности для одноосного (линейного) напряженного состояния (рис. 4.1, а) принимает вид

$$\sigma_1 \le [\sigma_{+}] \text{ или } \sigma_3 \le [\sigma_{-}].$$

Рассмотрим теперь вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии, когда в точках детали два или все три главных напряжения σ_1, σ_2, σ_3 не равны нулю (рис. 4.1, б).

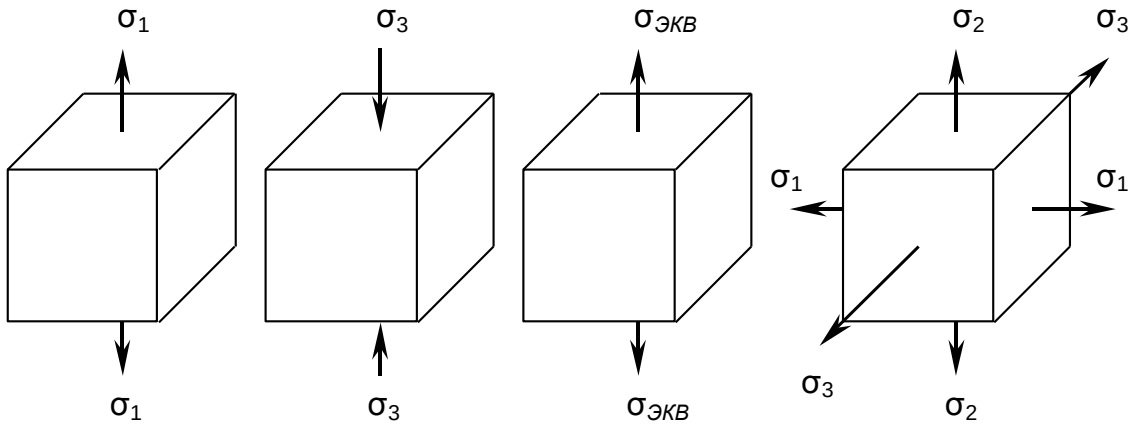


Рис. 4.1

В этих случаях, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и из-за большого объема испытаний.

Другой путь решения задачи заключается в установлении критерия прочности (критерия предельного напряженно - деформированного состояния). Для этого вводят гипотезу о преимуществен-

ном влиянии на прочность материала того или иного фактора: полагают, что нарушение прочности материала при любом напряженном состоянии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение фактора, определяющего прочность, находят на основании простых, легко осуществимых опытов на растяжение (сжатие). Иногда пользуются также результатами опытов на кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить данное сложное напряженное состояние с простым, например, с одноосным растяжением (рис. 4.1, в), и установить при этом такое эквивалентное (расчетное) напряжение, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса.

Под коэффициентом запаса в общем случае напряженного состояния понимают число n, показывающее, во сколько раз нужно одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния σ_1, σ_2, σ_3, чтобы оно стало предельным:

$$\sigma_1^o = n\sigma_1;\ \ \sigma_2^o = n\sigma_2;\ \ \sigma_3^o = n\sigma_3.$$

Для большинства конструкций n выбирают в пределах 1.5 … 3, для особенно ответственных (например, используемых под водой, в космосе) – до 10 … 20.

Выбранная указанным образом гипотеза часто называется механической теорией прочности. Ниже рассмотрены некоторые из таких теорий.

4.2. Классические критерии прочности (теории прочности)

4.2.1. Критерий наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности).

Согласно этой теории, преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения σ^o. Последнее устанавливается при простом растяжении или сжатии на образцах из данного материала.

Условие нарушения прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_+^o$$

$$|\sigma_3| = \sigma_-^o$$

Условие прочности с коэффициентом запаса n следующее:

$$\sigma_1 \le [\sigma]^+ \qquad (4.1)$$

или

$$\sigma_3 \le [\sigma]^-, \qquad (4.2)$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma^o}{n}.$$

Таким образом, критерий наибольших нормальных напряжений из трех главных напряжений учитывает лишь одно - наибольшее, полагая, что два других не влияют на прочность.

Опытная проверка показывает, что эта теория прочности не отражает условий перехода материала в пластическое состояние и дает при некоторых напряженных состояниях удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например, для камня, кирпича, керамики, инструментальной стали и т. п.).

4.2.2. Критерий наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности).

Согласно этой теории, в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшая линейная деформация $\varepsilon_{макс}$ достигает своего опасного значения ε^o. Последнее определяется при простом растяжении или сжатии образцов из данного материала.

Таким образом, условие разрушения следующее:

$$\varepsilon_{макс} = \varepsilon^o \qquad (4.3)$$

а условие прочности –

$$|\varepsilon_{макс}| \le [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^o}{n} \qquad (4.4)$$

Используя обобщенный закон Гука, выразим условие прочности (4.4) в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет ε_1. Тогда

$$\varepsilon_{макс} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При простом растяжении, приняв в качестве допускаемого напряжение [σ], мы тем самым для наибольшего относительного удлинения допускаем величину

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Подставим выражения для $\varepsilon_{макс}$ и [ε] в условие прочности (4.4). Тогда

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le \frac{[\sigma]}{E},$$

или

$$[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le [\sigma]. \qquad (4.5)$$

Как видно из условия прочности (4.5), в этой теории с допускаемым напряжением нужно сравнивать не то или другое главное напряжение, а их комбинацию. Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \qquad (4.6)$$

Опытная проверка этой теории указывает на согласующиеся в ряде случаев результаты лишь для хрупкого состояния материала (например, для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска). Отметим также, что применение второй теории прочности в виде (4.5) недопустимо для материалов, не следующих закону Гука или находящихся за пределами пропорциональности.

4.2.3. Критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории предполагается, что предельное состояние в общем случае наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение $\tau_{макс}$ дости-

гает опасного значения τ^o. Последнее определяется при достижении предельного состояния в случае простого растяжения.

Условие разрушения имеет вид

$$\tau_{макс} = \tau^o; \qquad (4.7)$$

условие прочности -

$$\tau_{макс} \le [\tau] = \frac{\tau^o}{n}. \qquad (4.8)$$

Так как известно, что

$$\tau_{макс} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \text{ а } \tau^o = \frac{1}{2}\sigma^o,$$

условия разрушения и прочности (4.7), (4.8) можно выразить через главные напряжения так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma^o \; ; \qquad (4.9)$$
$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma].$$

Таким образом, эквивалентным напряжением по третьей теории является разность алгебраически наибольшего и наименьшего главных напряжений:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \; .$$

Третья теория прочности в общем хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2, которое, как показывают опыты, оказывает также некоторое, хотя во многих случаях и незначительное, влияние на прочность материала.

Отметим, что критерий наибольших касательных напряжений обычно рассматривается как условие начала образования пластических (остаточных) деформаций, которые являются результатом скольжения слоев атомов в кристалле по определенным кристаллографическим плоскостям. Это становится возможным в случае, когда на указанных плоскостях скольжения касательные напряжения достигают некоторой предельной величины.

Таким образом, в качестве критерия, определяющего наступление текучести материала, можно принять величину наибольшего касательного напряжения.

Считая предельным состоянием наступление текучести, из равенства (4.9) имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T .$$

Это условие достаточно удовлетворительно описывает начало пластической деформации для многих металлов и сплавов.

4.2.4. Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности)

В качестве критерия прочности в этом случае принимают количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории, опасное состояние (текучесть) в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения $u_ф$ достигает своего предельного значения. Ее можно легко определить при простом растяжении в момент текучести.

Условие наступления текучести -

$$u_ф = (u_ф)_T . \qquad (4.10)$$

Условие прочности -

$$u_ф \le [u_ф].$$

Предполагая, что закон Гука справедлив вплоть до наступления предельного состояния, можно потенциальную энергию формоизменения в общем случае напряженного состояния записать в виде

$$u_ф = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \qquad (4.11)$$

При простом растяжении в момент текучести ($\sigma_1 = \sigma_т$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) имеем

$$(u_ф)_T = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_T^2 . \qquad (4.12)$$

Следовательно, условие (4.10) после подстановки выражений (4.11) и (4.12) преобразовывается так:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T \quad ,$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}=\sigma_T .$$

Условие прочности будет следующим:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}\le\frac{\sigma_T}{n}=[\sigma] .$$

Следовательно, эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности

$$\sigma_{экв}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}. \qquad (4.13)$$

Заметим, что выражение для $\sigma_{экв}$ совпадает с выражением для интенсивности напряжений σ_i.

Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Появление в материале малых пластических деформаций четвертой теорией определяется более точно, чем третьей.
Следует отметить, что выражение (4.13) с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением для касательного напряжения $\tau_{окт}$ на октаэдрической площадке, равнонаклоненной к трем главным направлениям. Поэтому расчетные уравнения четвертой теории прочности можно получить исходя из критерия постоянства октаэдрических касательных напряжений:

$$\tau_{окт}\le[\tau_{окт}].$$

Такая трактовка освобождает рассматриваемую теорию прочности от ограничений, связанных с областью применимости закона Гука, и дает возможность установить условия начала не только пластических деформаций, но и разрушения.

4.2.5. Механические характеристики материалов.

Из сказанного следует, что для определения допускаемых напряжений [σ] по формуле [σ]= σ^o/ n за опасные напряжения σ^o следует принимать временное сопротивление $\sigma_в$ для хрупких материалов и предел текучести $\sigma_т$ для пластичных, иначе говоря, необходимо знать механические характеристики материалов, из которых изготовлены элементы рассчитываемых конструкций.

Механические характеристики материалов определяются экспериментально. Ориентировочные значения механических характеристик различных материалов приведены в прил. 7.

4.3. Прочностные расчеты при растяжении-сжатии

При растяжении (сжатии) тензор напряжений имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Напряженно-деформированное состояние стержня в этом случае линейное: только одно главное напряжение отлично от нуля и равно по модулю σ_x.

При выполнении инженерных расчетов предполагаем, что нормальные напряжения σ_x равномерно распределены по сечению стержня; условие прочности будем использовать в виде (4.1) или (4.2).

Пример**.** Определим, выполняется ли условие прочности для стержня, описанного в примере п.1.1; Материал стержня – сталь с $[\sigma]^+$ = 100 МПа и $[\sigma]^-$ = -100 МПа.

Решение. Экстремальное значение нормального напряжения σ_x = -30 кПа и реализуется в самой нижней точке стержня. Тогда условие прочности (4.2)

$$\sigma_x = -30 \cdot 10^3 \text{ Па} = \sigma_3 > [\sigma]^- = -100 \cdot 10^6 \text{Па}$$

выполняется с большим запасом.

