МИНОБРНАУКИ РОСИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ»

Е. А. Лебедева

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2013

УДК 531
ББК Ж12я7

Л33 **Лебедева Е.А.** Механика деформируемого тела: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 104 с.
ISBN 978-5-7629-1276-1

Рассмотрены законы движения твердых тел. Изложены основные разделы курса "Прикладная механика": растяжение-сжатие, кручение, изгиб, теория напряжений, теория деформаций, расчеты на прочность. Освещаются вопросы построения расчетных схем.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлениям 230100, 220100, 280700, 201000, 200100.

УДК 531
ББК Ж12я7

Рецензенты: кафедра Биомеханики НГУ им. П.Ф. Лесгафта, (Санкт-Петербург); канд. техн. наук, доц. Кривохижина О.В. (ГУАП, Санкт-Петербург)

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-1276-1 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013

Введение

Механика – это наука о механическом движении материальных тел и их взаимодействиях (т. е. об изменении с течением времени взаимного положения тел или их частей в пространстве). Поскольку состояние покоя является частным случаем движения, одной из задач механики является изучение равновесия материальных тел.

Движение материальных тел происходит в пространстве и времени. За пространство принимают евклидово трехмерное пространство. В пространстве вводят систему отсчета.

Механика включает в себя три основных раздела: статику, кинематику, динамику. В статике изучаются методы преобразования одних систем в другие, эквивалентные данным, выясняются условия и положения равновесия. В кинематике рассматриваются движение тел без учета силовых взаимодействий. В динамике изучается движение тел с учетом их силового взаимодействия.

В современных условиях информационного и программного обеспечения специалист должен владеть в первую очередь общими законами механики, чтобы грамотно сформулировать задачу и выбрать соответствующую модель. Такой подход при условии освоения общих законов механики деформируемого тела позволяет исключить необходимость перегрузки специалиста конкретными знаниями.

РАЗДЕЛ 1. СТАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ

Тема 1. СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. МОМЕНТЫ СИЛ. ПАРЫ СИЛ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ И ПЛОСКАЯ СИСТЕМЫ СИЛ

1.1. Сила. Система сил

Сила – мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорение или деформироваться. В механике природу сил не изучают, хотя тела могут взаимодействовать непосредственно и через физические поля.

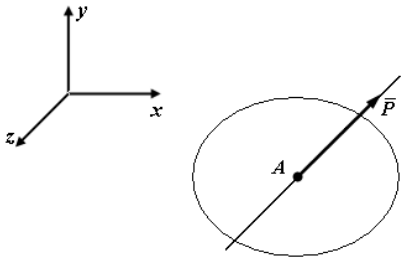


Рис. 1.1

Сила является векторной величиной и характеризуется числовым значением, направлением и точкой приложения. Например, к телу в точке A приложена сила $\bar{P} = P_x\bar{\imath} + P_y\bar{\jmath} + P_z\bar{k}$ (рис. 1.1).

К телу может может быть приложено несколько сил. В этом случае совокупность сил $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)$ называется системой сил.

Если, не нарушая состояния тела, одну систему сил $(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n)$ можно заменить другой $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$ и наоборот, то такие системы сил называются эквивалентными

$$(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n) \sim (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m). \qquad (1.1)$$

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил.

Тело, находящееся в начальный момент в покое, останется пребывать в нем, если на него не действуют никакие силы.

Если тело останется в покое при действии на него системы сил $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)$, то такая система сил называется уравновешенной или системой сил, эквивалентной нулю

$$(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n \sim 0). \qquad (1.2)$$

В этом случае говорят, что тело под действием данной системы сил находится в равновесии.

1.2. Аксиомы статики

В аксиомах статики формулируются общие законы статики, которым подчиняются силы, действующие на одно и тоже тело, или силы, приложенные к взаимодействующим телам.

Аксиома 1 (принцип инерции). Изолированная материальная точка сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения или состояние покоя. Системы отсчета, в которых это условие выполняется, называются инерциальными.

Аксиома 2 (условие равновесия двух сил). Две силы, приложенные к твердому телу, образуют уравновешенную систему тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют вдоль одной прямой и направлены противоположно. Такая система сил эквивалентна нулю.

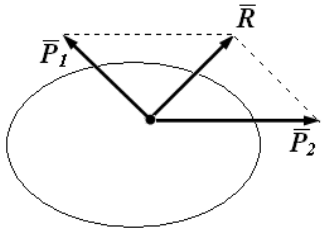


Рис. 1.2

Аксиома 3. Действие данной системы сил на тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие 1. Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку, при этом действие силы на тело не изменится.

