МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

С. В. ВОРОБЬЕВ О. П. КОРМИЛИЦЫН

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПОЛОЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2018

УДК 621.1.011 (07)
ББК Ж12я7
В75

Воробьев С. В., Кормилицын О. П.

В75 Основные понятия, положения и уравнения механики твердого деформированного тела: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 32 с.

ISBN 978-5-7629-2188-6

Рассмотрены фундаментальные понятия механики, даны основные уравнения, которые используются при анализе прочности и жесткости стержневых систем.

Предназначены для использования в курсе прикладной механики студентами технических факультетов дневной и очно-заочной форм обучения.

УДК 621.1.011 (07)
ББК Ж12я7

Рецензент: канд. техн. наук, доцент, ст. науч. сотрудник науч.-исслед. лаборатории Прикладной математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого И. В. Штурц.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7629-2188-6 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется механикой. Материальное тело может быть абсолютно твердым, т. е., тело в результате внешнего воздействия не меняет свою форму и размеры, твердое деформируемое тело, жидкое, газообразное, небесное тело. Отсюда и разделы механики: механика абсолютно твердого тела, механика твердого деформируемого тела (прикладная механика), гидро-газодинамика, механика небесных тел.

Прикладная механика изучает деформации, прочность, жесткость, устойчивость твердого тела в результате внешнего воздействия. Под твердым телом в прикладной механике понимается любая конструкция.

Изменение формы и размеров конструкции или ее элементов в результате внешнего воздействия называется деформацией.

Конструкция считается надежной, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при различных внешних воздействиях.

Под прочностью понимают способность конструкции или отдельных ее элементов выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь и не проявляя остаточных деформаций.

Жесткостью называют способность конструкции сопротивляться образованию деформаций, не превышающих допустимых значений.

Устойчивость — это способность конструкции противостоять воздействиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния статического или динамического равновесия.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

1.1. Понятие о внешнем воздействии

При рассмотрении элемента конструкции (в дальнейшем будем называть его телом) изолированно от окружающих тел действие последних на него заменяют внешними силами. Внешняя сила — мера воздействия физических объектов.

По времени действия внешние силы можно разделить на постоянные, действующие все время существования изделия, и временные, действующие лишь в течение некоторого промежутка времени.

По характеру действия они бывают статическими и динамическими. Статические силы сообщают как всему изделию, так и отдельному его элементу малые ускорения, которыми можно пренебречь при исследовании. Динамические силы придают значительные ускорения, которыми пренебрегать не следует.

Если конечное изменение внешней силы и скорости тела, передающего силу, происходит в очень короткий промежуток времени, динамическая сила называется ударной.

Встречаются динамические силы, характеризующиеся периодическими изменениями абсолютного значения в зависимости от времени (в частности, по гармоническому закону). Под влиянием такой силы могут возникать колебания (вибрации) тела.

Внешние силы можно классифицировать еще и по месту их приложения к телу. По этому признаку они подразделяются на объемные и поверхностные.

Объемные силы распределены по всему объему, занятому телом. Единица объемной силы – ньютон на кубический метр (Н/м^3). Рассмотрим некоторое тело (рис. 1.1). Выделим в нем элементарный объем ΔV, на который действует объемная сила $\Delta\overline{G}$. Среднее значение этой силы находим по формуле

$$\overline{g}_{\text{c}} = \Delta\overline{G}/\Delta V .$$

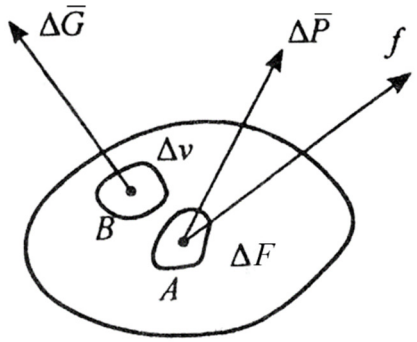


Рис.1.1

Значение объемной силы в окрестности точки тела равно

$$\overline{g} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\overline{G}}{\Delta V}.$$

Объемную силу можно разложить по координатным осям *x, y, z* на составляющие g_x, g_y, g_z.

Поверхностные силы распределены по поверхности. Единица поверхностной силы — ньютон на квадратный метр (Н/м^2). Выделим в некотором теле на его поверхности элементарную площадку ΔF (рис. 1.1). Обозначим через $\Delta\overline{P}$ поверхностную силу, действующую на данной элементарной площадке. Среднее значение поверхностной силы определяется по формуле

$$\overline{p}_c = \frac{\Delta\overline{P}}{\Delta F}\ .$$

Значение поверхностной силы в окрестности точки тела определяет выражение

$$\overline{p} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta\overline{P}}{\Delta F}.$$

Поверхностную силу можно разложить по координатным осям x, y, z на составляющие p_x, p_y, p_z.

Если поверхность соприкосновения очень узкая, то можно считать, что сила распределена по линии – распределенная сила. Единица измерения распределенной силы – ньютон на метр (Н/м).

Если площадка, на которой действует поверхностная сила, мала по сравнению с поверхностью всего тела, то поверхностную силу можно считать сосредоточенной в точке тела. Единица сосредоточенной силы – ньютон (Н).

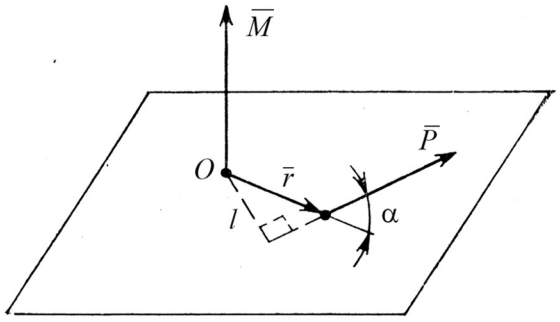
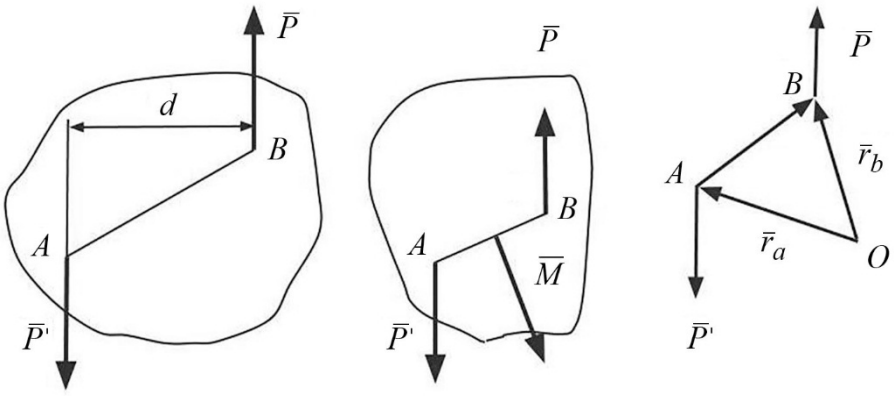


Рис. 1.2

Механическую величину, характеризующую внешнее воздействие на тело и определяющую изменение его вращательного движения, называют *моментом силы*. Относительно полюса (точки O, рис. 1.2) это вектор $\overline{M}_r$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\overline{r}$, проведенного из полюса O в точку приложения силы, на вектор силы $\overline{P}$. Момент силы подсчитывают по формуле $\overline{M} = \overline{P}\,\overline{r}\sin\alpha = \overline{P}l$, где α – угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{P}$; $l = |\overline{r}|\sin\alpha$ – плечо силы, равное расстоянию от точки O до линии действия силы.

Момент силы относительно оси есть скалярная величина, равная проекции вектора момента силы M на ось относительно любой точки O оси (местоположение точки O на оси не влияет на значение момента силы относительно оси). Моменты силы относительно полюса складывают геометрически, а относительно оси – алгебраически. Единица момента силы – ньютонметр (Н · м).

Пара сил, момент пары сил. Парой сил называется система двух сил равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны.



а *б* *в*

Рис. 1.3

Система сил, образующих пару, не находится в равновесии (силы не направлены вдоль одной прямой). Пара сил не имеет равнодействующую, так как для пары сумма сил $\bar{P} + \bar{P}' = 0,$ т. е. $\bar{Q} = 0.$

Действия пары сил на твердое тело сводится к вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой моментом пары.