4.4. Прочностные расчеты при кручении

Тензор напряжений в выбранной системе координат имеет вид

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

причем для центрально симметричного поперечного сечения касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz} и полное касательное напряжение τ_x, можно вычислить по следующим формулам:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{J_p} z, \quad \tau_{xz} = -\frac{M_x}{J_p} y, \quad \tau_x = -\frac{M_x}{J_p} \sqrt{z^2 + y^2},$$

где J_p - полярный момент инерции сечения, м^4; y, z - текущие координаты точки сечения, м.

Для сплошного круглого поперечного сечения диаметром D полярный момент

$$J_p = \iint_F \rho^2 dF = \frac{\pi D^4}{32},$$

где ρ - расстояние от центра до рассматриваемой точки сечения, dF - элементарная площадь.

Условие прочности записывается в виде

$$\left|\tau_ч\right|_{\max} \le [\tau].$$

Максимальное касательное напряжение реализуется на контуре сечения и может быть рассчитано по формуле

$$\left|\tau_ч\right|_{\max} = \frac{\left|M_x\right|_{\max}}{J_\rho} \frac{D}{2} = \frac{16 \cdot \left|M_x\right|_{\max}}{\pi D^3}.$$

4.5. Прочностные расчеты при плоском поперечном изгибе

При плоском поперечном изгибе в точках сечений стержней возникают нормальные σ_x и касательные τ_{xz} напряжения. Тензор напряжений имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если оси y и z являются главными и центральными осями сечения, то

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z. \qquad (4.2)$$

Для круглого поперечного сечения радиусом r

$$J_y = \frac{\pi r^4}{4};$$

для сечения в форме кольца с внешним радиусом R и внутренним r

$$J_y = \frac{\pi\left(R^4 - r^4\right)}{4};$$

для сечения прямоугольной формы с высотой h и шириной b имеем (ось y — перпендикулярна стороне h и плоскости изгиба)

$$J_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Наибольшего значения нормальные напряжения σ_x достигают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_y}{J_y} z_{\max} = \frac{M_y}{W_y}, \qquad (4.3)$$

где $W_y = J_y / z_{\max}$ - момент сопротивления сечения стержня относительно оси y.

Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе определяют по формуле Журавского

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{b_z J_y}, \qquad (4.4)$$

где $S_y^* = \int_{F^*} z dF$ - статический момент относительно оси y площади сечения, лежащей ниже линии, параллельной оси y и проведенной через точку, в которой определяется τ_{xz}; b_z - ширина сечения на уровне координаты z точки, где определяется касательное напряжение τ_{xz}.

Влиянием поперечных сил при анализе прочности часто пренебрегают и используют условие прочности в виде:

$$\sigma_{x\max} = \frac{\left|M_y\right|_{\max}}{W_y} \le [\sigma]. \qquad (4.5)$$

Пример**.** Определить положение опасного сечения и значения наибольших нормальных и касательных напряжений для стержня, описанного в примере п.3.1; проверить прочность стержня; определить напряжения в точке *C* (z_c=h/4) сечения на площадке, составляющей угол α = 30° с осью *x*, а также определить главные напряжения и положение главных площадок. Допустимое напряжение для материала стержня [σ]=100 МПа.

Решение. Опасным является сечение $x = l$, где $M_y = |M_y|_{\max} =$ 4Н·м (п.3.1, рисунок, в). Наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении определяем по формуле (4.3):

$$\sigma_{x\max} = \left|M_y\right|_{\max} / W_y = 0{,}278 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Проверим прочность стержня. Воспользуемся условием прочности (4.5):

$$\sigma_{x\max} = 0{,}278 \cdot 10^5 \text{ Па} < [\sigma] = 1 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Условие прочности выполняется. Стержень не разрушится при заданной нагрузке.

Определим напряжения в точке *C* опасного сечения (см. рисунок 4.2) Воспользуемся формулами (4.2) и (4.4):

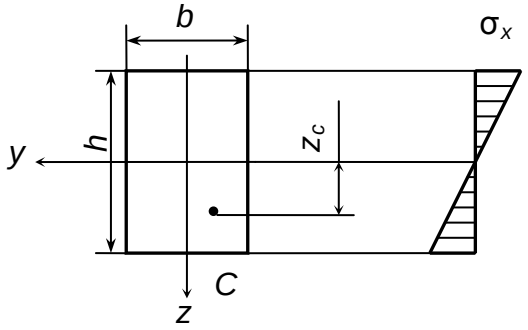


Рис. 4.2

$$\sigma_{xc} = \frac{M_{yc}}{J_y} z_c = -0{,}139 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$\tau_{x2\,c} = \frac{Q_z S_y^*}{b_z J_y} = \frac{-20\,\dfrac{bh}{4}\,\dfrac{3h}{8}}{b\,\dfrac{bh^3}{12}} = -0{,}313 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Напряжения на площадке, составляющей угол α = 30° с осью *x*, определяем по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha = -0{,}93 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha = -0{,}76 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Главные напряжения определяем по формуле:

$$\sigma_{1,3} = 0{,}5\left(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2}\right).$$

В точке *C* главные напряжения

$$\sigma_1 = 0{,}65 \text{ кПа}, \quad \sigma_3 = -14{,}5 \text{ кПа}.$$

Положение главных площадок находим, используя формулу:

$$\operatorname{tg} 2\beta = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x} = -1{,}625 \quad \Rightarrow \quad 2\beta = -58{,}4^\circ \quad \beta_1 = -29{,}2^\circ, \quad \beta_2 = \beta_1 + 90^\circ.$$

5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Ограничимся рассмотрением упругих перемещений стержней, которые моделируют реальные конструкции, имеющие один размер много больше двух других.

Оценка значений перемещений дает возможность судить о жесткости стержня, т.е. о способности стержня сопротивляться перемещениям. Если стержень обладает достаточной жесткостью, то перемещения не превышают допускаемых значений.

Умение определять перемещения необходимо также для вычисления коэффициентов жесткости элементов стержневых конструкций, что требуется при построении динамических расчетных схем конструкций.

Решение статически неопределимых задач включает одним из пунктов раскрытие статической неопределимости. Основные методы раскрытия статической неопределимости, например, метод

уравнивания перемещений, основаны на определении перемещений при различных видах деформации.

Расчет перемещений при растяжении (сжатии) можно производить, по формуле (1.2), при кручении - по формуле (2.1). Наиболее сложной и, в то же время, часто встречаемой задачей является определение перемещений при изгибе стержня. К наиболее распространенным методам определения перемещений при изгибе можно отнести:

а) метод начальных параметров,

б) теорему Кастильяно.

5.1. Определение перемещений по алгоритму метода начальных параметров

Рассмотрим расчетную схему конструкции в виде стержня, закрепленного двумя опорами на неподвижном основании. Под действием силы *P* ось стержня искривляется. Предполагаем, что поведение материала стержня подчиняется закону Гука. Тогда перемещения точек оси стержня невелики, и поэтому допустимо считать, что точки оси стержня перемещаются перпендикулярно первоначально недеформированной оси стержня, а сечения стержня, оставаясь плоскими, поворачиваются.

Выберем оси координат. Начало координат расположим в крайнем левом сечении стержня. Ось x направим вдоль оси стержня, ось z - перпендикулярно оси x вниз, а ось y проведем так, чтобы система координатных осей оказалась правой (рисунок, а).

Обозначим перемещение центра тяжести поперечного сечения с координатой x через w_x, а угол поворота сечения - через θ_x. Угол поворота сечения (см. рис. 5.1, а) - это угол между перпендикулярами к недеформированной и изогнутой осям стержня.

Сформулируем правило знаков для перемещений:

Линейное перемещение (прогиб) - $w_x>0$, если оно происходит в положительном направлении оси z, а угол поворота сечения $\theta_x>0$, если поперечное сечение поворачивается относительно сво-

его первоначального положения против направления вращения часовой стрелки.

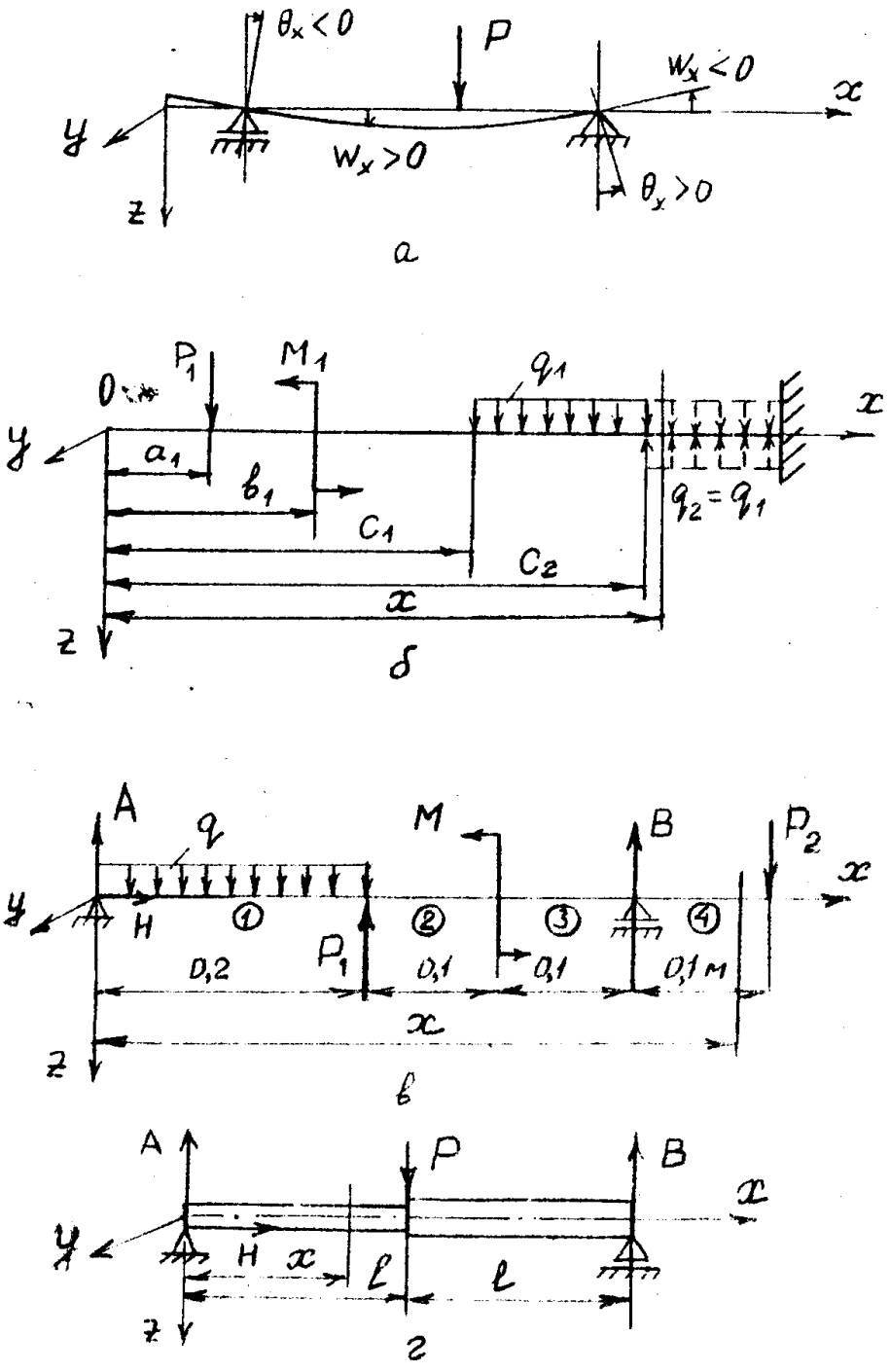


Рис. 5.1

Формулы для подсчета перемещений по методу начальных параметров получаются в результате интегрирования дифференциального линейного неоднородного уравнения четвертого порядка:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q_z}{EJ_y}, \tag{5.1}$$

где $w = f(x)$ - прогиб, м, q_z - интенсивность распределенной нагрузки, действующей на стержень, Н/м, E - модуль нормальной упругости материала стержня, Па, J_y - момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси y, м^4.