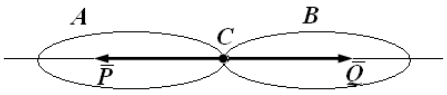


Рис. 1.3

Аксиома 4 (правило параллелограмма). Две приложенные в одной точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.2):

$$(\bar{P}_1,\ \bar{P}_2 \sim \bar{R}) \text{ или } \quad \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R}. \qquad (1.3)$$

Аксиома 5. Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны. Они приложены к разным телам. На рис. 1.3 сила $\bar{P}$ приложена к телу *A*, а сила $\bar{Q}$ – к телу *B* в точке контакта *C*.

Следствие 2. Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, образуют уравновешенную систему, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

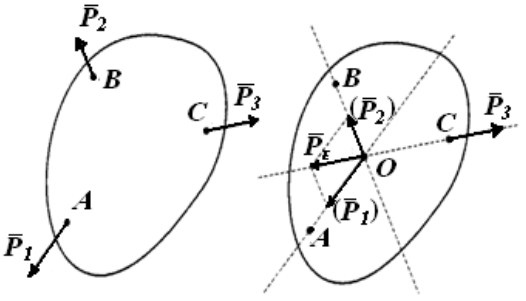


Рис. 1.4

На тело (рис. 1.4) действуют три силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ в точках *A, B, C* соответственно и образуют уравновешенную систему сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3) \sim 0$. По условию линии действия сил лежат в одной плоскости.

Перенесем силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ вдоль линий действия в точку их пересечения *O*. Состояние тела при этом не изменится. Используя правило параллелограмма, найдем равнодействующую первых двух сил $\bar{P}_\Sigma \sim \big((\bar{P}_1), (\bar{P}_2)\big)$. На основании этого $(\bar{P}_\Sigma, \bar{P}_3) \sim 0$. Система двух сил может быть уравновешенной, если эти силы действуют вдоль одной прямой, а это возможно только тогда, когда линия действия силы $\bar{P}_3$ проходит через точку *O*, что и требовалось доказать.

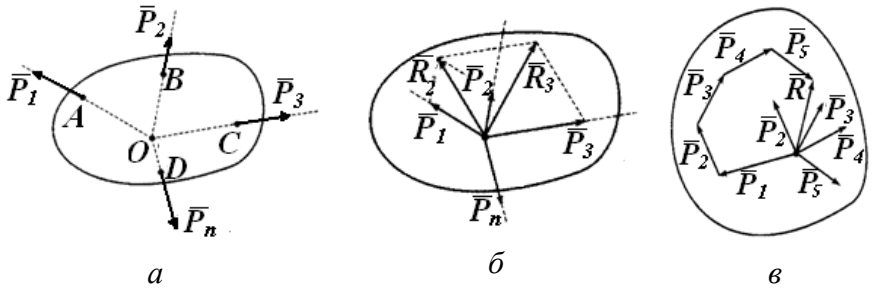
1.3. Система сходящихся сил

Система сходящихся сил – это система, образованная силами, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Докажем, что система сходящихся сил эквивалентна одной силе, которая эквивалентна геометрической сумме всех сил, входящих в систему, и проходит через точку пересечения этих сил. К телу (рис. 1.5, а) приложена система сходящихся сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n) \sim 0$. Перенесем все силы вдоль линий их действия в точку пересечения *O* и получим систему сил, приложенных в одной точке, эквивалентную исходной. Сложив силы (рис. 1.5, *б*), определим их равнодействующую: $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R}_2, \quad \bar{R}_2 + \bar{P}_3 = \bar{R}_3, \; \bar{R}_{n-1} + \bar{P}_n = \bar{R}_n,$ которая эквивалентна системе сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n)$. При этом

$$\bar{R}_n = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \ldots + \bar{P}_n = \bar{R}. \qquad (1.4)$$

Геометрическое суммирование с использованием системы параллелограммов можно заменить построением силового многоугольника (рис. 1.5, *в*). Способ построения силового многоугольника или последовательных параллелограммов называется геометрическим суммированием сил.



а *б* *в*

Рис. 1.5

Наиболее общим является аналитический способ. Для этого в точку пересечения сил сходящейся системы помещают начало системы координат *xyz* и получают скалярные величины:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}\,;\; R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}\,;\; R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}.$$

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил равны суммам соответствующих проекций этих сил. Находим модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \qquad (1.5)$$

Направление равнодействующей определяется косинусами ее углов с осями системы координат (направляющими косинусами):

$$\cos(x, \bar{R}) = \frac{R_x}{R};\; \cos(y, \bar{R}) = \frac{R_y}{R};\; \cos(z, \bar{R}) = \frac{R_z}{R}. \qquad (1.6)$$

Таким образом, система сходящихся сил может быть заменена одной силой, т. е. равнодействующей, которая приложена в точке пересечения сил и равна геометрической сумме исходных сил.

1.4. Равновесие тела под действием системы сходящихся сил

Для равновесия тела необходимо, чтобы система сил, действующих на него, была эквивалентна нулю. Ранее было показано, что $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n) \sim \bar{R}$, поэтому для равновесия тела под действием системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая система сходящихся сил была равна нулю: $\bar{R} = 0$.