Расстояние между линиями действия пары – d называется плечом пары. Плоскость, проходящая через линии действия пары, называется плоскостью действия пары. Модуль момента пары равен pd. Момент пары характеризуется модулем, положением в пространстве плоскости действия пары и направлением поворота пары в этой плоскости (рис. 1.3, *а*).

Моментом пары сил называется вектор $\bar{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки (рис. 1.3, *б*).

Заметим: плечо $\bar{P}$ относительно точки A стремится к d, плоскость, проходящая через точку A и силу $\bar{P}$, совпадает с плоскостью пары.

Значит $\bar{M} = \bar{M}_A(\bar{P}) = \overline{AB} \times \bar{P}$ (векторное произведение), но $\bar{M}$, в отличие от момента силы $\bar{P}$ $\bar{M}_A(\bar{P})$, может быть приложен в любой точке (такой вектор называется свободным). Единицы измерения $\bar{M}$ [Н · м].

Докажем, что момент пары есть сумма моментов сил, образующих пару относительно любого центра O (см. рис. 1.3, *в*):

$$\bar{M} = \bar{M}_O(\bar{P}) + \bar{M}_O(\bar{P}'); \quad \bar{r}_A = \overline{OA}, \quad \bar{r}_B = \overline{OB}, \quad \bar{P} = -\bar{P}',$$

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \bar{r}_B \cdot \bar{P}, \quad \bar{M}_O(\bar{P}') = \bar{r}_A \cdot \bar{P}' = -\bar{r}_A \cdot \bar{P}.$$

$\overline{AB} \cdot \bar{P} = \bar{M}$ (показано выше), следовательно $\bar{M}_O(\bar{P}) + \bar{M}_O(\bar{P}') =$

$= (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot \bar{P} = \overline{AB} \cdot \bar{P}.$

Отсюда следует: $\bar{M} = \overline{AB} \cdot \bar{P} = \bar{M}_A(\bar{P})$ или $\bar{M} = \bar{M}_B(\bar{P}')$, т. е. момент пары сил равен моменту одной из сил относительно точки приложения другой силы. Модуль момента пары сил (как показано выше): $M = pd$.

Из равенства следует, что если две пары сил имеют одинаковые моменты, то они эквивалентны, т. е. оказывают на твердое тело одинаковое механическое воздействие; $\bar{M}$ – свободный вектор и на расчетной схеме обозначается просто $\bar{M}$, приложенный в точке (сосредоточенный момент).

Любая система сил, действующая на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\bar{Q}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения, и одной парой с моментом $\bar{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O.

Обозначим проекции главного вектора на координатные оси Q_x, Q_y, Q_z; проекции главного момента на координатные оси M_x, M_y, M_z:

$$Q_x = \sum P_{ix}, \quad Q_y = \sum P_{iy}, \quad Q_z = \sum P_{iz},$$

$$M_x = \sum M_x(\bar{P}_i), \quad M_y = \sum M_y(\bar{P}_i), \quad M_z = \sum M_z(\bar{P}_i).$$

Необходимым и достаточным условием равновесия любой системы сил, а значит и твердого тела, является равенство нулю главного вектора и главного момента $\bar{Q} = 0$, $\bar{M}_O = 0$. $\bar{Q} = 0$, когда $Q_x = Q_y = Q_z = 0$; $\bar{M}_O = 0$, когда

$M_x = M_y = M_z = 0$, т. е. $\sum P_{ix} = 0$, $\sum P_{iy} = 0$, $\sum P_{iz} = 0$, $\sum M_x\left(\overline{P}_i\right) = 0$, $\sum M_y\left(\overline{P}_i\right) = 0$, $\sum M_z\left(\overline{P}_i\right) = 0$.

Это основные уравнения статики – уравнения равновесия твердого тела.

1.2. Силы трения

Силы трения скольжения. При движении тел одного по поверхности другого возникает сила сопротивления, называемая силой трения скольжения.

Законы трения скольжения. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости их соприкосновения возникает сила трения, которая может принимать любые значения от 0 до значения $F_{\text{пр}}$, называемого предельной силой трения. F направлена в сторону, противоположную силам, которые стремятся сдвинуть тело.

Предельная сила трения $F_{\text{пр}} = f_0 N$, где f_0 – статический коэффициент трения (безразмерная величина).

Значения $F_{\text{пр}}$ не зависит в довольно широких пределах от размера сопротивления поверхностей.

Из первых двух законов: $F \le F_{\text{пр}}$ или $F \le f_0 N$.

Сила трения будет равна предельной силе трения лишь тогда, когда действующая на тело сила достигнет такого значения, что при малейшем ее увеличении тело начинает двигаться (скользить). Равновесие, когда сила трения равна предельной силе трения, называется предельным равновесием.

Статический коэффициент трения f_0 для некоторых материалов:

– дерево 0,4...0,7;

– металл 0,15...0,25;

– сталь по льду 0,027.

Все это относится к трению скольжения в покое. При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и $F = f_0 N$, где f_0 – динамический коэффициент трения, определяется сложным путем. f_0 зависит не только от материала и состояния поверхностей, но и от скорости движения тел. В большинстве случаев f_0 сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

Реакция шероховатых связей. Реакция шероховатостей складывается из нормальной силы N и силы трения F, перпендикулярной ей.

На рис. 1.4 $\overline{R}_{\text{пр}}$ – реакция шероховатой связи; $\overline{N}$ – реакция (сила, направленная по нормали к поверхности); $\overline{P}$ – сила, сдвигающая тело; $\overline{F}_{\text{пр}}$ – сила трения; φ_0 – угол между нормалью к поверхности и реакцией $\overline{R}_{\text{пр}}$.

При изменении F от нуля до некоторого предельного значения $\overline{F}_{\text{пр}}$, сила R изменяется от N до $\overline{R}_{\text{пр}}$ (предельное значение реакции), а угол между нормалью и реакцией растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0. φ_0 – угол трения. Из рис.1.4 следует:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = F_{\text{пр}}/N,\ F_{\text{пр}} = f_0 N,\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi_0 = f_0.$$

При равновесии полная реакция R может находиться где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, R будет отклонена от N на φ_0.

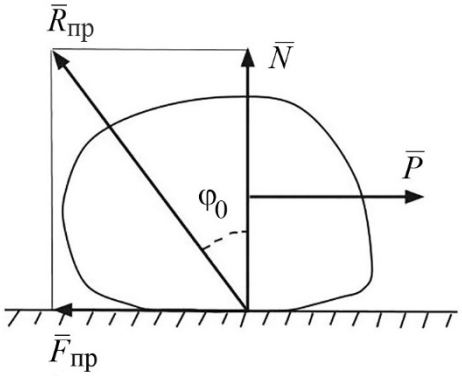


Рис. 1.4

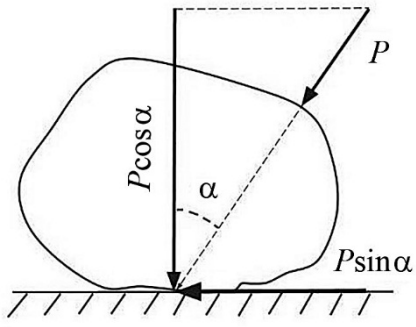


Рис. 1.5

Если к телу приложена сила $\overline{P}$, образующая угол α с нормалью (рис. 1.5), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P\sin\alpha$ будет больше $F_{\text{пр}} = f_0 P\cos\alpha$ (считаем $N = P\cos\alpha$): $P\sin\alpha > f_0 P\cos\alpha$, где $f_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$ (выполняется только при $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi_0$, т. е. при $\alpha > \varphi_0$).

Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности не сдвинуть. Этим объясняется явление заклинивания или самоторможения.

Равновесие тел с учетом сил трения можно свести к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения равна $\overline{F}_{\text{пр}}$.

При решении реакцию шероховатость связи представляют двумя составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F}_{\text{пр}}$. Затем составляют обычные уравнения равновесия и присоединяют к ним $F_{\text{пр}} = f_0 N$. Из полученного уравнения получают искомые величины. Иногда необходимо определять значения F, когда равновесие не является предельным ($F \neq F_{\text{пр}}$). В этом случае F является искомой величиной.

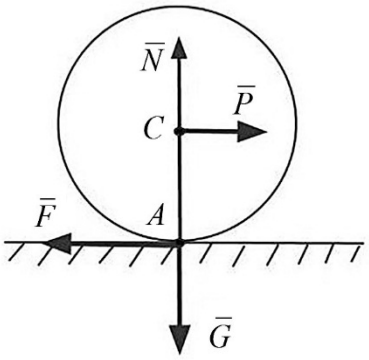


Рис. 1.6

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого (рис. 1.6).