Решение уравнения (5.1) при любом числе грузовых участков стержня записывается в виде:

$$w_x = w_o - \theta_o x + \sum_{k=0} \frac{P_k (x - a_k)^3}{6EJ_y} + \sum_{i=0} \frac{M_i (x - b_i)^2}{2EJ_y} + \\ + \sum_{j=0} \frac{q_j (x - c_j)^4}{24EJ_y} \tag{5.2}$$

Учитывая, что $\theta_x = -\frac{dw_x}{dx}$, найдем

$$\theta_x = \theta_o + \sum_{k=0} \frac{P_k (x - a_k)^2}{2EJ_y} + \sum_{i=0} \frac{M_i (x - b_i)}{EJ_y} + \sum_{j=0} \frac{q_j (x - c_j)^3}{6EJ_y}. \tag{5.3}$$

При определении перемещений по формулам (5.2) и (5.3) следует учитывать (рис. 5.1, б), что:

1. Начало координат расположено в крайнем левом сечении стержня и ось *z* направлена вниз.

2. a_k, b_i, c_j - расстояния от начала координат до соответствующего силового воздействия P_k, M_i, q_j.

3. Знаки каждого из слагаемых, стоящих под знаками суммы, соответствуют направлению внешних воздействий P_k, q_j вдоль оси

z (вниз), а моментов M_i против направления вращения часовой стрелки.

4. Нагрузка интенсивностью q_j не должна изменяться до конца стержня. Если же нагрузка q_j распределена на части стержня так, что сечение, где она заканчивается, не конечное сечение стержня, то в формулах (5.2) и (5.3) последнее слагаемое распространяет эту нагрузку до конца стержня на той его части, где этой нагрузки нет.

Для того чтобы не изменить значение прогиба, необходимо приложить на этой части стержня такую же нагрузку интенсивностью q_j, но обратного направления, и учесть ее при определении перемещений.

5. Начальные параметры w_o (прогиб в начале координат) и θ_o (угол поворота сечения в начале координат) определяют из граничных условий (условий закрепления стержня), удерживая в формулах (5.2), (5.3) только те слагаемые, в которых a_k, b_i, c_j меньше координаты x опор.

6. При фиксированном x в формулах (5.2), (5.3) учитывают только те слагаемые, в которых a_k, b_i, c_j меньше координаты x сечения, перемещения которого определяют.

Пример 1.1 Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой представлена на рис. 5.1, в. На стержень, опертый на две опоры действуют внешние воздействия: $q = 100$ Н/м, $P_1 = 10$ Н, $M = 1$Н$\cdot$м, $P_2 = 20$ Н. Общая длина стержня $L = 5l = 0{,}5$ м. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = const$. Стержень имеет четыре грузовых участка.

Требуется определить линейное перемещение w_C сечения $x = 0{,}3$ м и угол поворота θ_D сечения $x = 0{,}4$ м.

Решение:

1.Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z -

вниз, а ось y - перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2.Обозначим на схеме (рис. в) реакции опор A, H, B.

3.Определим неизвестные внешние силы (реакции опор) из уравнений статического равновесия стержня:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow H = 0.$$

$$\sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow q2l l - P_1 2l - M - B4l + P_2 5l = 0 \Rightarrow B = 20 \text{ Н}.$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow A4l - q2l3l + P_1 2l - M + P_2 l = 0 \Rightarrow A = 10 \text{ Н}.$$

4. Запишем выражения для определения прогиба и угла поворота произвольного сечения x стержня на четвертом участке. Для этого воспользуемся уравнениями (5.2) и (5.3):

$$w_x = w_o - \theta_o x + \frac{1}{EJ_y}\left[-\frac{Ax^3}{6} + \frac{qx^4}{24} - \frac{q(x-2l)^4}{24} - \frac{P_1(x-2l)^3}{6} + \right.$$
$$\left. + \frac{M(x-3l)^2}{2} - \frac{B(x-4l)^3}{6} - \right]. \qquad (5.4)$$

$$-\theta_x = -\theta_o + \frac{1}{EJ_y}\left[-\frac{Ax^2}{2} + \frac{qx^3}{6} - \frac{q(x-l)^3}{6} - \frac{P_1(x-2l)^2}{2} + \right.$$
$$\left. + M(x-3l) - \frac{B(x-4l)^2}{2} - \right]. \qquad (5.5)$$

Определим из граничных условий начальные параметры w_o, θ_o:

а) $w_x\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow w_o = 0.$ (см. п.5 на стр. 33)

б) $w_{x|x=4l} = 0 \Rightarrow$

$$0 = -4l\theta_o + \frac{1}{EJ_y}\left[-\frac{A(4l)^3}{6} + \frac{q(4l)^4}{24} - \frac{q(2l)^4}{24} - \frac{P_1(2l)^3}{6} + \frac{Ml^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\theta_o = \frac{1{,}171}{EJ_y}.$$

6. Определим перемещения w_c и θ_D . Воспользуемся формулами (5.4) и (5.5). Окончательно получим:

$$w_{x|x=3l} = w_c = -\frac{0{,}515}{EJ_y}, \qquad \theta_D = -\frac{2{,}260}{EJ_y}.$$

Пример 1.2. Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух звеньев, выполненных из одного материала. Момент инерции поперечного сечения второго звена в два раза больше момента инерции поперечного сечения первого звена. Расчетная схема конструкции представлена на рис. 5.1, г. Длины участков равны между собой. Стержень оперт на две опоры. Сила P приложена посередине пролета.

Известно: $J_{y1}, J_2 = 2J_{y1}, P, E.$

Требуется определить прогиб w_A сечения $x = l$.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z - вниз, а ось y - перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Обозначим на схеме (рис. 5.1, г) реакции опор A, H, B.

3. Определим реакции опор из уравнений статического равновесия стержня:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow \quad H = 0.$$

$$\sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow \quad Pl - B2l = 0 \Rightarrow \quad B = P/2.$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow \quad -Pl + A2l = 0 \Rightarrow \quad A = P/2.$$

4. Запишем выражения для определения прогиба произвольного сечения x стержня на втором участке. Для этого воспользуемся уравнением (5.2):

$$w_x = w_o - \theta_o x - \frac{Ax^3}{6EJ_{y1}} + \frac{P(x-l)^3}{6EJ_{y2}}. \qquad (5.6)$$

5. Определим из граничных условий начальные параметры w_o, θ_o:

а) $w_{x|x=0} = 0 \Rightarrow w_o = 0.$

б) $w_{x|x=2l} = 0 \Rightarrow \quad 0 = -\theta_o 2l - \frac{P(2l)^3}{12EJ_{y1}} + \frac{Pl^3}{12EJ_{y1}} \Rightarrow \qquad \theta_o = -\frac{7Pl^2}{24EJ_{y1}}.$

6. Определим перемещение w_A по формуле (5.6) :

$$w\big|_{x=l} = w_A = -\theta_o l - \frac{Pl^3}{12EJ_{y1}} = \frac{5Pl^3}{24EJ_{y1}}.$$

5.2. Определение перемещений с помощью теоремы Кастильяно

Метод начальных параметров применим только для стержней с постоянной жесткостью EJ_y, то есть однородных стержней с неизменными размерами поперечного сечения. Методы, основанные на энергетических соотношениях (теорема Кастильяно, метод Максвелла-Мора), позволяют снять это существенное ограничение.

Согласно теореме Кастильяно обобщенное перемещение равно частной производной потенциальной энергии деформации по обобщенной силе:

$$\delta_{об} = \frac{\partial U}{\partial P_{об}} \qquad (5.7)$$

где U - потенциальная энергия деформации упругой системы, $P_{об}$ - обобщенная сила, $\delta_{об}$ - обобщенное перемещение.