Если задача о равновесии тела решается геометрически, то в силовом многоугольнике замыкающий вектор должен быть равен нулю, т. е. конец вектора последней силы должен совпадать с началом вектора первой силы.

Векторное равенство $\bar{R} = 0$ может быть представлено в виде трех скалярных равенств: $R_x = 0;\; R_y = 0;\; R_z = 0$. Принимая во внимание ранее полученные соотношения, имеем аналитические условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\; \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0. \qquad (1.7)$$

Чаще всего заведомо известно, что тело находится в равновесии под действием заданной системы активных сил и связей, а реакции связей являются неизвестными.

В этом случае с помощью уравнений равновесия могут быть определены реакции связей. При этом для системы сходящихся сил может быть записано в самом общем случае три скалярных уравнения равновесия, т. е. число неизвестных параметров реакций связей должно быть не более трех.

Если число параметров, определяющих реакции связей, больше числа уравнений равновесия, то такие задачи называются статически неопределимыми.

1.5. Момент силы относительно точки и оси

Моментом силы относительно какой-либо точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы. Вектор момента направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через эту точку и линию действия силы, в сторону, откуда вращение, совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки. Из определения момента силы следует, что точка приложения вектора момента не влияет на результат его действия.

Математически момент силы относительно точки может быть записан как векторное произведение

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P} \, . \qquad (1.8)$$

На рис. 1.6: A – точка приложения силы $\bar{P}$; O – точка, относительно которой находится момент; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки A относительно точки O.

Модуль векторного произведения идентичен модулю момента силы по определению

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = rP \sin\alpha = Ph \, , \qquad (1.9)$$

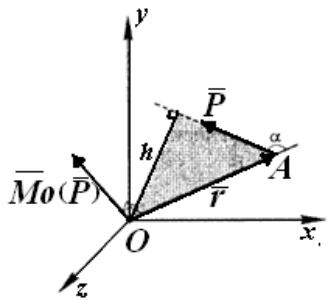


Рис. 1.6

где h – перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы. Направление момента, найденного как векторное произведение, совпадает с направлением момента силы по определению. Таким образом, момент силы относительно точки можно определить через векторное произведение.

В точке O, относительно которой определяется момент, введем систему координат xyz. Пусть точка приложения силы A имеет координаты x, y, z, а сила проекции P_x, P_y, P_z. Тогда

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(yP_z - zP_y\right)\bar{i} + (zP_x - xP_z)\bar{j} + \left(xP_y - yP_x\right)\bar{k}. \qquad (1.10)$$

Отсюда находим проекции вектора момента силы $\bar{P}$ относительно точки *O* на оси *x, y, z*:

$$M_{Ox}(\bar{P}) = \left(yP_z - zP_y\right);\ M_{Oy}(\bar{P}) = (zP_x - xP_z);\ M_{Oz}(\bar{P}) = \left(xP_y - yP_x\right). \qquad (1.11)$$

Момент силы относительно оси находят по правилу: чтобы найти момент силы относительно оси, необходимо найти проекцию этой силы на плоскость, перпендикулярную оси; рассматривая проекцию как вектор, найти ее момент относительно точки пересечения оси с плоскостью.

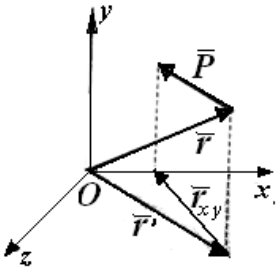


Рис. 1.7

Определим момент силы $\bar{P}$ относительно оси *z* (рис. 1.7). Построим плоскость xy перпендикулярно оси *z*. Проекцию силы $\bar{P}$ на плоскость xy обозначим $\bar{P}_{xy}$. Это вектор, начало и конец которого совпадают с проекциями начала и конца вектора силы $\bar{P}$. Запишем момент силы $\bar{P}$ относительно оси *z:*

$$\bar{M}_z(\bar{P}) = \bar{M}_o\left(\bar{P}_{xy}\right) = \bar{r}' \times \bar{P}_{xy} = \left(xP_y - yP_x\right)\bar{k}. \qquad (1.12)$$

Точно такой же результат получим, если возьмем любую другую плоскость, перпендикулярную оси z.

Подобным образом можно получить и моменты силы $\bar{P}$ относительно осей x и y: $\bar{M}_x(\bar{P}) = \left(yP_z - zP_y\right)\bar{i}$; $\bar{M}_y(\bar{P}) = (zP_x - xP_z)\bar{j}$.

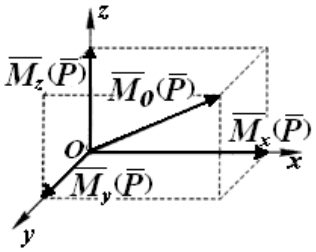


Рис. 1.8

Сравнив полученные выражения с выражениями для момента силы $\bar{P}$ относительно точки *O*, можно записать, что момент силы относительно точки есть сумма моментов этой силы относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проведенных через эту точку (рис. 1.8).