На рис. 1.6 введены обозначения: R – радиус катка; G – вес катка.

Приложим к оси катка силу $\overline{P} < \overline{F}_{\text{пр}}$ (рис.1.6). Тогда в точке A возникает сила трения $\overline{F}$, численно равная $\overline{P}$, которая будет препятствовать движению катка. Если считать $\overline{N}$ (нормальную реакцию) тоже приложенной в точке A, то она уравновешивает силу $\overline{G}$, а силы $\overline{P}$ и $\overline{F}$ образуют пару, вызывающую качение катка. При такой схеме качение должно начаться под действием любой сколь угодно малой силы $\overline{P}$.

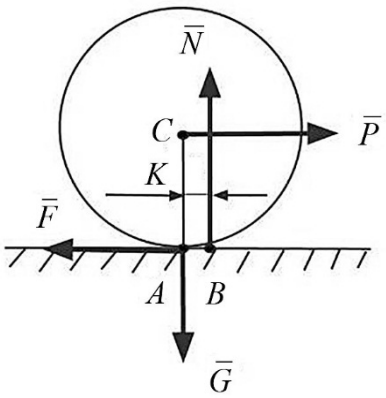


Рис. 1.7

Однако истинная картина, как показывает опыт, иная. Объясняется это тем, что вследствие деформации тел касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 1.7).

Под действием силы $\overline{P}$ интенсивность давления у края A убывает, а у края B возрастает. В результате $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону силы $\overline{P}$. С увеличением $\overline{P}$ это смещение растет до некоторой предельной величины K. Таким образом, в предельном положении на каток будет действовать пара $\overline{P}_{\text{пр}}$ и $\overline{F}$ с моментом $\overline{P}_{\text{пр}} R$, и уравновешивающая пара $\overline{N}$ и $\overline{G}$ с моментом NK. Из равенства моментов находим: $P_{\text{пр}} R = NK$ или $P_{\text{пр}} = N(K/R)$.

Пока $P < P_{\text{пр}}$, каток в покое, при $P > P_{\text{пр}}$ начинается качение. K – коэффициент трения качения – измеряется в сантиметрах, зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Примеры:

- дерево по дереву – K = 0,05...0,08;
- сталь мягкая по стали – K = 0,005;
- сталь закаленная по стали (подшипник) – K = 0,001.

K/R для большинства материалов значительно меньше f_0, поэтому надо стремиться, если возможно, трение скольжения заменять трением качения.

1.3 Внутренние силы. Понятие о напряжениях

Изменение сил взаимодействия между частицами тела вследствие деформации называют внутренними силами, сопровождающими деформацию.

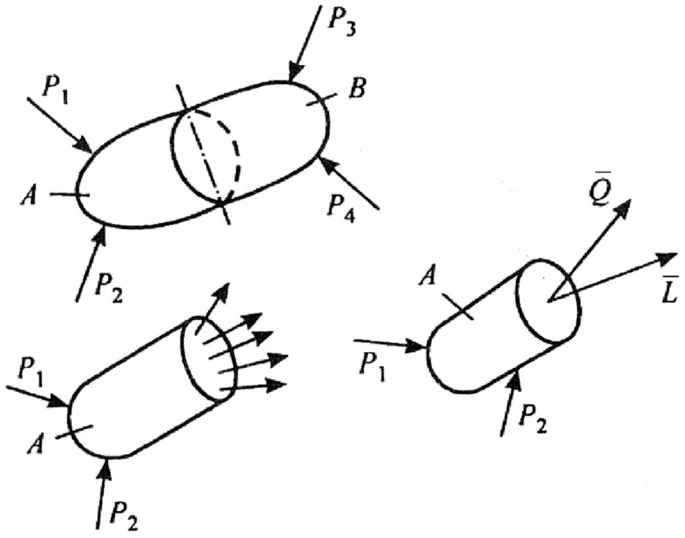


Рис.1.8

В прикладной механике введено допущение, что тело обладает сплошностью. Для выявления и вычисления внутренних сил применяют метод сечений. Рассмотрим произвольное тело (рис. 1.8), нагруженное системой сил. Мысленно рассечем его некоторой плоскостью на две части A и B. В точке с обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия. В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних сил интенсивность внутренних сил в различных точках сечения может быть различна.

В соответствии с третьим законом Ньютона силы, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела A, равны по величине и противо-

положны по направлению внутренним силам, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *B*.

Внутренние силы, действующие в сечении, можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения), в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор внутренних сил $\overline{Q}$ и вектор главного момента внутренних сил $\overline{L}$. Для того чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается напряжение.

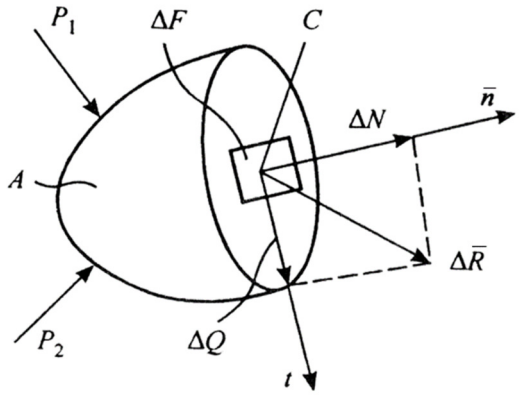


Рис. 1.9

Рассмотрим сечение *A* некоторого тела (рис. 1.9).

В окрестности точки *C* выделим элементарную площадку ΔF ($\overline{n}$ – нормаль к площади сечения). Пусть $\Delta\overline{R}$ – равнодействующая внутренних сил на площадке, тогда

$$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta\overline{R}}{\Delta F}=\overline{\sigma}_n,$$

где $\overline{\sigma}_n$ – полное напряжение в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$, единица напряжения – паскаль (Па).

Как равнодействующую внутренних сил $\Delta\overline{R}$, так и полное напряжение $\overline{\sigma}_n$ можно разложить на составляющие. Равнодействующую внутренних сил разложим на составляющие ΔN, направленную по нормали к площадке, и ΔQ, касательную к площадке. Полное напряжение разложим на нормальное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$

$$\sigma_n=\lim\frac{\Delta N}{\Delta F}$$

и касательное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$ по направлению $\overline{t}$,

$$\tau_{nt}=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta F}.$$

Касательное напряжение имеет два индекса – нормали и касательной к площадке.

Рассмотрим площадку с нормалью $\overline{n}$, взятую в окрестности некоторой точки деформируемого тела (рис. 1.10, *а*).