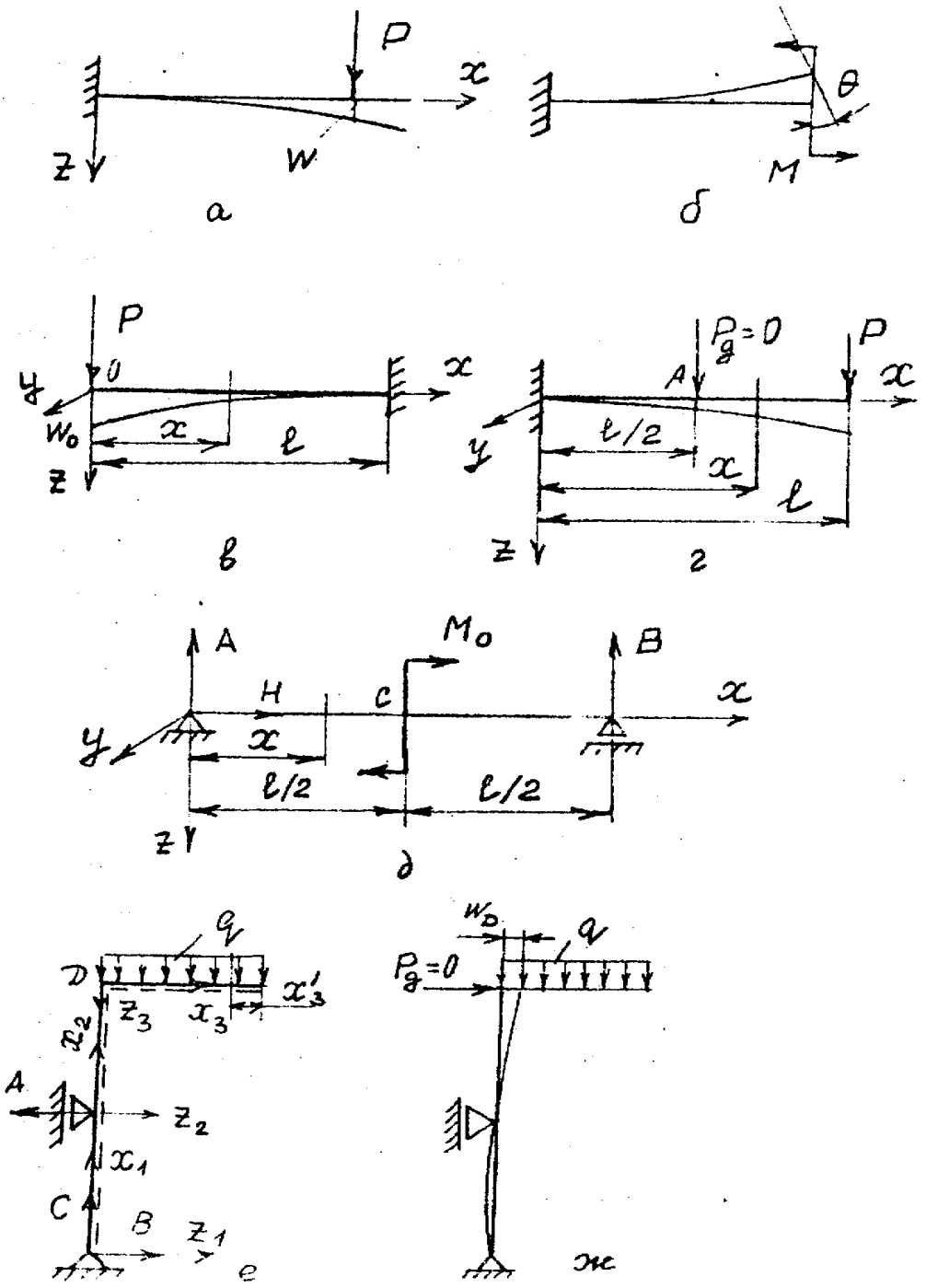


Рис. 5.2

Обобщенной силой может быть любая совокупность сил, приложенных к телу. Например, сосредоточенная сила; сосредоточенная пара сил, вызывающая деформацию изгиба или кручения стержня; сосредоточенная сила вместе с вызываемыми этой силой опорными реакциями.

Обобщенное перемещение - перемещение, соответствующее обобщенной силе, перемещение, на котором обобщенная сила совершает работу.

При определении линейного перемещения по формуле (5.7) за обобщенную силу следует принять сосредоточенную силу, действующую в сечении, где определяется перемещение (рис. 5.2, а).

При определении угла поворота сечения по формуле (6.1) за обобщенную силу следует принять сосредоточенный момент (пару сил), действующий в сечении, где определяется угол поворота (рис. 5.2, б).

При пространственном нагружении стержней, когда в сечении стержня действуют все шесть внутренних усилий, потенциальную энергию деформации определяют по формуле:

$$U = \int_l \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dx}{2GF} + \int_l \frac{k_z Q_z^2 dx}{2GF} + \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_x} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EJ_z} \qquad (5.8)$$

где N - нормальная сила; Q_y, Q_z - поперечные силы; M_x - крутящий момент; M_y, M_z - изгибающие моменты; E - модуль нормальной упругости; G - модуль сдвига; J_x - момент инерции сечения стержня при кручении;

J_y, J_z - осевые моменты инерции сечения; F - площадь поперечного сечения стержня; k_y, k_z - безразмерные коэффициенты, зависящие от формы сечения; l - длина стержня.

Если изгиб стержня происходит в плоскости xOz, то в формуле (5.8) необходимо учитывать третье и пятое слагаемые. Но вклад поперечной силы Q_z в потенциальную энергию деформации мал и в практических расчетах его не учитывают.

Тогда, при изгибе стержней потенциальная энергия деформации определяется по формуле:

$$U = \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EJ_y} \qquad (5.9)$$

Обобщенное перемещение при изгибе найдем с учетом (5.8) и (5.9) определяется по формуле:

$$\delta_{об} = \int_l \frac{M_y}{EJ_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_{об}} dx \qquad (5.10)$$

Пример 5.1. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой представлена на рис. 5.2, в. Стержень жестко закреплен в крайнем правом сечении. В левом сечении стержня действует сила P. Длина стержня l. Жесткость EJ_y стержня при изгибе постоянна.

Требуется определить перемещение w_o сечения стержня под силой P.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z - вниз, а ось y - перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое линейное перемещение w_o считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = w_o$.

3. Обобщенной силой, соответствующей обобщенному перемещению, является сила P, действующая в сечении, где определяется перемещение: $P_{об} = P$.

4. Реакции опоры можно не определять, если рассматривать равновесие отсеченной левой части при составлении уравнения изгибающего момента M_y.

5. Проведем сечение на расстоянии x от начала координат (рис. 5.2, в) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части стержня. Запишем уравнение изгибающего момента M_y и производной изгибающего момента по обобщенной силе:

$$x \in (0, l), \qquad M_y = -Px, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_{об}} = \frac{\partial M_y}{\partial P} = -x.$$

6. По формуле (5.10) определим перемещение w_o:

$$w_o = \int_0^l \frac{M_y}{EJ_y}\frac{\partial M_y}{\partial P}dx = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l (-Px)(-x)dx \Rightarrow \qquad w_o = \frac{Pl^3}{3EJ_y}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой приведена на рис. 5.2, г. Стержень жестко закреплен в крайнем левом сечении. Сила P действует в правом сечении стержня. Длина стержня - l. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = \text{const}$.

Требуется определить перемещение w_A сечения стержня на расстоянии $x = l/2$ от начала координат.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z - вниз, а ось y - перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое линейное перемещение - прогиб w_A - считаем обобщенным перемещением. $\delta_{об} = w_A$.

3. Обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению, в сечении $x = l/2$ отсутствует. Для того чтобы можно было воспользоваться теоремой Кастильяно, приложим в этом сечении некоторую дополнительную силу $P_д = 0$. Значение перемещения w_A при этом не изменится. Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению. $P_{об} = P_д$.

4. Реакции опоры можно не определять, если рассматривать равновесие правой отсеченной части при составлении уравнения изгибающего момента M_y в сечениях стержня.

5. Точка A разделяет стержень на два участка. Запишем уравнения изгибающего момента на каждом участке и подсчитаем значение производной изгибающего момента по обобщенной силе.
Первый участок: $x \in (0, l/2)$,

$$M_y = -P(l-x) - P_Д(l/2 - x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_Д} = -(l/2 - x).$$

Второй участок: $x \in (l/2, l)$,

$$M_y = -P(l-x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_Д} = 0.$$

6. По формуле (5.10) определим перемещение w_A с учетом того, что $P_Д = 0$:

$$w_A = \frac{1}{EJ_y}\int_0^{l/2}(-P(l-x))(-(l/2-x))dx \Rightarrow \quad w_A = \frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ_y}.$$

Пример 5.3. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой приведена на рис. 5.2, д. Стержень оперт на две опоры. Момент M_o действует посередине пролета стержня. Длина стержня равна l. Жесткость стержня при изгибе $EJ_y = \text{const}$.

Требуется определить угол поворота θ_c сечения стержня $x = l/2$.

Решение:

1. Проведем оси координат. Начало координат выберем в крайнем левом сечении, направим ось x вдоль оси стержня, ось z - вниз, а ось y - перпендикулярно плоскости чертежа так, чтобы система координатных осей стала правой.

2. Искомое перемещение - угол поворота сечения θ_c - считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = \theta_c$.

3. Обобщенная сила, соответствующая обобщенному перемещению, - это сосредоточенный момент M_o в этом сечении вместе с опорными реакциями, которые зависят от M_o. $P_{об} = M_o$.

4. Реакции опор обозначены на рис. 5.2, д. Определим их, составив уравнения равновесия системы:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow \quad H = 0. \qquad \sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow M_o - Bl = 0 \Rightarrow \quad B = \frac{M_o}{l}.$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow \; M_o + Al = 0 \Rightarrow \qquad A = -\frac{M_o}{l}.$$

5. Запишем уравнения изгибающего момента в сечениях стержня на каждом участке и подсчитаем значение производной изгибающего момента по обобщенной силе.

Первый участок : $x \in (0, l/2), \qquad M_y = Ax = -\frac{M_o}{l}x, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial M_o} = -x/l.$

Второй участок : $x \in (l/2, l),$

$$M_y = -B(l-x) = -\frac{M_o}{l}(l-x), \qquad \frac{\partial M_y}{\partial M_o} = -(l-x)/l \quad .$$

6. По формуле (5.10) найдем угол поворота θ_c:

$$\theta_C = \frac{1}{EJ_y}\int_0^{l/2}(-\frac{M_o}{l}x)(-x/l)dx + \frac{1}{EJ_y}\int_{l/2}^{l}(-\frac{M_o}{l}(l-x))(-(l-x)/l)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{1}{12}\frac{M_o l}{EJ_y}.$$

Замечание. Положительное значение угла поворота означает, что поворот сечения произошел в направлении действия обобщенной силы - момента M_o.

Пример 5.4. Рассмотрим конструкцию, расчетная схема которой показана на рисунке, е. Нагрузка интенсивностью q и размеры рамы указаны на рисунке, е. Жесткость при изгибе вертикального стержня $EJ_y = \text{const}$, а горизонтального стержня - $2EJ_y$.

Требуется определить линейное перемещение w_D точки D в горизонтальном направлении.

Решение:

1. На каждом участке рамы ось x проведем вдоль оси стержня. Ось z направим перпендикулярно оси x в сторону нижних волокон стержней (нижние волокна на рис. 5.2,е обозначены пунктиром).

2. Искомое перемещение w_D считаем обобщенным перемещением: $\delta_{об} = w_{D.}$.

3. Обобщенной силой должна быть сосредоточенная сила, приложенная в точке D и действующая в направлении перемещения w_D. Такая сила на схеме отсутствует. Поэтому приложим дополнительную силу $P_Д = 0$ в точке D (рис. 5.2, ж). Тогда $P_{об} = P_Д$.

4. Определим опорные реакции с учетом обобщенной силы:

$$\sum_i P_{i\text{верт}} = 0 \Rightarrow \quad -ql + C = 0 \Rightarrow \; C = ql.$$

$$\sum_i M_B(P_i) = 0 \Rightarrow \quad ql^2/2 + P_Д 2l - Al = 0 \Rightarrow \quad A = ql/2 + 2P_Д.$$

$$\sum_i M_A(P_i) = 0 \Rightarrow \quad ql^2/2 + P_Д l - Bl = 0 \Rightarrow \quad B = ql/2 + P_Д.$$

5. Запишем уравнения изгибающего момента в сечениях стержней на каждом участке и подсчитаем значение производной изгибающего момента по обобщенной силе.