1.6. Момент пары сил

Найдем сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки.

Пусть O – произвольная точка пространства, а $\bar{P}$ и $\bar{P}'$ – силы, составляющие пару $(\overline{P},\ \overline{P'})$ (рис. 1.9). Найдем моменты сил относительной точки O

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = \overline{OA} \times \bar{P},\ \bar{M}_o(\bar{P}') = \overline{OB} \times \bar{P}'.$$

С учетом того, что $\bar{P} = -\bar{P}'$, получим

$$\bar{M}_o(\bar{P}) + \bar{M}_o(\bar{P}') = \overline{OA} \times \bar{P} - \overline{OB} \times \bar{P} = (\overline{OA} - \overline{OB})\bar{P} = \overline{BA} \times \bar{P}. \quad (1.13)$$

Сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой берутся моменты, а векторное произведение $\overline{BA} \times \bar{P}$ называется моментом пары сил

$$\overline{M}(\overline{P},\overline{P'}) = \overline{BA} \times \bar{P} = \overline{AB} \times \bar{P}' = \overline{M}. \quad (1.14)$$

Момент пары представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару) и направленный в ту сторону, откуда вращение пары видно против хода часовой стрелки.

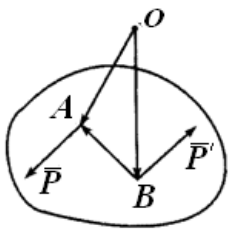


Рис. 1.9

Для того чтобы пара сил составляла уравновешенную систему, необходимо и достаточно, чтобы момент пары равнялся нулю. Это возможно в следующих случаях: $P = 0$ (нет сил), $h = 0$ (силы равны по модулю и действуют вдоль одной линии в противоположные стороны).

Теорема 1 (без доказательства). Две пары, действующие на одно тело и лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.

Теорема 2 (без доказательства). Две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны. Из этой теоремы следует, что пару сил можно перемещать в плоскости, переносить в параллельную плоскость и в паре можно менять силы, составляющие пару, сохраняя момент пары, т. е. изменяя при этом и расстояние между силами.

Теорема 3 (без доказательства). Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.

Момент пары является свободным вектором и полностью характеризует действие на тело пары сил.

Пусть дана система пар, которая произвольным образом расположена в пространстве. Каждая пара имеет момент. На основании первой и третьей

теорем, последовательно заменяя две пары третьей, получаем результирующую пару с моментом. Система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар.

Для того чтобы система пар была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю. Это условие равновесия тела, нагруженного системой пар. Если все пары лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), то все моменты параллельны, и поэтому достаточно записать одно уравнение в проекциях на ось, параллельную моментам (она же перпендикулярна плоскости, в которой лежат пары сил).

1.7. Основная теорема статики

Лемма о параллельном переносе силы: сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в другой точке, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

В основной теореме статики используются два новых понятия. Пусть дана произвольная система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$.

Сумму этих сил

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \qquad (1.15)$$

называют главным вектором системы сил. Сумму моментов сил относительно какой-либо точки (полюса или центра приведения)

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_O\left(\overline{P}_i\right) \qquad (1.16)$$

называют главным моментом системы сил относительно полюса *O*.

Основная теорема статики (теорема Пуансо): всякую пространственную систему сил в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту исходной системы сил относительно выбранного центра приведения. Эту теорему докажем с использованием леммы о параллельном переносе силы.

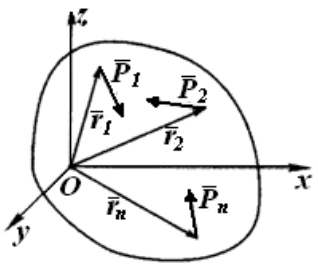


Рис. 1.10

Пусть дана система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$, приложенная к телу. За центр приведения примем

произвольную точку твердого тела O, с которой совместим начало системы координат (рис. 1.10). Последовательно перенесем в точку O все силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \overline{P}_n$. При каждом переносе получаем пару сил. Моменты этих пар равны моментам сил относительно точки:

$$\overline{M}_1 = \overline{r}_1 \times \overline{P}_1 = \overline{M}_O(\overline{P}_1);$$
$$\overline{M}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{P}_2 = \overline{M}_O(\overline{P}_2);$$
$$\overline{M}_n = \overline{r}_n \times \overline{P}_n = \overline{M}_O(\overline{P}_n).$$

В результате переноса сил в точку O получаем систему сходящихся сил, суммируя которые, получим одну силу $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$ (главный вектор) и систему пар, которую можно заменить одной парой с моментом $\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i == \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{P}_i$ (главный момент).

Следует обратить внимание, что при изменении точки приведения сила не изменяется, а момент зависит от выбора центра приведения.