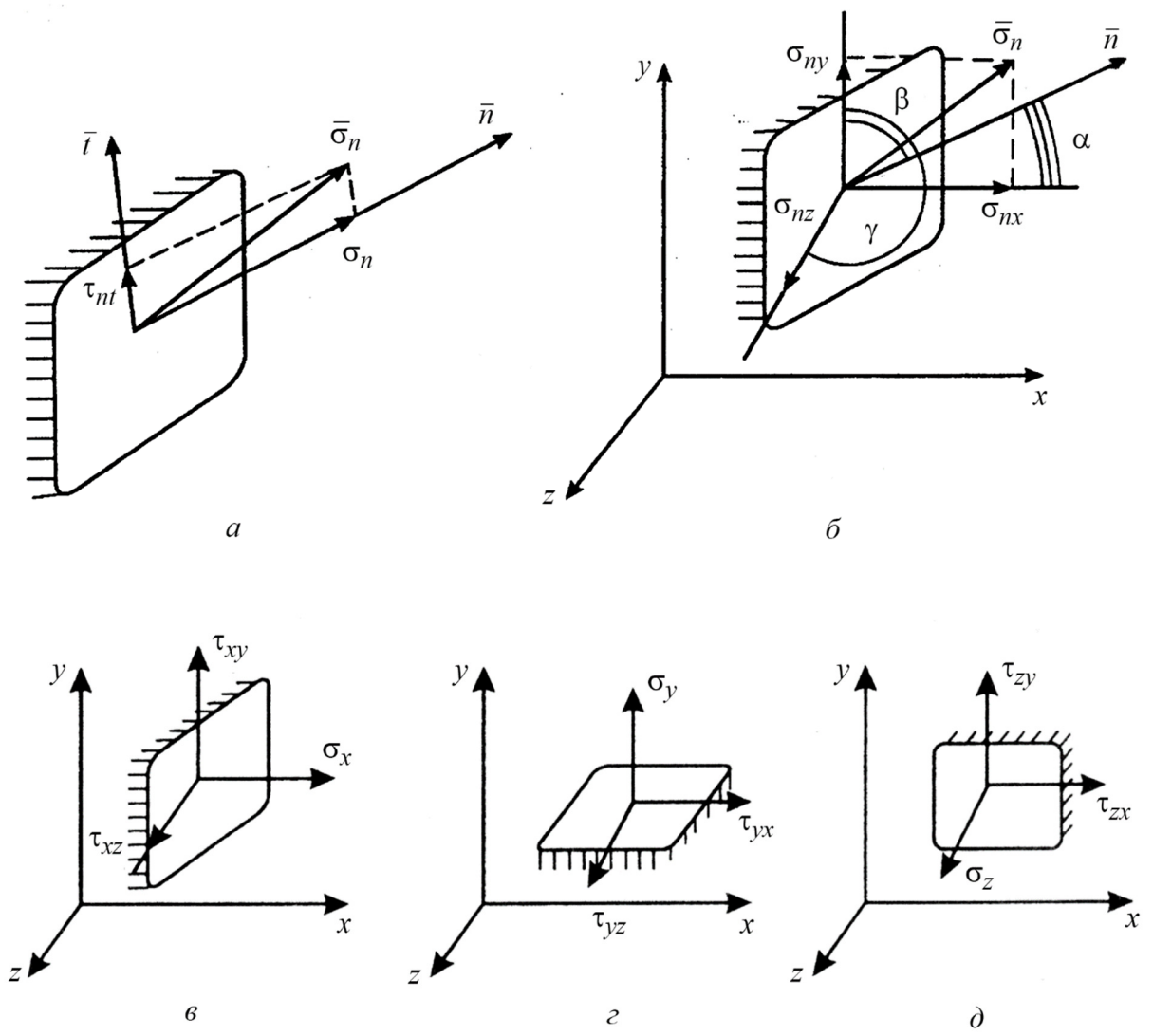


Рис. 1.10

Полное напряжение в общем случае не совпадает с направлением нормали. Его проекции на направление нормали $\bar{n}$ и касательной обозначим соответственно σ_n и τ_{nt}, тогда

$$\left|\sigma_n\right|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2 .$$

Если известны проекции σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} на координатные оси x, y, z полного напряжения, действующего на площадке (рис. 1.10, *б*), то оно может быть выражено следующим образом:

$$\left|\sigma_n\right|^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 .$$

Если нормаль к площадке составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ, то нормальную составляющую напряжений σ_n можно найти через проекции полного напряжения на координатные оси x, y, z (рис. 1.10, *а*),

$$\sigma_n = \sigma_{nx}\cos\alpha + \sigma_{ny}\cos\beta + \sigma_{nz}\cos\gamma .$$

При повороте площадки напряжение изменяется.

Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через эту точку (рис. 1.10, *в–г*).

На рис. 1.10, *в* площадка перпендикулярна к оси *x*. Нормальное напряжение σ_x на этой площадке параллельно оси *x,* а касательные τ_{xy}, τ_{xz} – параллельны осям *y* и *z* соответственно.

На рис. 1.10, *г* площадка перпендикулярна к оси *y*. Нормальное напряжение σ_y здесь параллельно оси *y,* а касательные τ_{yx}, τ_{yz} осям *x*, *z*.

На рис. 1.10, *д* площадка перпендикулярна оси *z*. Нормальное напряжение σ_z здесь параллельно оси *z,* а касательные τ_{zx}, τ_{zy} осям *x*, *y*.

Девять напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy} – составляющие полных напряжений, действующих на трех ортогональных площадках, которые проходят в окрестности некоторой точки твердого деформированного тела.

Если внешняя нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси координат, то положительные составляющие напряжений направлены в положительную сторону осей координат. Если внешняя нормаль к сечению направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси координат, то положительные составляющие напряжений направлены в стороны, противоположные соответствующим направлениям осей координат.

Напряженное состояние в окрестности тела характеризуется девятью составляющими напряжений, которые обычно записывают в виде *тензора напряжений*

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

и называют *компонентами тензора напряжений*.

Тензор – это форма записи, выражающая линейное преобразование трехмерного пространства в некоторой системе координат. Число компонент тензора определяет его ранг.

1.4. Перемещения и деформации

Тело под воздействием прикладываемых к нему сил меняет свои форму и размеры – деформируется. При этом изменяется относительное расположение отдельных его частиц, вследствие их перемещения в пространстве.

Если рассматривать абсолютно жесткое тело, как это делается в теоретической механике, то при перемещении точек тела не меняется их взаимное расположение, т. е. тело не деформируется.

Итак, перемещения не всегда сопровождаются деформацией. Однако деформация тела невозможна без перемещений его точек.

Выделим в твердом теле точку A (рис. 1.11, *а*).

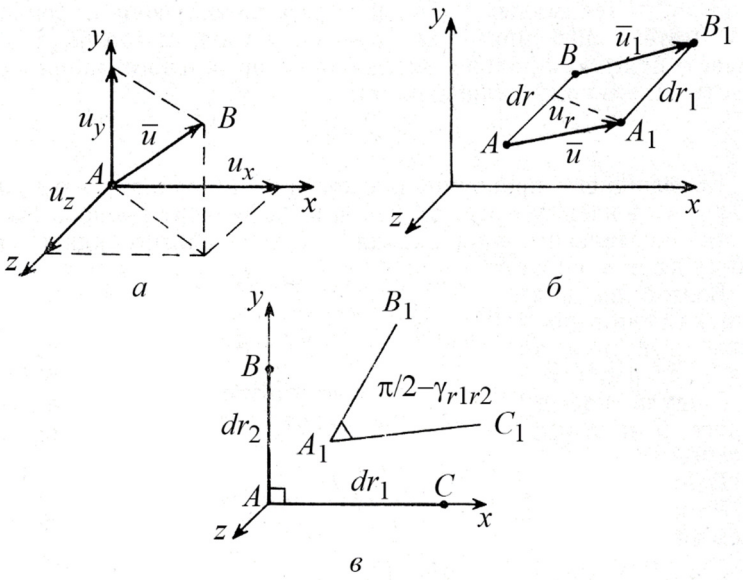


Рис. 1.11

Пусть под действием внешних сил эта точка займет положение B. Отрезок AB называют *вектором полного упругого перемещения* и обозначают $\overline{u}$. Проекции вектора полного упругого перемещения на оси декартовой системы координат x, y, z обозначают соответственно u_x, u_y, u_z и называют составляющими перемещений точки.

Деформация считается упругой, если исчезает после устранения вызвавшей ее силы, и остаточной — в противном случае. Свойство элемента конструкции проявлять упругую деформацию называют упругостью, остаточную деформацию — пластичностью.

Свойства упругости и пластичности являются относительными, а не абсолютными. Например, одна и та же стальная пластина в зависимости от приложенной силы может после сгиба выпрямиться полностью либо полу-

чить прогиб, который полностью не исчезнет после устранения силы. Значит, при малых, деформациях она упруга, а при больших – пластична.

В прикладной механике деформация – количественная мера изменения размеров в окрестности точки. Различают два вида деформации тела: относительное удлинение в окрестности точки и относительный сдвиг.

Относительную линейную деформацию (рис. 1.11, *б*) характеризует величина $\varepsilon_r = \left(d_{r1} - d_r\right)/d_r$ – относительное удлинение в окрестности точки *A* по направлению *r*. Относительное удлинение будем считать положительным, если бесконечно малые отрезки увеличиваются по длине.

Чтобы раскрыть понятие относительной угловой деформации, рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками *AB* и *AC* (рис. 1.11, *в*). После нагружения тела внешними силами этот угол изменяется, принимая значение $\pi/2 - \gamma_{r_1 r_2}$. Величину, равную изменению прямого угла после нагружения между двумя взаимно перпендикулярными направлениями, называют *относительным сдвигом*, *углом сдвига* или просто *сдвигом* и обозначают $\gamma_{r_1 r_2}$. Относительный сдвиг считается положительным, если прямой угол уменьшается.