Первый участок: $x_1 \in (0, l)$, $M_y = -Bx_1$, $\dfrac{\partial M_y}{\partial P_Д} = -x_1$.

Второй участок: $x_2 \in (0, l)$,

$$M_y = -B(l + x_2) + Ax_2, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial P_Д} = -(l + x_2) + 2x_2.$$

Третий участок: $x_3 \in (0, l)$, $M_y = -qx_3^2/2$, $\dfrac{\partial M_y}{\partial P_Д} = 0$.

6. По формуле (5.10) определим перемещение w_D с учетом того, что $P_Д = 0$:

$$w_D = \frac{1}{EJ_y}\int_0^l (-qlx_1/2)(-x_1)dx_1 + \frac{1}{EJ_y}\int_0^l (ql(-l)(x_2 - l)/2)dx_2 \Rightarrow \quad w_D = \frac{5}{6}\frac{ql^4}{EJ_y}.$$

6. ПРОСТЫЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

В рассмотренных ранее примерах при вычислении внутренних усилий в сечениях стержней использовались уравнения статического равновесия, которых было достаточно для определения неизвестных реакций опор, поэтому эти задачи носят название статически определимых. Если задача статически неопределимая, то для анализа напряженно-деформированного состояния необходимо привлекать дополнительные уравнения, отражающие физические свойства материала. В большинстве практических задач предполагается, что материал обладает свойством линейности деформаций по отношению к действующей нагрузке (деформации малы, выполняется закон Гука). В этом разделе рассмотрены примеры, иллюстрирующие общий подход к решению статически неопределимых задач.

Пример 6.1 (температурные напряжения).

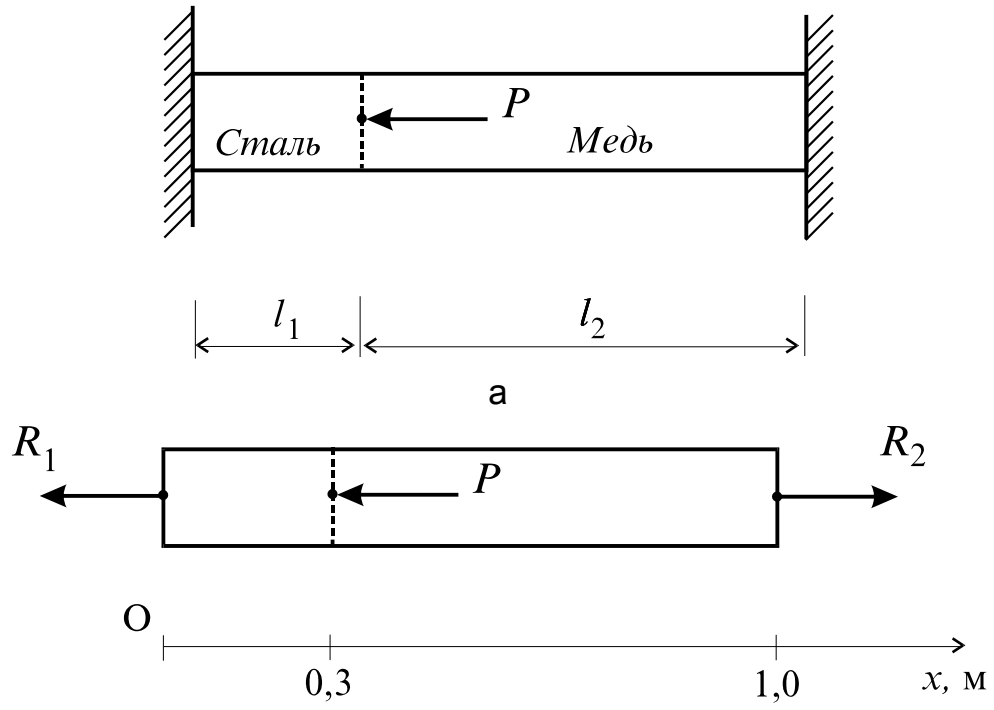


Рис. 6.1

Определить нормальные напряжения в стальном и медном участках закрепленного стержня, как изображено на рисунке 6.1, а, при увеличении температуры Δt на 20°С и приложении сосредото-

ченной нагрузки P. Длины участков равны l_1 = 0,30 м, l_2 = 0,70 м; площадь поперечного сечения стержня $F = 10^{-3}$ м^2; модули нормальной упругости стали и меди $E_{ст}$ = 200 ГПа, $E_м$ = 100 ГПа; величина сосредоточенной нагрузки P = 120 кН; температурные коэффициенты линейного расширения материалов $\alpha_{ст} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ 1/°, $\alpha_м = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ 1/°.

Решение

1. Выбранная система координат показана на рис. 6.1, б.

2. Для определения реакций опор R_1 и R_2 запишем уравнение статического равновесия стержня в напряженном состоянии, спроецировав действующую систему сил (включая реакции опор) на ось x:

$$-R_1 - P + R_2 = 0 \Rightarrow -R_1 + R_2 = P. \qquad (6.1)$$

Имеем две неизвестные реакции опор и одно уравнение; таким образом, задача является один раз статически неопределимой.

3. Запишем дополнительное уравнение, выражающее отсутствие относительного перемещения концов стержня при изменении температуры и приложении нагрузки (геометрическое условие):

$$\Delta u = 0 \ . \qquad (6.2)$$

Необходимо иметь уравнение, в которое входят неизвестные величины; для этого запишем закон Гука для осевой деформации с учетом действия температуры:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta t ,$$

где ε_x - линейная деформация вдоль оси x; σ_x- нормальное напряжение вдоль оси x, Па.

Подставив в уравнение закона Гука выражения для линейной деформации и нормального напряжения

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta t , \qquad \sigma_x = \frac{N}{F},$$

получим закон деформации стержня с учетом изменения температуры

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta t , \qquad (6.3)$$

где u - перемещение вдоль оси x, м; N - нормальная сила, Па.

Преобразуем уравнение (6.2) с учетом закона деформации (6.3), тогда дополнительное уравнение для раскрытия статической неопределимости будет иметь вид (физическое соотношение)

$$\int_0^{0,3} \frac{N(x)}{E_{cm}F}dx + \int_0^{0,3} \alpha_{cm}\Delta t\, dx + \int_{0,3}^{1,0} \frac{N(x)}{E_{м}F}dx + \int_{0,3}^{1,0} \alpha_{м}\Delta t\, dx = 0 \qquad (6.4).$$

Запишем выражения нормальных сил для обоих участков стержня

$$N(x) = \begin{cases} R_1,\ x \in (0,\ 0,3), \\ R_2,\ x \in (0,3,\ 1,0). \end{cases} \qquad (6.5)$$

Подставив выражения в уравнение (6.4) и выполнив интегрирование, получим дополнительное уравнение для раскрытия статической неопределимости:

$$\frac{0,3}{E_{ст}F}R_1 + \frac{0,7}{E_{м}F}R_2 = -0,3\,\alpha_{ст}\Delta t - 0,7\,\alpha_{м}\Delta t,$$

которое после подстановки числовых значений будет иметь вид

$$3R_1 + 14R_2 = -6,12\cdot 10^5. \qquad (6.6)$$

4. Неизвестные реакции опор найдем из системы двух уравнений (6.1) и (6.6)

$$\begin{cases} -R_1 + R_2 = 1,2\cdot 10^5, \\ 3R_1 + 14R_2 = -6,12\cdot 10^5, \end{cases}$$

тогда $R_1 = -1,35\cdot 10^5$ Н, $R_2 = -1,5\cdot 10^4$ Н.

5. Выражения нормальной силы из формулы (6.5) имеют вид

$$N(x) = \begin{cases} -1,35\cdot 10^5 \text{ Н},\ x \in (0, 0,3), \\ -1,5\cdot 10^4 \text{ Н},\ x \in (0,3, 1,0), \end{cases}$$

а нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_x(x) = \begin{cases} -135 \text{ МПа}, x \in (0,\ 0,3), \\ -15 \text{ МПа},\ x \in (0,3, 1,0). \end{cases}$$

Пример 6.2 (монтажные напряжения). Определить крутящий момент, возникающий в стержне, расчетная схема которого изображена на рисунке 6.2, а. Стержень предварительно закручен на

угол θ=5° и закреплен, затем дополнительно в том же направлении приложен скручивающий момент M=100 Н·м. Характерная длина участков равна l = 0,5 м; модуль сдвига G = 100 ГПа; полярный момент инерции сечения J_ρ= 1,0 10^{-8} м^4.

Решение

1. Выбранная система координат показана на рис. 6.2, б, ось x условно смещена вниз.

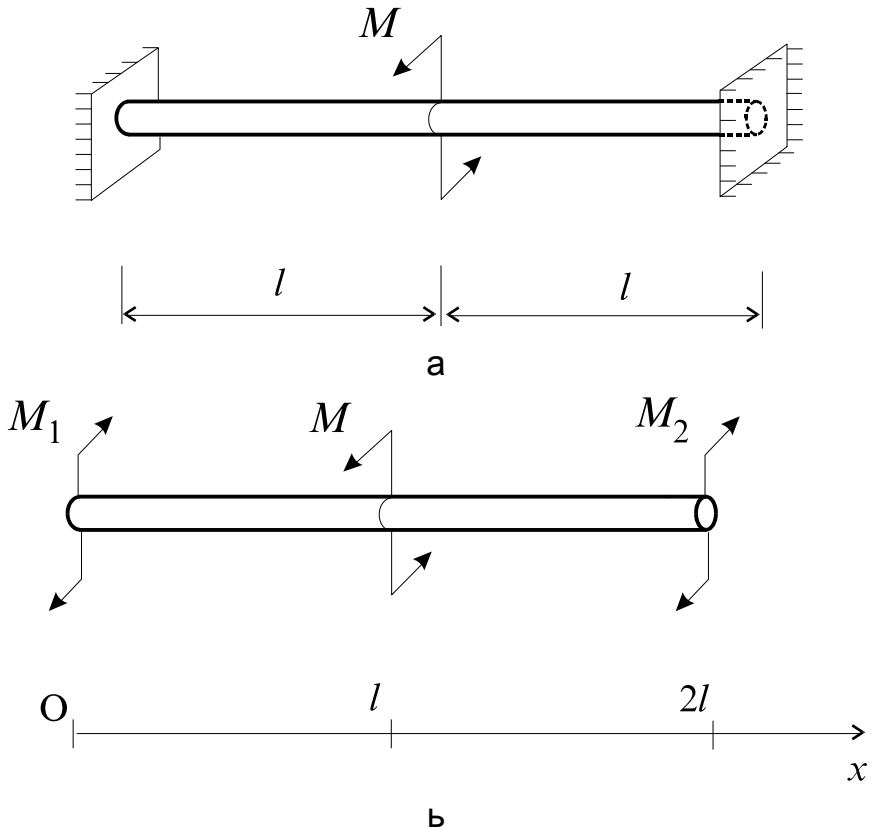


Рис. 6.2

2. Для определения моментов в опорах M_1 и M_2 запишем уравнение статического равновесия стержня в нагруженном состоянии, выражающее баланс действующей системы моментов относительно оси x:

$$-M_1 + M - M_2 = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = M. \qquad (6.7)$$

При двух неизвестных имеем одно уравнение и, таким образом, задача является один раз статически неопределимой.