Модули силы $\overline{P}$ и момента $\overline{M}_O$ можно выразить через проекции на координатные оси:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}; M_O = \sqrt{{M_O}_x^2 + {M_O}_y^2 + {M_O}_z^2}. \qquad (1.17)$$

Направление векторов силы $\overline{P}$ и момента $\overline{M}_O$ определяется соотношениями:

$$\cos(x, \bar{P}) = \frac{P_x}{P};\ \cos(y, \bar{P}) = \frac{P_y}{P};\ \cos(z, \bar{P}) = \frac{P_z}{P};$$
$$\cos\left(x, \overline{M}_O\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O};\ \cos(y, \bar{R}) = \frac{M_{Oy}}{M_O};\ \cos(z, \bar{R}) = \frac{{M_O}_z}{M_O}. \qquad (1.18)$$

Поскольку сила $\overline{P}$ равна главному вектору, то при изменении положения точки приведения она не изменяется. Главный момент при изменении центра приведения изменяется на величину, равную моменту главного вектора, приложенного в старом центре приведения, относительно нового центра приведения. Поскольку произвольная система сил в общем случае может быть приведена к силе и паре сил, то на основании этого две произвольные системы сил эквивалентны, если будут иметь одинаковые главные векторы и одинаковые главные моменты относительно одной и той же точки.

1.8. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил и ее частных видов

Необходимо определить условия, при которых система сил будет эквивалента нулю.

Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной пространственной системы сил в общем случае будут $\overline{P}_O = 0,\ \overline{M}_O = 0$, т. е. для равновесия произвольной пространственной системы сил в общем случае необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент были равны нулю. При этом положение точки приведения, т. е. точки, относительно которой определяется главный момент, не имеет значения.

Скалярных условий равновесия (уравнений равновесия) шесть:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0\,; P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$$

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{Ox}\left(\overline{P}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\overline{P}_i\right) = 0; \qquad (1.19)$$

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}\left(\overline{P}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\overline{P}_i\right) = 0;$$

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{Oz}\left(\overline{P}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i\right) = 0$$

Таким образом, при решении задачи о равновесии твердого тела при действии пространственной системы сил имеется возможность определить шесть неизвестных величин.

Рассмотрим уравнения равновесия в частных случаях:

1. Произвольная система пар (см. 1.7).

2. Система пар в параллельных (или одной) плоскостях (см. 1.7).

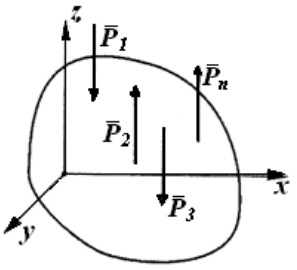


Рис. 1.11

3. Пространственная система сходящихся сил (см. 1.4).

4. Плоская система сходящихся сил (см. 1.4).

5. Система сил, действующих вдоль одной линии. Эту систему сил можно рассматривать как систему сходящихся сил, лежащих на одной линии. Уравнение

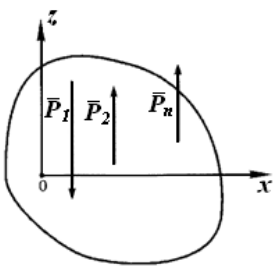


Рис. 1.12

равновесия будет иметь вид $\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$. Ось x не перпендикулярна линии действия сил.

6. Пространственная система параллельных сил. Введем систему координат и ось z направим параллельно силам (рис. 1.11). Проекции всех сил на оси x и y тождественно равны нулю, поэтому не могут служить уравнениями равновесия. Из «силовой» группы уравнений остается одно: $\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$. Главный момент системы параллельных сил независимо от точки приведения обязательно будет параллельным плоскости xy, а это означает, что момент относительно оси z равен нулю. В «моментной» группе уравнений остаются два:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ox}(\overline{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{P}_i) = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\overline{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{P}_i) = 0.$$

Для пространственной системы параллельных сил можно записать три уравнения равновесия.

7. Плоская система параллельных сил (рис. 1.12).

Направим ось z системы координат параллельно линиям действия сил. По сравнению с п. 6 еще одно уравнение из "моментной" группы выполняется тождественно: $M_{Ox} = 0$, так как моменты всех сил перпендикулярны плоскости xz, в которой лежат все силы. Уравнений равновесия остается два:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} M_{Oy}(\overline{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{P}_i) = 0.$$

8. Произвольная плоская система сил (рис. 1.13). $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ в соответствии с основной теоремой статики может быть заменена в общем случае одной силой и одной парой сил: $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$; $\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{P}_i)$. В этом случае главный вектор всегда будет лежать в плоскости сил, а главный момент всегда будет перпендикулярным плоскости, в которой лежат силы.

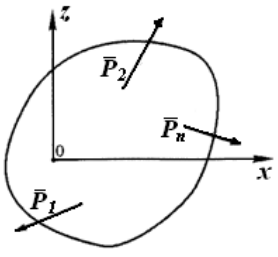


Рис. 1.13

Но если главный вектор плоской системы сил не равен нулю, то данная система сил эквивалентна одной силе, т. е. приводится к равнодействующей.