Относительные линейные и угловые деформации в направлении координатных осей *x*, *y*, *z* обозначают ε_x, ε_y, ε_z, а изменение углов между этими отрезками – $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Величины ε_x, ε_y, ε_z, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ называют составляющими деформации в окрестности точки деформируемого твердого тела. Составляющие деформаций принято записывать в виде *тензора деформации*

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Тензор деформаций полностью характеризует деформацию тела в окрестности точки.

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов справедлив *закон Гука*, который устанавливает прямую пропорциональность нормального напряжения σ_n относительному удлинению ε_n:

$$\sigma_n = E\varepsilon_n.$$

Коэффициент пропорциональности E называют *модулем нормальной упругости*, а коэффициент пропорциональности касательного напряжения и относительного сдвига G – *модулем упругости при сдвиге*.

Взятое по модулю отношение поперечного относительного сжатия тела к продольному относительному удлинению ν в пределах действия закона Гука называют *коэффициентом Пуассона*.

Модуль нормальной упругости E, модуль упругости при сдвиге G и коэффициент Пуассона ν определяются экспериментально.

Величины E и G выражают в паскалях (Па).

Удлинение Δl твердого тела длиной l связано с воздействием температуры соотношением

$$\Delta l = \alpha l T ,$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения.

Если относительное перемещение элементов изделия происходит без деформации, то такую конструкцию называют геометрически изменяемой; если оно имеет место только при деформации элементов – геометрически неизменяемой.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

Уравнения механики деформированного тела выводятся в предположении, что в точке деформированного тела известны составляющие напряжений и деформаций, которые рассмотрены ранее.

Формулы Коши (уравнения равновесия элементарного тетраэдра):

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma; \\ \sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma; \\ \sigma_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{cases}$$

Эти уравнения позволяют определять полные напряжения на произвольной площадке (в произвольном сечении). В левой части уравнений проекции полного напряжения на координатные оси.

Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{cases}$$

Приведенная система уравнений характеризует изменение напряжений при параллельном переносе площадок.

Касательные составляющие напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и противоположны по направлению: $\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{yz} = \tau_{zy};\ \tau_{xz} = \tau_{zx}$ – *парность касательных напряжений*.

С учетом парности касательных напряжений число независимых касательных напряжений сократилось до шести и тензор напряжений становится симметричным: $T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$.

Нормальные и касательные напряжения на площадке, которая лежит в плоскости *XOZ* – основной случай при решении задач прочности и жесткости в дисциплине «Прикладная механика»:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zx}\sin 2\alpha;$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha\,.$$

Главные напряжения, *главные площадки*. В любой точке тела можно найти площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называются *главными*, а нормальные напряжения σ, действующие на них, – *главными напряжениями* (рис. 2.1, *а*). Главные напряжения являются *экстремальными*.

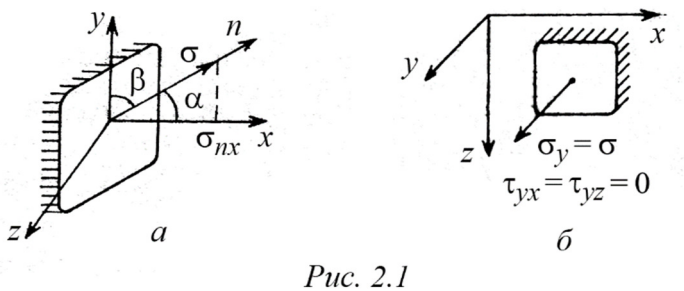


Рис. 2.1

Кубическое уравнение главных напряжений:

$$\sigma^3 - \Theta_{\text{I}}\sigma^2 + \Theta_{\text{II}}\sigma - \Theta_{\text{III}} = 0,$$

где: $\Theta_{\text{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

$$\Theta_{\text{II}} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$\Theta_{\text{III}} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Все корни кубического уравнения являются вещественными и определяют нормальные напряжения, действующие на главных площадках. Их обозначают σ_1, σ_2, σ_3, причем принято считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

В окрестности точки деформированного тела различают напряженное состояние трех видов:

линейное, если только одно из главных напряжений не равно нулю – $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

плоское, когда $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 \neq 0$;

объемное, когда все три главных напряжения отличны от нуля – $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 \neq 0$.

Главные напряжения в частном случае, когда известно положение одной площадки и направление ее нормали совпадает с осью *У* находятся из уравнения: $\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = 0$.

Корни полученного уравнения: $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}\right]$.

Положения главных площадок – главные площадки взаимно перпендикулярны.

Закон Гука для объемного напряженного состояния:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]. \end{cases}$$

Уравнения закона Гука связывают главные деформации с главными напряжениями.

Равенства, связывающие составляющие деформаций и напряжений, имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Полученная форма записи закона Гука применяется при определении составляющих деформаций по известным составляющим напряжений в окрестности точки деформируемого твердого тела.

Модуль нормальной упругости *E,* модуль упругости при сдвиге *G* и коэффициент Пуассона ν определяют экспериментально.

Величины *E* и *G* выражают в паскалях (Па).

3. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПО СТЕРЖНЕВОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Ранее было показано, что внутренние силы, возникающие в сечении твердого деформированного тела, могут быть представлены двумя векторами – главным вектором сил $\bar{Q}$ и главным вектором момента $\bar{L}$, приложенными в центре тяжести сечения. Проецируя силу $\bar{Q}$ и момент $\bar{L}$ на координатные оси *x*, *y*, *z*, получаем три силы – Q_x, Q_y, Q_z, направленные в направлении координатных осей соответственно *x, y, z*, и три момента – M_x, M_y, M_z относительно

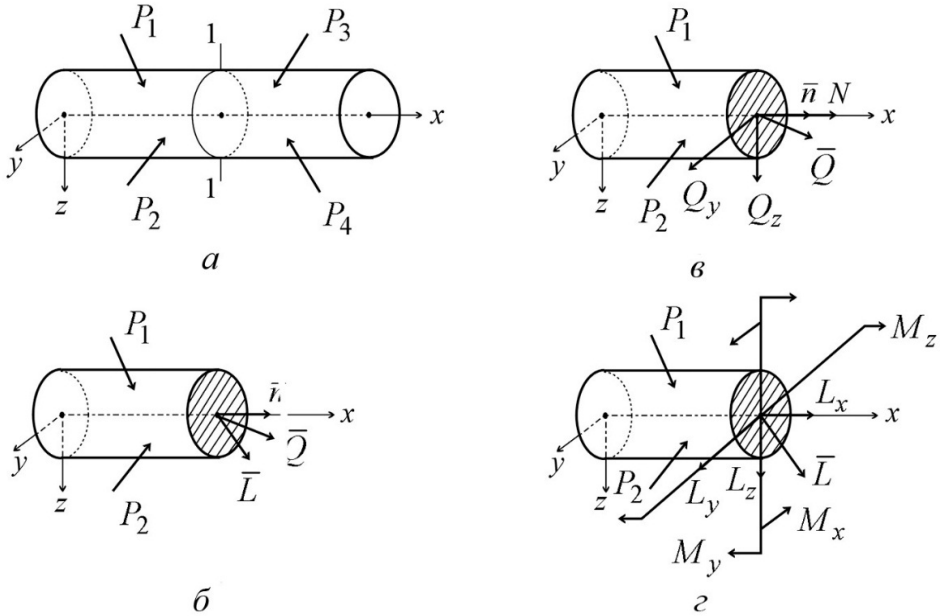


Рис. 3.1

координатных осей. Эти шесть компонентов внутренних сил называются внутренними усилиями.

В сечении стержня, нагруженного пространственной системой сил, возникают внутренние усилия (рис. 3.1, *а*, *б*, *в*, *г*).

Рассмотрим частные случаи деформации стержня.

Растяжение-сжатие – деформация, когда внешние силы действуют вдоль оси стержня. Возникает усилие Q_x, которое обозначают *N* и называют нормальной силой. Эта сила связана с нормальной составляющей напряжения σ_x.

Кручение – деформация, когда моменты пар сил действует относительно оси стержня. При кручении возникает внутреннее усилие M_x – крутящий момент.

Чистый изгиб – деформация, когда моменты пар сил действует перпендикулярно оси стержня. В этом случае возникает внутреннее усилие M_y или M_z, которое называется изгибающим моментом. Изгибающие моменты M_y и M_z вызывают возникновение только напряжения σ_x.