3. Запишем дополнительное уравнение, задающее величину предварительного закручивания (геометрическое условие)

$$\Delta\varphi = \theta, \qquad (6.8)$$

где $\Delta\varphi$ - полный угол закручивания стержня, рад .

Закон Гука при кручении стержня имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_\rho}, \qquad (6.9)$$

где φ - угол закручивания сечения относительно первоначального (ненагруженного) состояния, рад; M_x - крутящий момент в сечении стержня, Н·м.

Преобразуем уравнение (6.8) с учетом закона деформации (6.9), тогда дополнительное уравнение для раскрытия статической неопределимости будет иметь вид (физическое соотношение)

$$\int_0^{2l} \frac{M_x(x)}{GJ_\rho} dx = \theta \qquad (6.10)$$

Запишем выражение крутящего момента для обоих участков стержня

$$M_x(x) = \begin{cases} M_1, \ x \in (0, l), \\ -M_2, \ x \in (l, 2l). \end{cases} \qquad (6.11)$$

Подставив выражение в уравнение (6.10) и выполнив интегрирование, получим дополнительное уравнение для раскрытия статической неопределимости

$$\frac{l}{GJ_\rho} M_1 - \frac{l}{GJ_\rho} M_2 = \theta,$$

которое после подстановки числовых значений будет иметь вид

$$M_1 - M_2 = 175. \qquad (6.12)$$

4. Неизвестные реакции опор найдем из системы двух уравнений (6.7) и (6.12)

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = 100, \\ M_1 - M_2 = 175, \end{cases}$$

тогда $M_1 = 137{,}5$ Н·м; $M_2 = -37{,}5$ Н·м.

5. Значение крутящего момента из формулы (6.11) будет равно

$$M_x(x) = \begin{cases} -137{,}5 \text{ Н·м}, \ x \in (0, 0{,}5), \\ 37{,}5 \text{ Н·м}, \ x \in (0{,}5\,1{,}0). \end{cases}.$$

1. Задача 1. Анализ напряженно-деформированного состояния стержня с учетом собственного веса при деформации растяжения (сжатия)

Задание.

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Определить реакции связей опоры.
4. Используя метод сечений, записать уравнения внутреннего усилия N на каждом грузовом участке.
5. Записать уравнения для определения нормального напряжения σ_x на каждом грузовом участке.
6. Записать уравнения для определения перемещения u на каждом грузовом участке.
7. Построить эпюры N, σ_x, u.
8. Определить положение опасного сечения.
9. Определить нормальное и касательное напряжения на площадке, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с осью стержня в опасном сечении.

Варианты заданий приведены в табл.1 и 2.

Таблица 1. Параметры расчетной схемы

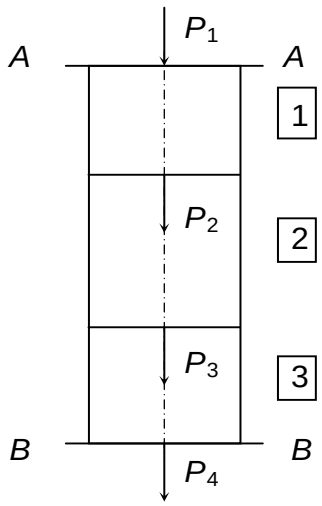
№ вари-анта	Расчетная схема	Длины участков L_i, м			Опора в сечении	
		L_1	L_2	L_3	*A-A*	*B-B*
1		0,5	0,4	0,3	Есть	Нет
2		0,6	0,7	0,8	Есть	Нет
3		0,8	0,8	0,6	Есть	Нет
4		0,4	0,3	0,2	Есть	Нет
5		0,3	0,4	0,2	Есть	Нет
6		0,5	0,3	0,5	Есть	Нет
7		0,2	0,3	0,2	Нет	Есть
8		0,4	0,3	0,4	Нет	Есть
9		0,3	0,5	0,4	Нет	Есть
10		0,2	0,4	0,3	Нет	Есть
11		0,5	0,6	0,5	Нет	Есть
12		0,3	0,3	0,3	Нет	Есть
13		0,2	0,3	0,4	Есть	Нет
14		0,3	0,4	0,4	Есть	Нет
15		0,2	0,4	0,25	Есть	Нет
16		0,3	0,3	0,5	Нет	Есть
17		0,2	0,3	0,5	Нет	Есть
18		0,4	0,3	0,3	Нет	Есть
19		0,5	0,4	0,2	Есть	Нет
20		0,5	0,3	0,2	Есть	Нет
21		0,6	0,4	0,2	Есть	Нет
22		0,7	0,4	0,3	Есть	Нет
23		0,3	0,4	0,3	Нет	Есть
24		0,2	0,3	0,4	Нет	Есть
25		0,3	0,6	0,3	Нет	Есть
26		0,4	0,4	0,5	Нет	Есть
27		0,8	0,5	0,3	Есть	Нет
28		0,7	0,7	0,7	Есть	Нет
29		0,5	0,4	0,7	Есть	Нет
30		0,2	0,2	0,5	Есть	Нет

Таблица 2. Внешние нагрузки

№ вари-анта	Значение внешней силы P_i, Н				Площадь сечения участка F_i, см^2		
	P_1	P_2	P_3	P_4	F_1	F_2	F_3
1	0	100	-150	200	5	3	4
2	0	200	-300	400	6	4	3
3	0	-150	300	400	4	6	4
4	0	300	-600	400	6	5	4
5	0	200	100	-500	8	6	4
6	0	700	-400	-600	6	7	8
7	-200	400	500	0	10	12	13
8	300	-600	-200	0	11	10	8
9	400	-200	-500	0	12	10	12
10	400	-700	500	0	10	12	14
11	200	-800	400	0	8	10	12
12	150	-200	600	0	9	7	9
13	0	-400	600	500	6	5	3
14	0	-300	600	300	8	7	5
15	0	-500	1000	200	9	6	4
16	-300	-200	800	0	10	10	14
17	-200	-200	600	0	12	8	10
18	-300	-100	500	0	14	10	12
19	0	200	-400	300	5	4	5
20	0	300	200	-300	6	3	5
21	0	250	150	-200	3	4	5
22	0	-200	400	100	7	5	4
23	500	-300	-400	0	6	4	3
24	350	-250	250	0	5	4	3
25	250	100	-500	0	4	5	4
26	0	200	400	0	4	3	4
27	0	300	-200	250	3	5	4
28	0	-500	-200	300	5	4	3
29	0	150	300	-200	4	2	7
30	0	250	250	400	3	5	8

Примечание. Для всех вариантов считать, что стержень изготовлен из стали марки Ст5.

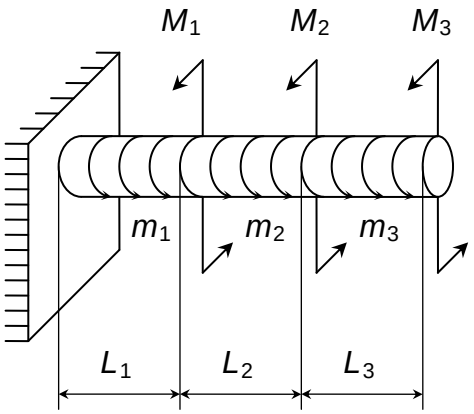
2. Задача 2. Исследование напряженно-деформированного состояния стержня при деформации кручения.

Задание.

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Определить реакцию опоры или неизвестный момент.
4. Используя метод сечения, записать уравнения внутреннего усилия M_x на каждом грузовом участке.
5. Построить эпюру M_x.
6. Определить положение опасного сечения.
7. Подобрать размеры круглого поперечного сечения вала, если $[\tau]$ = 10 МПа.
8. Определить угол закручивания крайнего правого сечения вала, если модуль сдвига G = 80 ГПа.

Варианты заданий приведены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3. Параметры расчетной схемы

№ варианта	Расчетная схема	Длины участков L_i, м		
		L_1	L_2	L_3
1		0,1	0,2	0,2
2		0,2	0,1	0,1
3		0,1	0,1	0,2
4		0,1	0,3	0,1
5		0,2	0,2	0,2
6		0,3	0,1	0,1
7		0,2	0,3	0,2
8		0,3	0,2	0,2
9		0,1	0,2	0,3
10		0,4	0,3	0,2
11		0,2	0,1	0,3

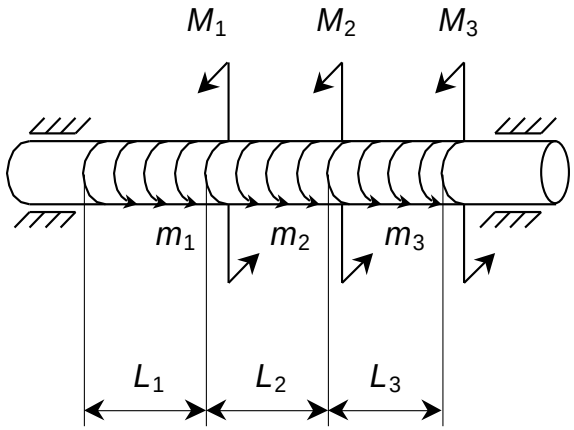
12		0,2	0,3	0,1
13		0,1	0,2	0,2
14		0,2	0,1	0,1
15		0,1	0,1	0,2
16		0,1	0,3	0,1
17		0,3	0,1	0,1
18		0,2	0,3	0,2
19		0,3	0,2	0,2
20		0,1	0,2	0,3
21		0,4	0,3	0,2
22		0,2	0,1	0,3
23		0,2	0,3	0,2
24		0,2	0,2	0,1
25		0,1	0,1	0,4
26		0,1	0,4	0,2
27		0,3	0,2	0,2
28		0,4	0,1	0,2
29		0,2	0,3	0,1
30		0,2	0,1	0,4