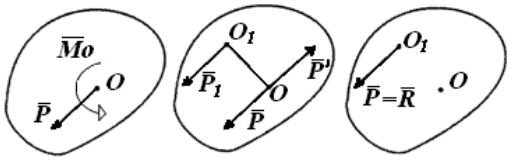


Рис. 1.14

Пусть для выбранного центра приведения $\overline{P}_O \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ (рис. 1.14). Пару сил с моментом $\overline{M}_O$ представим в виде

пары сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_1{}')$, равных по модулю главному вектору $P_1 = P_1' = P$. Плечо из условия $M_O = P_1 h$. Одну из сил пары $\bar{P}_1{}'$ приложим в точке O и направим в сторону, противоположную главному вектору. Тогда система сил $(\overline{P}, \bar{P}_1{}')$ эквивалентна нулю и может быть отброшена. Следовательно, заданная система сил эквивалентна одной силе $\overline{R} = \bar{P}_1{}'$.

1.9. Центр параллельных сил

Рассмотрим систему параллельных сил, которые приводятся к равнодействующей. Условием такого приведения является неравенство нулю главного вектора $\overline{P}_O \neq 0$. Выясним, что происходит с равнодействующей $\overline{R}$ системы параллельных сил при одновременном повороте всех сил системы на один и тот же угол относительно параллельных осей, проходящих через точки приложения сил. Равнодействующая $\overline{R}$ повернется на тот же угол. Необходимо выяснить положение точки на линии действия равнодействующей, относительно которой она повернется.

Пусть для системы сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \overline{P}_n)$ существует равнодействующая $\overline{R}$ (рис. 1.15). В точке O (полюсе) введем систему координат *xyz*, а на линии действия равнодействующей возьмем точку O_1 с радиусом-вектором $\overline{r}$ относительно выбранного полюса. Точки приложения сил $\bar{P}_i$ будут иметь радиусы-векторы $\bar{r}_i$. Поскольку система сил $(\bar{P}_i)$ приводится к равнодействующей, то момент всех сил относительно точки O_1 должен быть равен нулю (O_1 лежит на линии действия равнодействующей):

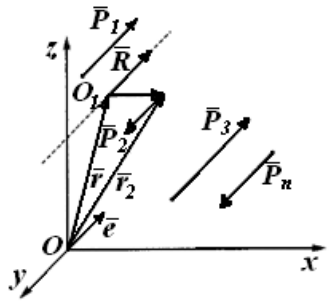


Рис. 1.15

$$\overline{M}_{O_1}(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i - \overline{r}) \times \overline{P}_i = 0.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\overline{M}_{O_1}(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{P}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{r} \times \overline{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{P}_i - \overline{r} \times \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0. \quad (1.20)$$

Введем единичный вектор $\overline{e}$, параллельный силам $\bar{P}_i$. Тогда

$$\bar{P}_i = P_i^* \overline{e}; \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = \overline{e} \sum_{i=1}^{n} P_i^*,$$

где $P_i^* = P_i$, если направления $\bar{P}_i$ и $\overline{e}$ совпадают; $P_i^* = -P_i$, если $\bar{P}_i$ и $\overline{e}$ направлены противоположно друг другу. С учетом этих соотношений

$$\overline{M}_{O_1}(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times P_i^* \overline{e} - \overline{r} \times \overline{e} \sum_{i=1}^{n} P_i^* = 0; \tag{1.21}$$

$$\overline{M}_{O_1}(\bar{P}_i) = \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i P_i^* - \overline{r} \sum_{i=1}^{n} P_i^* \right] \times \overline{e} = 0.$$

При повороте сил системы $(\bar{P}_i)$ на некоторый угол будет изменяться направление единичного вектора. При этом равнодействующая $\overline{R}$ повернется на тот же угол относительно точки, расположенной на ее линии действия. Момент сил $\bar{P}_i$ относительно точки поворота будет равен нулю при любом угле поворота, т. е. положение точки поворота равнодействующей определяется соотношением (1.21) при любом $\overline{e}$. Это возможно только при условии, что первый множитель равен нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i P_i^* - \overline{r} \sum_{i=1}^{n} P_i^* = 0.$$

Данное равенство имеет единственное решение относительно $\overline{r}$, определяющего положение точки, через которую всегда проходит линия действия равнодействующей при повороте всех сил системы параллельных сил на один и тот же угол. Эта точка называется центром параллельных сил. Обозначим радиус-вектор центра параллельных сил через $\overline{r}_c$ и получим

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i P_i^*}{\sum_{i=1}^{n} P_i^*}. \tag{1.22}$$

Положение центра параллельных сил можно определить через его координаты в системе координат xyz.