Плоский поперечный изгиб – деформация, когда силы, моменты сил, моменты пар сил действуют перпендикулярно оси стержня. Возникает внутреннее усилие, изгибающий момент и перерезывающая сила (в плоскости *xOz* $M_y \neq 0,\ Q_z \neq 0$, в плоскости *xOy* $M_z \neq 0,\ Q_y \neq 0$); Q_z связана с касательным составляющим напряжения τ_{zx}, Q_y – с τ_{xy}.

Для расчета напряжений при различных деформациях стержня необходимо определить внутренние усилия, возникающие в сечениях стержня и его геометрические характеристики.

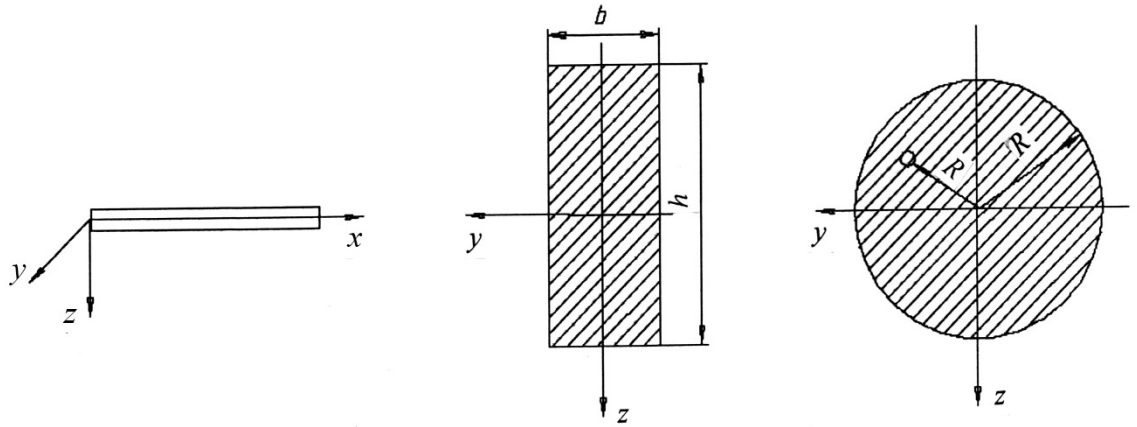
Для наиболее распространенных прямоугольного и круглого сечений (рис. 3.2) *осевые моменты инерции* равны:

$$J_y = \frac{bh^3}{12},\ J_z = \frac{hb^3}{12} -$$

для прямоугольного сечения (рис. 3.2, *б*);

$$J_y = J_z = \frac{\pi R^4}{4} -$$

для круглого сечения (рис. 3.2, *в*).



а *б* *в*

Рис. 3.2

Полярный момент инерции: $J_p = \dfrac{\pi R^4}{2}$.

Момент сопротивления при изгибе: $W_y = \dfrac{J_y}{z_{\max}}$, $W_y = \dfrac{J_z}{y_{\max}}$. Для прямоугольного сечения $W_y = \dfrac{bh^2}{6}$, $W_z = \dfrac{hb^2}{6}$, для круглого сечения $W_y = W_z = \dfrac{\pi R^3}{4}$.

Момент сопротивления кручению $w_k = \dfrac{\pi R^3}{2}$.

Напряжения, возникающие в стержне, нагруженном по торцам (рис. 3.3)**.** Рассматривается стержень призматический, т. е. в любой точке поверхности нормаль к этой поверхности перпендикулярна к оси *x*; угол между осью стержня и нормалью к боковой поверхности $\alpha_n = \pi / 2$. Стержень испытывает совместное растяжение-сжатие, кручение и чистый изгиб, поверхностные силы отсутствуют.

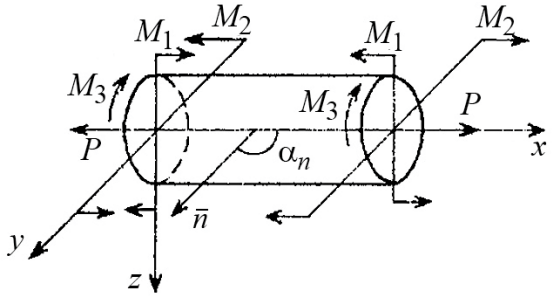


Рис. 3.3

В сечении стержня возникают нормальная составляющая напряжения σ_x и касательные составляющие напряжения τ_{xy} и τ_{xz}:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y,\ \tau_{xy} = -\frac{M_x}{J_p} z;\quad \tau_{xz} = \frac{M_x}{J_p} y,$$

где *x, y, z* координаты точки сечения, в которой определяются напряжения. Это выражение называется *трехчленной формулой*.

Полное касательное напряжение в окрестности точки на площадке с нормалью *x*: $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_x}{J_p}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{M_x}{J_p}\rho$.

Полное касательное напряжение максимально на краях сечения и направлено по касательной к контуру сечения. Представленные выше формулы для расчета касательных напряжений действительны только для эллиптического или круглого сечения.

Нормальные напряжения σ_y, σ_z и касательное напряжение τ_{yz} в стержне, нагруженном по торцам, равны нулю.

Деформация растяжения-сжатия (рис. 3.4, *а*). В сечении стержня возникает только одно составляющее напряжения σ_x. В соответствии с трехчленной формулой нормальное напряжение в этом случае: $\sigma_x = \frac{N}{F}$, где F – площадь поперечного сечения.

Нормальные напряжения в стержне при растяжении-сжатии постоянны в любой точке сечения.

В этом случае в сечении стержня возникает только одна главная площадка и соответственно одно главное напряжение $\sigma_x = \sigma_1$ или $\sigma_x = \sigma_3$, положение главной площадки совпадает с плоскостью сечения. В любой точке сечения реализуется линейное напряженное состояние.

Условие прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_x = N / F \le [\sigma];\ [\sigma] = \sigma_{\text{оп}} / n,\ n > 1,$$

где $[\sigma]$ – допустимое нормальное напряжения для данного материала, $\sigma_{\text{оп}}$ – опасное напряжение, за которое принимается механическая характеристика материала – для пластичного материала принимается предел текучести $\sigma_{\text{т}}$, для хрупкого – $\sigma_{\text{в}}$ (временное сопротивление).

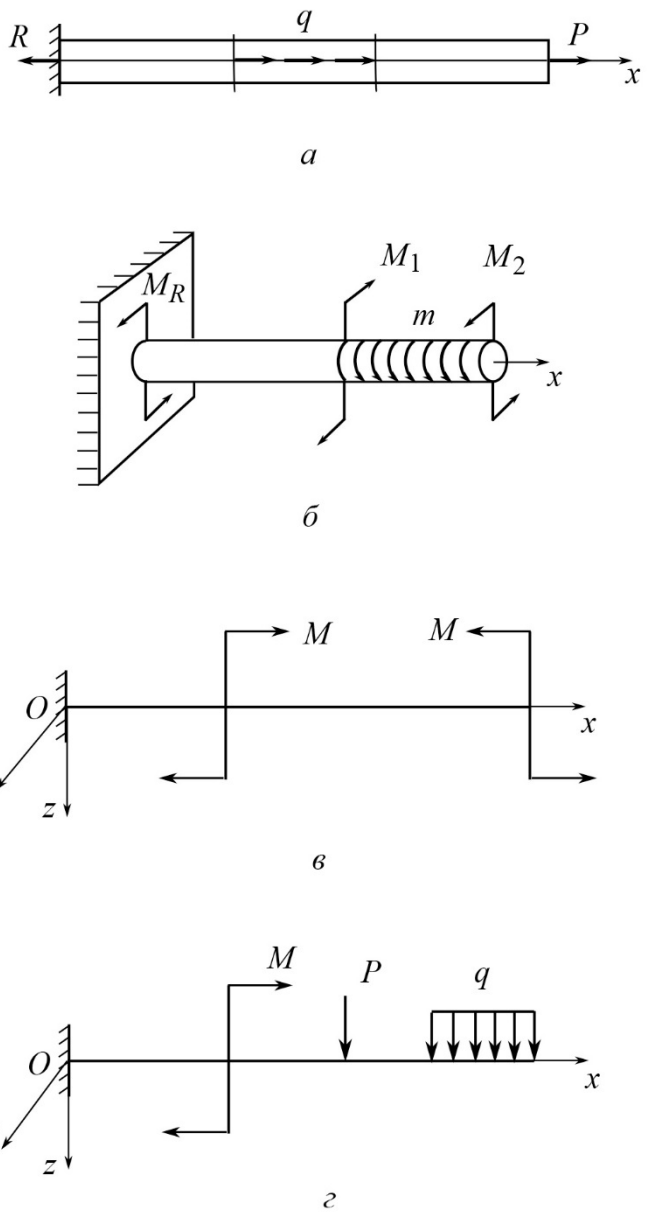


Рис. 3.4

Деформация кручения (рис. 3.4, *б*). В сечении стержня действуют только касательные составляющие напряжений τ_{xy} и τ_{xz}:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{J_p} z; \quad \tau_{xz} = \frac{M_x}{J_p} y.$$

Полное касательное напряжение: $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_x}{J_p}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{M_x}{J_p}\rho.$

Главные напряжения при кручении в соответствии с кубическим уравнением равны: $\sigma_{1,\,3} = \pm\tau_x$; $\sigma_2 = 0$. Значит, в любой точке сечения при кру-

чении возникает плоское напряженное состояние. Положение главных площадок получим, исследуя формулу для определения касательных напряжений на площадке, лежащей в плоскости *xOz*: $\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha$. для нахождения положения главных площадок запишем касательные напряжения через главные напряжения: $\tau_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha; \quad \sin 2\alpha = \frac{2\tau_{nt}}{\sigma_1 - \sigma_3}$.