Таблица 4. Внешние нагрузки

№ вари-анта	Значение сосредоточенного момента M_i, Н·м			Значение распределенного момента m_i, Н·м		
	M_1	M_2	M_3	m_1	m_2	m_3
1	-8	10	5	0	0	-50
2	0	-15	0	0	100	100
3	-7	6	4	0	0	-40
4	6	0	-2	0	-20	30
5	-4	-4	3	50	0	0
6	0	5	-4	0	-30	0
7	0	4	0	10	-10	10
8	0	-8	6	-40	30	0
9	8	0	0	-40	-40	10

10	-4	5	0	10	0	-10
11	-6	-4	2	0	50	0
12	0	2	1	40	0	0
13	8	4	0	0	40	0
14	5	7	0	20	0	0
15	0	50	0	0	10	0
16	-8	?	5	20	0	-50
17	0	-15	0	20	?	100
18	-7	6	?	20	0	-40
19	?	0	-2	20	-20	30
20	-4	?	3	20	-30	0
21	0	5	-4	10	-10	?
22	0	4	0	?	30	20
23	0	-8	6	-40	?	10
24	?	0	0	-10	0	-10
25	-4	5	?	0	50	20
26	-6	-4	?	40	0	20
27	0	?	1	50	0	20
28	?	70	20	0	0	40
29	0	?	30	10	20	0
30	60	0	?	20	0	0

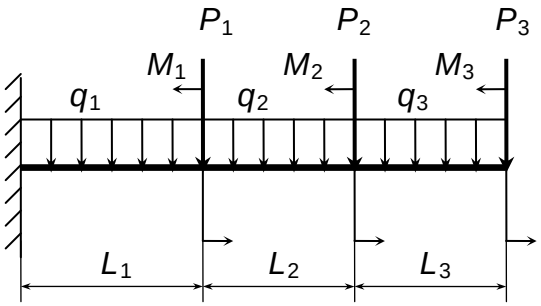
3. Задача 3. Исследование напряженно-деформированного состояния стержня при деформации плоского изгиба

Задание.

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Определить реакции опоры.
4. Используя метод сечений, записать уравнения внутренних усилий Q_z и M_y на каждом грузовом участке.
5. Построить эпюры Q_z и M_y.
6. Определить положение опасного сечения.
7. Подобрать для четных вариантов размеры круглого поперечного сечения стержня, а для нечетных вариантов - прямоугольного поперечного сечения, если h/b = 2. Материал стержня – сталь Ст5.

Варианты заданий приведены в таблицах 5 и 6.

Таблица 5. Параметры расчетной схемы

№ варианта	Расчетная схема	Длины участков L_i, м		
		L_1	L_2	L_3
1		0,1	0,1	0,1
2		0,1	0,1	0,2
3		0,1	0,2	0,2
4		0,2	0,2	0,2
5		0,2	0,1	0,1
6		0,2	0,3	0,1
7		0,3	0,2	0,2
8		0,4	0,2	0,1
9		0,3	0,3	0,2
10		0,2	0,3	0,2
11		0,2	0,2	0,2
12		0,1	0,3	0,15

13		0,4	0,1	0,3
14		0,2	0,1	0,2
15		0,2	0,3	0,1
16		0,4	0,3	0,2
17		0,3	0,2	0,1
18		0,4	0,2	0,2
19		0,3	0,2	0,3
20		0,2	0,2	0,2
21		0,1	0,3	0,1
22		0,1	0,2	0,1
23		0,2	0,2	0,3
24		0,4	0,1	0,2
25		0,1	0,2	0,2
26		0,2	0,2	0,2
27		0,3	0,1	0,2
28		0,3	0,4	0,2
29		0,2	0,4	0,1
30		0,1	0,3	0,3

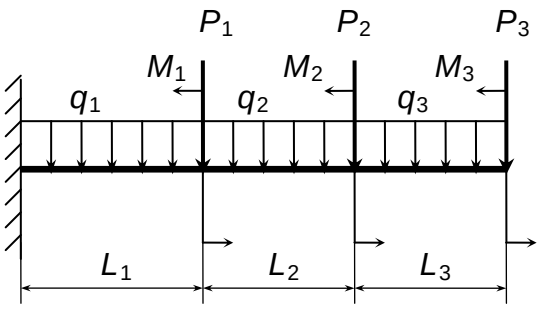


Таблица 6. Внешние нагрузки

№ вари-анта	Сосредоточенные силы P_i, Н			Сосредоточенные моменты M_i, Н·м			Распределенные силы q_i, Н/м		
	P_1	P_2	P_3	M_1	M_2	M_3	q_1	q_2	q_3
1	0	30	10	8	0	0	0	400	-200
2	0	-60	0	-3	0	2	0	300	200
3	-30	0	-10	0	4	0	100	200	0
4	30	0	20	0	-5	4	-120	-100	0
5	40	0	-70	0	7	0	0	500	0
6	-25	0	-30	6	0	4	0	150	200
7	0	-70	-10	5	3	0	400	0	0
8	0	50	30	0	0	3	-100	0	200
9	0	-40	0	4	0	1	0	100	100
10	-50	10	-10	0	0	-1	300	0	0
11	60	0	-40	0	4	0	300	-300	0

12	0	-50	0	-7	0	2	0	0	400
13	20	0	-30	0	2	6	0	0	150
14	0	-60	0	0	0	-3	100	-100	100
15	30	-30	30	5	0	0	100	120	0
16	0	-30	20	0	-6	0	50	0	0
17	-30	0	0	0	0	1,5	140	-90	0
18	0	0	-10	0	-2	0	0	100	-80
19	20	-20	0	0	0	3	-200	300	0
20	0	0	-20	0	0	4	-300	0	200
21	-40	0	-ю-	2	0	.0	200	0	160
22	0	20	0	0	-3	0	0	-130	-120
23	0	0	10	3	0	0	0	0	-110
24	30	20	0	0	-2	0	0	-300	60
25	0	20	10	0	-5	2	100	0	0
26	20	0	10	4	2	0	-200	0	0
27	-10	40	0	0	-5	4	300	0	-100
28	0	-50	30	5	0	0	0	150	100
29	40	0	-30	0	2	5	0	300	0
30	30	0	50	0	4	0	0	200	-200

4. Задача 4. Расчет напряженно-деформированного состояния при деформации растяжения-сжатия (статически неопределимая задача)

Задание.

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Изобразить опорные реакции.
4. Записать уравнение статического равновесия.
5. Записать дополнительное уравнение, используя закон Гука (см. пример 6.1).
6. Раскрыть статическую неопределимость системы, определив опорные реакции.

Варианты заданий приведены в таблице 7, а расчетная схема – на рис. П1. При решении принять модуль нормальной упругости материала стержня E = 200 ГПа.

Таблица 7

№ вар.	P_1, Н	P_2, Н	q_1, Н/м	q_2, Н/м	q_3, Н/м	$L_1 \cdot 10$, м	$L_2 \cdot 10$, м	$L_3 \cdot 10$, м	$F \cdot 10^4$, м^2
1	20	0	200	0	0	2	2	2	3
2	0	30	0	300	0	3	1	1	2
3	10	0	0	0	400	1	3	1	4
4	0	20	100	0	0	1	1	3	5
5	40	0	0	500	0	2	1	3	6
6	-20	0	200	0	0	2	2	2	3
7	0	-30	0	300	0	3	1	1	2
8	-10	0	0	0	400	1	3	1	4
9	0	-20	100	0	0	1	1	3	5
10	-40	0	0	-500	0	2	1	3	6
11	20	0	-200	0	0	2	2	2	3
12	0	30	0	-300	0	3	1	1	2
13	10	0	0	0	-400	1	3	1	4
14	0	20	-100	0	0	1	1	3	5
15	40	0	0	-500	0	2	1	3	6
16	0	20	0	300	0	2	2	2	3
17	30	0	200	0	0	3	1	1	2
18	0	10	0	400	0	1	3	1	4
19	20	0	0	100	0	1	1	3	5
20	0	40	500	0	0	2	1	3	6
21	0	-20	0	300	0	2	2	2	3
22	-30	0	200	0	0	3	1	1	2
23	0	-10	0	400	0	1	3	1	4
24	-20	0	0	100	0	1	1	3	5
25	0	-40	500	0	0	2	1	3	6
26	0	-20	400	0	0	2	2	2	3
27	-30	0	300	0	0	3	1	1	2

28	0	-10	0	200	0	1	3	1	4
29	-20	0	0	100	0	1	1	3	5
30	0	-40	0	0	500	2	1	3	6

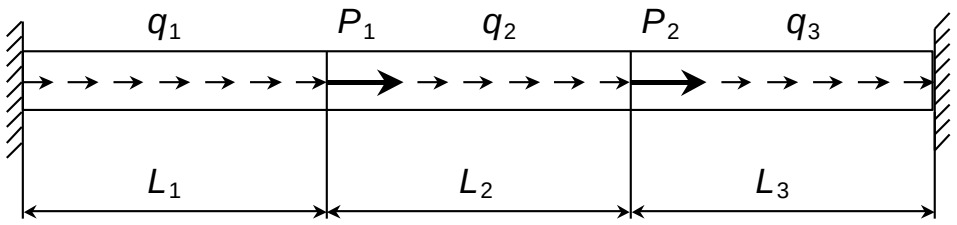


Рис П1.

5. Задача 5. Расчет напряженно-деформированного состояния при деформации кручения (статически неопределимая задача)

Задание.

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.
2. Выбрать систему осей координат.
3. Изобразить опорные реакции.
4. Записать уравнение статического равновесия.
5. Раскрыть статическую неопределимость системы, определив опорные реакции (см. пример 6.2).

Варианты заданий приведены в таблице 8, а расчетная схема – на рис. П2. При решении принять модуль сдвига материала стержня G = 100 ГПа.