Тема 2. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

2.1. Определение центра тяжести тела

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести (рис. 2.1). Разобьем тело на элементарные объемы $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. На произвольный объем тела будет действовать сила $\overline{P}_i = \rho_i g \Delta V_i$. Считаем плотность переменной по объему тела, т. е. $\rho_i = \rho(x_i, y_i, z_i)$.

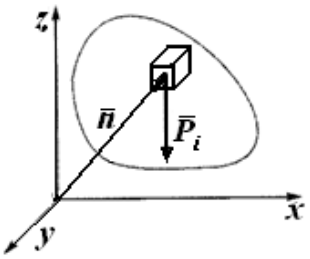


Рис. 2.1

Поскольку размеры тела по сравнению с размерами Земли ничтожно малы, то ускорения свободного падения в каждой точке объема можно считать одинаковыми по значению и направлению. Это означает, что силы $\overline{P}_i$, действующие на каждый элемент тела, параллельны. Найдем центр параллельных сил тяжести $\overline{P}_i$:

$$\overline{r}' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \rho_i g \Delta V}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i g \Delta V}.$$

Переходя к пределу при числе разбиений $n \to \infty$, получим радиус-вектор центра тяжести тела

$$\overline{r}_c = \frac{g \int_V \overline{r} \rho(x,y,z)\, dV}{g \oint_V \rho(x,y,z)\, dV}.$$

С учетом того, что масса тела $M = \oint_V \rho(x,y,z)\, dV$, получим радиус-вектор центра тяжести тела и его координаты при постоянном в пределах объема тела ускорении свободного падения (центр тяжести в этом случае может быть назван центром масс):

$$\overline{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \overline{r} \rho(x,y,z)\, dV\,; \tag{2.1}$$

$$\overline{x}_c = \frac{1}{M} \int_V \overline{x} \rho(x,y,z)\, dV\,, \overline{y}_c = \frac{1}{M} \int_V \overline{y} \rho(x,y,z)\, dV\,, \overline{z}_c = \frac{1}{M} \int_V \overline{z} \rho(x,y,z)\, dV.$$

Для однородного тела, т.е. тела с постоянной по объему плотностью

$$x_c = \frac{1}{V} \int_V x\, dV\,,\ y_c = \frac{1}{V} \int_V y\, dV\,,\ z_c = \frac{1}{V} \int_V z\, dV. \tag{2.2}$$

Центр тяжести однородного тела называют центром объема.

2.2. Центр тяжести симметричных однородных тел

Для однородного тела, имеющего плоскость или ось симметрии, задача определения положения центра тяжести упрощается.

Рассмотрим тело, имеющее плоскость симметрии (рис. 2.2). Совместим с этой плоскостью оси x и y системы координат xyz. Каждому элементу объема ΔV_k с координатами x_k, y_k, z_k симметричный элемент $\Delta V_i = \Delta V_k$ с координатами $x_i = x_k, y_i = y_k, z_i = -z_k$. Следовательно,

$$z_c = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} z_i \Delta V_i}{V}.$$

Так как в сумме все члены попарно уничтожаются, то $z_c = 0$. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости. Подобным образом можно доказать, что центр тяжести тела, имеющего ось симметрии, лежит на этой оси.

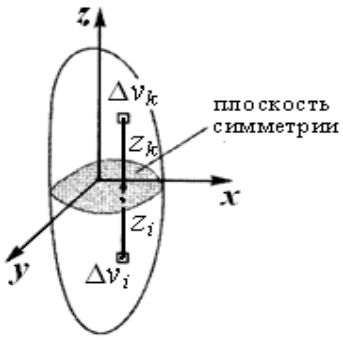


Рис. 2.2

2.3. Метод разбиения тела

Рассмотрим этот прием на примере определения одной из координат центра тяжести однородного тела (центра объема).

Пусть дано тело объемом *V*. Разобьем это тело на части (рис. 2.3) с объемами V_i. В этом случае

$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x\, dV.$$

Интеграл по всему объему V можно записать как сумму интегралов по частям объема V_i, тогда

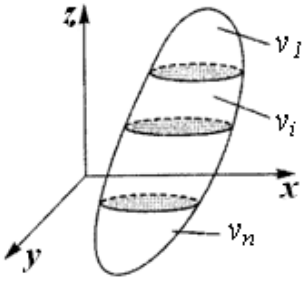


Рис. 2.3

$$x_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\int_{(V_i)} x\, dV.$$

Умножим и разделим каждый интеграл суммы на соответствующий объем:

$$x_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i}{V_i}\int_{(V_i)} x\, dV.$$

Поскольку $x_{c_i} = \frac{\int_{(V_i)} x\, dV}{V_i}$ является координатой центра части объема V_i,

$$x_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} V_i x_{c_i}, \qquad (2.3)$$

где V_i, x_{c_i} – объемы и координаты центров объемов отдельно взятых частей, на которые было разбито тело.