При кручении $\tau_{nt} = \tau_x$, тогда $\sin 2\alpha = \pm 1$. Следовательно, главные площадки составляют угол 45° с осью стержня.

Чистый изгиб (рис 3.4, *в*). В сечении стержня в этом случае возникает нормальное составляющее напряжения σ_x. В соответствии с трехчленной формулой нормальное напряжение: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$, где z – координата точки сечения, в которой определяют σ_x. Отсюда максимальные нормальные напряжения возникают при $z = z_{\max}$, т. е. на краях сечения, а в центре сечения σ_x равно нулю. Линия, на которой σ_x равно нулю, называется нейтральной, в данном случае это ось *y*. Нейтральная линия разделяет зону сжатия и зону растяжения.

В любой точке сечения стержня при чистом изгибе реализуется линейное напряженное состояние, так как главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в зоне растяжения или $\sigma_3 = -\sigma_x$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ в зоне сжатия. Положение главной площадки совпадает с плоскостью сечения.

Условие прочности при чистом изгибе имеет вид:

$$\sigma_{x\,\max} = \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].$$

Плоскопоперечный изгиб (рис. 3.4, *г*). При деформации плоскопоперечного изгиба в точках сечения стержня возникают нормальные составляющих напряжений σ_x и касательное составляющее напряжений τ_{xz}. Нормальные напряжения при инженерных расчетах можно вычислять, как при чистом изгибе: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$. Для длинных невысоких стержней погрешность в этом случае не превышает 1%. Касательные напряжения вычисляются по *формуле*

Журавского: $\tau_{xz} = \dfrac{Q_z S_y^*}{J_y b_z}$, где $S_y^* = \int\limits_{F^*} z\, dF$ – статический момент отсеченной площадки *F** площади сечения относительно оси *y*; b_z – ширина сечения (см. [1]).

Формула Журавского выведена при следующих допущениях: нормальные напряжения σ_x вычисляются как при чистом изгибе, касательные напряжения τ_{xz} в любой точке на линии, параллельной нейтральной линии (ось *y*) постоянны.

Касательное составляющее напряжения τ_{xz} по высоте стержня изменяется по параболе. На краях сечения они равны нулю, а в центре сечения максимальны. Формула Журавского не дает точного решения. При $h/b = 2$ погрешность вычислений составляет около 3 %.

Зоны действия наибольших σ_x и τ_{xz} не пересекаются, поэтому анализ прочности проводят по максимальным значениям нормальных напряжений.

В крайних точках сечения возникает только одна главная площадка и соответственно одно главное напряжение: $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в зоне растяжения или $\sigma_3 = -\sigma_x$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ в зоне сжатия, т. е. реализуется линейное напряженное состояние, в остальных точках сечения – плоское напряженное состояние. В центре сечения $\sigma_{1,3} = \pm\tau_{xz}$.

Положения главных площадок в крайних точках сечения совпадают с плоскостью сечения, в центре сечения нормали площадок составляют угол 45º с осью стержня. В остальных точках сечения положение одной главной площадки можно определить из уравнения для касательных напряжений, приравняв его нулю, так как на главных площадках касательные напряжения равны нулю: $\tau_{nt} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha = 0$.

Из данного уравнения определяем угол α, т. е. положение одной главной площадки, другая площадка перпендикулярна первой.

4. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ

4.1. Метод начальных параметров

Метод начальных параметров позволяет рассчитывать угловые и линейные перемещения в стержне постоянного сечения, испытывающего деформацию плоско-поперечного изгиба.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M_y}{EJ_y},$$

где u_z – компонента перемещения в направлении оси z (рис. 4.1).

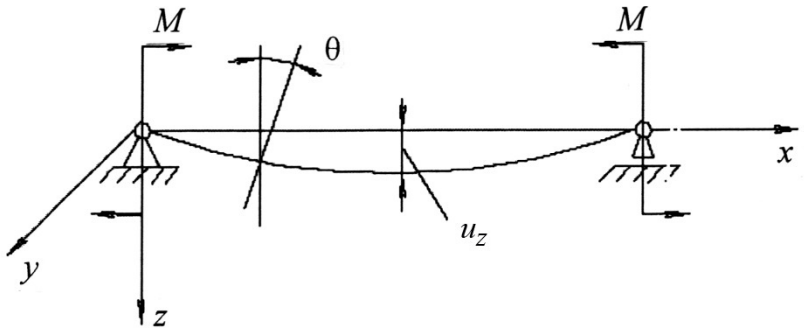


Рис. 4.1

Угол поворота сечения стержня связывается с прогибом зависимостью: $-\frac{du_z}{dx} = \theta$. При этом используется допущение о малости угла θ = tg θ.

Если жесткость поперечного сечения при изгибе EJ_y постоянна по длине стержня, то прогибы оси и углы поворота различных поперечных сечений могут быть получены непосредственным интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси стержня или интегрированием по методу начальных параметров.

Метод начальных параметров удобно использовать при наличии нескольких нагрузок (рис. 4.2), так как при любом числе грузовых участков нужно определить всего две произвольные постоянные интегрирования: прогиб u_{z0} и угол поворота θ_0 в начале координат.

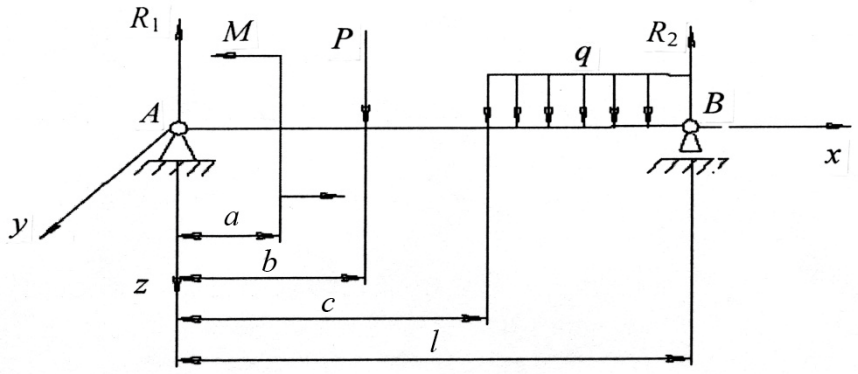


Рис. 4.2

Уравнения метода начальных параметров имеют вид:

$$u'_z = -\theta = u'_{z0} + \frac{\sum\limits_i M_i (x-a)}{EJ_y} + \frac{\sum\limits_j P_j (x-b)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum\limits_k g_k (x-c)^3}{6EJ_y},$$

$$u_z = u_{z0} + u'_{z0} x + \frac{\sum\limits_i M_i (x-a)^2}{2EJ_y} + \frac{\sum\limits_j P_j (x-b)^3}{6EJ_y} + \frac{\sum\limits_k g_k (x-c)^4}{24EJ_y}.$$

При использовании этих уравнений нужно соблюдать следующие условия:

- начало координат помещается в крайнюю левую точку оси стержня;
- интегрирование проводится без раскрытия скобок;
- момент пары сил умножается на расстояние от начала координат до точки приложения момента пары сил в нулевой степени;
- знак «плюс» в уравнениях соответствует положительному направлению сил и моментов;
- a, b, c – расстояния от начала координат до точки приложения соответствующей нагрузки (для распределенной нагрузки – до начала участка, где она действует);
- под знак суммирования включаются только те нагрузки, которые лежат левее рассматриваемого сечения;
- если распределенная нагрузка заканчивается ранее сечения, где определяются прогиб и угол поворота, то она должна быть продолжена до ука-

занного сечения, и при этом следует добавить к ней нагрузку той же интенсивности, но противоположного знака (рис. 4.3, *а*).