Таблица 8

№ вар.	M_1, Н·м	M_2, Н·м	m_1, Н·м/м	m_2, Н·м/м	m_3, Н·м/м	$L_1 \cdot 10$, м	$L_2 \cdot 10$, м	$L_3 \cdot 10$, м	$r \cdot 10^2$, м
1	100	0	0	0	500	2	2	2	1
2	0	100	600	0	0	3	2	2	1,5
3	80	0	0	800	0	2	3	3	1

4	0	80	0	0	400	4	2	2	2
5	60	0	500	0	0	4	1	1	1,5
6	0	60	0	200	0	1	4	4	2
7	40	0	0	0	300	2	4	4	1
8	0	40	700	0	0	3	3	3	2
9	100	0	0	0	500	3	2	2	1,5
10	0	100	-600	0	0	2	3	3	1
11	80	0	0	-800	0	2	3	3	1
12	0	80	0	0	-400	4	2	2	2
13	60	0	-500	0	0	4	1	1	1,5
14	0	60	0	-200	0	1	4	4	2
15	40	0	0	0	-300	2	4	4	1
16	0	40	-700	0	0	2	2	2	1
17	100	0	0	0	-500	3	2	2	1,5
18	0	-100	600	0	0	2	3	3	1
19	80	0	0	-800	0	4	2	2	2
20	0	-80	0	0	400	4	1	1	1,5
21	-60	0	-500	0	0	1	4	4	2
22	0	60	0	-200	0	2	4	4	1
23	40	0	0	0	-300	3	3	3	2
24	0	-40	700	0	0	3	2	2	1,5
25	300	0	0	0	500	2	3	3	1
26	0	400	-600	0	0	2	2	2	1
27	80	0	30	-800	0	3	2	2	1,5
28	0	100	0	0	400	2	3	3	1
29	110	0	400	0	0	4	2	2	2
30	20	70	0	-300	0	4	1	1	1,5

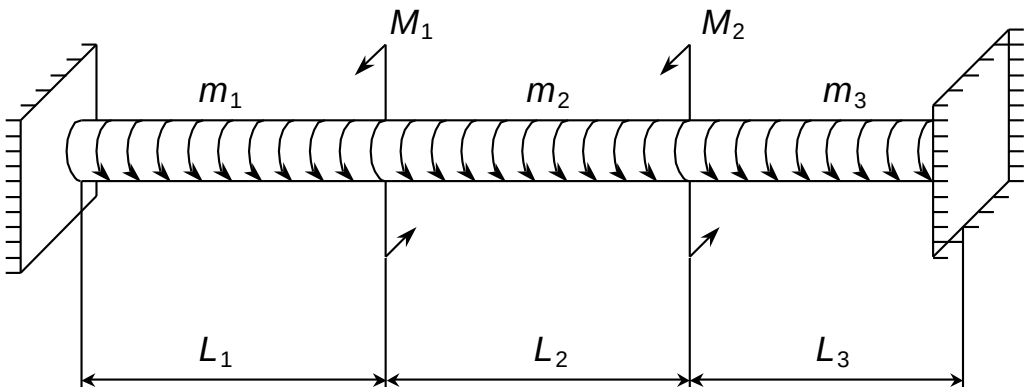


Рис П2.

6. Задача 6. Расчет напряженно-деформированного состояния при деформации плоского поперечного изгиба (статически неопределимая задача)

1. Зарисовать в выбранном масштабе схему в соответствии с заданием.

2. Выбрать систему осей координат.

3. Изобразить опорные реакции.

4. Записать уравнения статического равновесия.

5. Отбросив "лишнюю" опорную реакцию в подвижном шарнире (рис. П3), записать уравнение для перемещения правого конца стержня.

6. Определить перемещение правого конца стержня в случае, когда к нему приложена только "лишняя" опорная реакция.

7. Записать дополнительное уравнение, приравняв полученные перемещения.

8. Раскрыть статическую неопределимость системы, решая совместно уравнения статики и уравнение перемещений.

Варианты заданий приведены в таблице 9, а расчетная схема – на рис. П3. При решении принять модуль нормальной упругости материала стержня E = 200 ГПа.

Таблица № 9

№ вар.	P, Н	M_1, Н·м	M_2, Н·м	q_1, Н/м	q_2, Н/м	$L_1 \cdot 10$, м	$L_2 \cdot 10$, м
1	50	0	3	200	0	1	1
2	30	4	0	400	0	1	2
3	60	0	5	0	300	2	4
4	0	4	8	0	500	2	2
5	-50	0	5	200	0	1	1
6	-30	6	0	0	300	1	2
7	-30	0	0	3	1	1	2
8	0	6	0	200	0	2	1
9	20	5	100	100	200	1	1
10	-50	10	0	0	400	1	2
11	0	3	-5	200	0	2	4
12	50	0	-4	0	-100	2	2
13	-30	-3	0	-200	0	1	1
14	40	0	-2	0	300	1	2
15	-80	-6	0	400	0	1	2
16	60	0	-8	0	500	2	1
17	40	-4	0	200	0	1	1
18	20	0	6	0	100	1	2
19	-40	5	0	-300	0	2	4
20	0	-3	4	0	-200	2	2
21	40	0	2	-100	0	1	1
22	-40	-2	0	0	500	1	2
23	50	0	6	-500	0	1	2
24	60	-6	0	0	300	2	1
25	-50	0	5	200	0	1	1
26	0	4	-4	0	100	1	2
27	50	0	6	-300	0	2	4
28	30	-3	0	0	-200	2	2
29	-30	0	2	100	0	1	1
30	60	5	0	0	-400	1	2

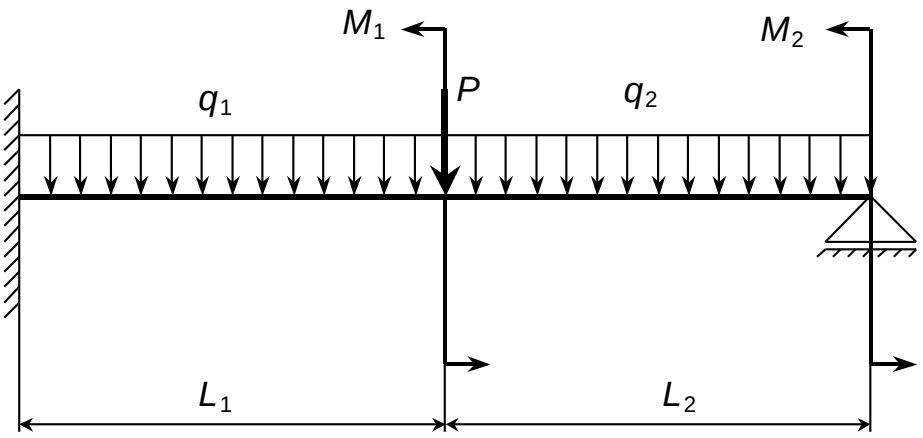


Рис. П3.

7. Механические характеристики материалов.

В таблице 10 приведены механические характеристики стекол, в таблице 11 – металлов и сплавов, в таблице 12 – припоев.

В таблицах приняты следующие сокращения:

ρ – плотность материала;

α – температурный коэффициент линейного расширения материала;

σ_T – предел текучести материала;

[σ] – предельно допустимое нормальное напряжение;

[т] – предельно допустимое касательное напряжение;

σ_B^+ - временное сопротивление материала при растяжении;

σ_B^- - временное сопротивление материала при сжатии;

E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга) материала;

v – коэффициент Пуассона.

Таблица 10. Механические характеристики стекол

№ п/п	Материал	ρ, г/см^3	α·10^6	σ_B^+	σ_B^-	$E\cdot10^{-5}$	v
				МПа			
1	Молибденовое		4,1	60	600	0,5	0,25
2	Электровакуум-		5,2			0,66	0,22

	ное						
3	С48-1	2,1	4,85	77	700	0,58	0,3
4	С48-2	2,3	4,8	20	300	0,58	0,29
5	С49-2	2,29	4,9	40	400	0,58	0,28
6	Кварцевое	2,21	0,6	40	500	0,75	0,26

Таблица 11. Механические характеристики металлов и сплавов

№ п/п	Материал	ρ, г/см^3	α·10^6	$\sigma_т$	[σ]	$\sigma_в^+$	$\sigma_в^-$	E·10^{-5}	ν
				МПа					
1	Медь М1(М2,М3)	8,96	16,5	380	100	400		1,2	0,35
2	Ковар 29НК	8,35	5,0	350	200	600		1,42	0,32
3	Никель НП-2	8,9	13	650		700		2,1	0,3
4	Сталь 10	7,86	11,9	250	130	400		2,1	0,28
5	Сталь Ст5	7,8	12,9	290	120			2,1	0,27
6	Сталь ЭИ-693	8,1	12	500				2,0	0,30
7	Сталь 47 НД	~ 8	9,5	500				2,0	0,3
8	Латунь Л68 (ЛС59-1)	8,4	18	160		400		0,9	0,4
9	Молибден МО	10,2	5,5	590	300	1400		3,2	0,32
10	Вольфрам	19,1	4,4	560		800		4,0	0,17
11	Золото	19,3	14,4			122		0,84	0,38
12	Серебро	10,5	18,9			138		0,77	0,48
13	Платина	21,45	7,8			143		1,47	0,21
14	Свинец	11,36	28,8	<100		180		0,18	
15	Сплав АЛ2 (АЛ4)	2,7	23,8	~100				0,7	0,33
16	Псевдосплав	9	7,0	500				1,9	0,3
17	Ситал АС-336	2,5	3,0				690	0,67	0,25

18	Ситал СТ	7,49	7,6				650	0,77	0,3
19	Кремний	2,33	~ 4			24	68	1,12	0,3
20	Германий	5,33	5,75						

Таблица 12. Механические характеристики припоев

№ п/п	Материал	ρ, г/см^3	α·10^6	$\sigma_т$	[т]	$\sigma_в^+$	E·10^{-5}	ν
				МПа				
1	Окись олова	7,3	23,4	11,7		16	0,42	0,3
2	ПОИ н КС	8,2	29,7		30	23,9	0,3	0,29
3	ПОС-61	8,1	19,0		30 40*	43	0,35	0,29
4	ПСР-72	10	16,1		60	46	0,3	0,3

* – в соединениях с медью.

Список рекомендуемой литературы

1. Бегун П. И., Кормилицын О. П. Прикладная механика: Учеб. СПб.: Политехника, 1995.

2. Бегун П. И., Кормилицын О. П., Мамаева Л. П. Прикладная механика в приборостроении: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПб. Ун-та, 1993.

3. Соляник-Красса К. В. Введение в механику твердого деформированного тела. Л.: Издательство ЛГУ, 1979.

Содержание

Введение
1. Осевая деформация- растяжение(сжатие)
    1.1Определение напряженно-деформированного состояния при растяжении (сжатии)
    1.2. Ограничения на применение формулы для определения нормального напряжения
2. Деформация кручения
3. Деформация плоского поперечного изгиба
    3.1. Определение напряженно-деформированного состояния
    3.2. Ограничения на применение формул для определения нормальных и касательных напряжений
4. Расчеты на прочность различных видах деформации
    4.1. Задачи теорий прочности.
    4.2. Классические критерии прочности (теории прочности)
        4.2.1. Критерий наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)
        4.2.2. Критерий наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности)
        4.2.3. Критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)
        4.2.4. Критерий удельной потенциальной энергии
        4.2.5. Механические характеристики материалов
    4.3. Прочностные расчеты при растяжении-сжатии
    4.4. Прочностные расчеты при кручении
    4.5. Прочностные расчеты при плоском поперечном изгибе
5. Методы определения перемещений
    5.1. Определение перемещений по алгоритму метода начальных параметров
    5.2. Определение перемещений с помощью теоремы Кастильяно
6. Простые статически неопределимые задачи
Приложения
Список рекомендуемой литературы