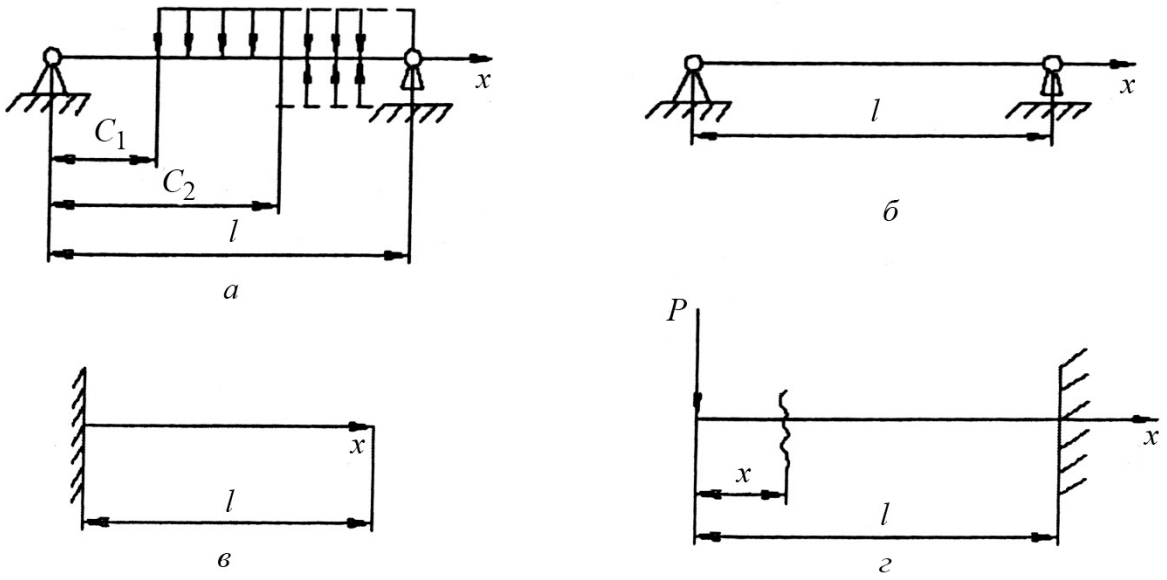


Рис. 4.3

Угол поворота $u'_{z0} = -\theta_0$ и прогиб u_{z0} в начале балки определяются из граничных условий, которые для наиболее распространенных случаев закрепления могут быть записаны следующим образом (рис. 4.3, *б, в, г*):

- при $x = 0$ $u_z = u_{z0} = 0$ и при $x = l$ $u_z = 0$;
- при $x = 0$ $u_z = u_{z0} = 0$ и $u'_z = u'_{z0} = 0$;
- при $x = l$ $u_z = 0$ и $u'_{z0} = 0$.

4.2. Теорема Кастельяно

Теорема Кастельяно формулируется следующим образом: обобщенное перемещение есть частная производная от потенциальной энергии по обобщенной силе. Обобщенная сила P есть любая сосредоточенная сила или сосредоточенный момент (момент пары сил), обобщенное перемещение δ – перемещение в направлении обобщенной силы: $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial P}$, где U – потенциальная энергия твердого тела; P – обобщенная сила; δ – обобщенное перемещение.

С помощью теоремы Кастельяно можно рассчитывать угловые и линейные перемещения в стержне, испытывающем деформации растяжения-сжатия, кручения, изгиба и их совместное действие.

В общем случае для стержня, испытывающего деформации растяжения-сжатия, кручения и изгиба, теорема Кастельяно имеет вид:

$$\delta_i = \int_l \frac{N\dfrac{\partial N}{\partial P_i}}{EF}dx + \int_l \frac{M_x\dfrac{\partial M_x}{\partial P_i}}{GJ_\rho}dx + \int_l \frac{M_y\dfrac{\partial M_y}{\partial P_i}}{EJ_y}dx + \int_l \frac{M_z\dfrac{\partial M_z}{\partial P_i}}{EJ_z}dx +$$

$$+K_z\int_l \frac{Q_z\dfrac{\partial Q_z}{\partial P_i}}{GF}dx + K_y\int_l \frac{Q_y\dfrac{\partial Q_y}{\partial P_i}}{GF}dx\,.$$

Процесс расчета перемещений по данной формуле заключается в составлении уравнений для внутренних усилий по участкам стержня, вычисления производных от них по некоторой обобщенной силе и вычисления интегралов.

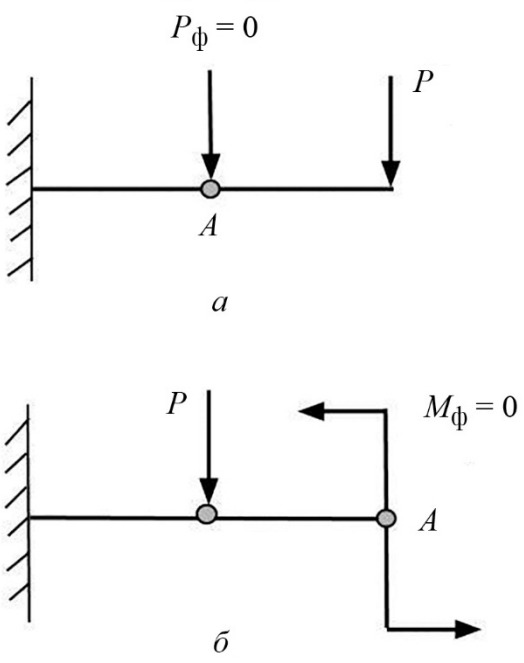


Рис. 4.4

При расчете перемещений в сечениях, где внешняя сила отсутствует (это относится к деформации изгиба), прибегают к искусственному приему дополнения нагрузки: в данном сечении прикладывается фиктивная сила, равная нулю, если определяется линейное перемещение (рис. 4.4, *а*), или фиктивный момент, равный нулю, если определяется угловое перемещение (рис. 4.4, *б*).

4.3. Формула Максвелла–Мора

Формула Максвелла–Мора, как и теорема Кастельяно, позволяет рассчитывать линейные и угловые перемещения при любых видах деформации стержня. Для общего случая нагружения стержня формула Максвелла–Мора имеет вид:

$$\delta_i = \int_l \frac{N\bar{N}}{EF}dx + \int_l \frac{M_x\bar{M}_x}{GJ_\rho}dx + \int_l \frac{M_y\bar{M}_y}{EJ_y}dx + \int_l \frac{M_z\bar{M}_z}{EJ_z}dx +$$

$$+K_z\int_l \frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF}dx + K_y\int_l \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF}dx,$$

где $\bar{N},...,\bar{Q}_z$ – внутренние усилия от единичной силы.

При определении перемещений по формуле Максвелла–Мора необходимо в сечении, где вычисляется перемещение, приложить внешнюю силу $P_{(1)}=1$ или $M_{(1)}=1$ (если определяется угловое перемещение) независимо от того, приложены в этом сечении какие-либо внешние силы или нет.

Список литературы

1. Бегун П. И., Кормилицын О. П. Прикладная механика: учеб. СПб.: Политехника, 2006. 464 с.

2. Кормилицын О. П. Прочность конструкций электронной техники: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 128 с.

3. Кормилицын О. П. Механика конструкций приборостроения: электрон. учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 158 с.

4. Воробьев С. В., Кормилицын О. П. Анализ прочности и жесткости стержней: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 32 с.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА.....3
1.1. Понятие о внешнем воздействии 3
1.2. Силы трения 8
1.3 Внутренние силы. Понятие о напряжениях 11
1.4. Перемещения и деформации 15
2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА 17
3. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПО СТЕРЖНЕВОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ 20
4. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ 27
4.1. Метод начальных параметров 27
4.2. Теорема Кастельяно 29
4.3. Формула Максвелла–Мора 31
Список литературы 31

Воробьев Сергей Викторович
Кормилицын Олег Павлович

Основные понятия, положения и уравнения механики твердого деформированного тела

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. Ю. Меньшенина

Подписано в печать . Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 2,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 130 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5