Таким образом, если удается разбить тело на части, для которых известны координаты центров тяжести и, соответственно, объемы или площади, то при определении центра тяжести тела удается избежать процедуры интегрирования.

2.4. Метод отрицательных масс

В некоторых случаях разбиения целесообразно заменять твердое тело не суммой, а разностью отдельных его частей.

На рис. 2.4 представлено два способа разбиения тела:

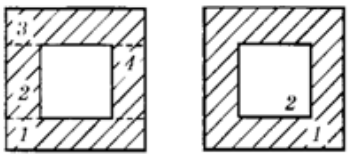


Рис. 2.4

в первом случае – это сумма четырех прямоугольников, во втором – разность двух прямоугольников. В обоих случаях координату центра тяжести находим по формуле

$$x_c = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_{c\,i}\, S_i,$$

но во втором случае площадь второго прямоугольника считаем отрицательной.

Найдем положение центров тяжести некоторых однородных тел типичных форм.

1. Шар. Центр тяжести совпадает с центром шара.

2. *Параллелепипед.* Центр тяжести лежит в точке пересечения трех плоскостей симметрии.

3. *Цилиндр.* Центр тяжести лежит в точке пересечения оси цилиндра с плоскостью симметрии, которая перпендикулярна оси.

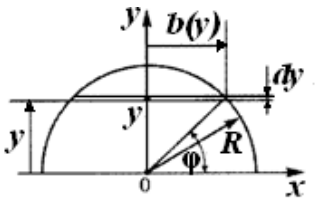


Рис. 2.5

4. *Круг.* Центр тяжести совпадает с центром круга.

5. *Прямоугольник.* Центр тяжести находится в точке пересечения осей симметрии.

6. *Треугольник.* Центр тяжести расположен в точке пересечения медиан.

7. *Полукруг.* Введем систему координат xy так, чтобы ось y совпадала с осью симметрии, а ось x – с основанием (рис. 2.5).

Фигура имеет ось симметрии y, т. е. $x_c = 0$. Для определения координаты y_c выделим элемент площади $dS = 2b(y)dy$, где $b(y) = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $dy = R\cos\varphi\, d\varphi$. Получим

$$y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} y\, dS = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2} R\sin\varphi \cdot 2R^2 \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{4R^3}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d(\cos\varphi) = -\frac{4R}{\pi}\int_1^0 z^2 dz = -\frac{4R}{\pi}\frac{z^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{4R}{3\pi}. \qquad (2.4)$$

8. *Круговой сектор.* Введем систему координат *xy* так, чтобы ось *y* была осью симметрии кругового сектора (рис. 2.6).

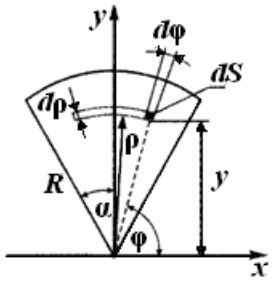


Рис. 2.6

Центр тяжести будет лежать на оси *y,* т. е. $x_c = 0$. Выделим элемент площади $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$ с координатой его центра тяжести $y = \rho \sin\varphi$, тогда

$$y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} y\, dS =$$

$$= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}\int_0^R \rho \sin\varphi\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\alpha R^2}\, 2\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2}\int_0^R \rho^2 \sin\varphi\; d\rho\, d\varphi = \frac{2}{\alpha R^2}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \frac{R^3}{3}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2R}{3\alpha}\sin\alpha.$$

При $\alpha = \pi/2$ получим полукруг с центром тяжести $y_c = 4R/3\pi$, что совпадает с выражением (2.4).

Тема 3. ТРЕНИЕ.

При решении многих задач механики возникает необходимость в учете реальных связей. Ранее были рассмотрены идеальные связи. Реальные связи, в отличие от идеальных, имеют силы трения, которые препятствуют взаимному перемещению тел, контактирующих между собой. Реакция идеальной связи всегда направлена по нормали к поверхности или к кривой, ограничивающей свободу движения тела, а реакция реальной связи отклоняется от нормали на некоторый угол под действием возникающей силы трения.

3.1. Трение скольжения

Пусть тело весом $\overline{G}$ покоится на поверхности. Сила веса уравновешивается реакцией связи $\overline{N}$. Эту силу еще называют силой нормального давления. Приложим к телу незначительную по модулю силу $\overline{P}$, которая стремится сдвинуть тело в направлении касательной к поверхности связи, и начнем ее плавно увеличивать (рис. 3,1).

Движение тела начнется, когда сила $\overline{P}$ достигнет некоторого значения, а дальнейшее движение будет продолжаться уже при меньшем значении силы. И в первом случае (до момента начала движения), и во втором (когда движение началось при условии движения с постоянной скоростью) сила $\overline{P}$ будет

уравновешиваться силой трения $\overline{P}_{\text{тр}}$: в первом случае – это сила трения покоя, во втором – сила трения движения. Отметим, что сила трения покоя больше силы трения движения: $P_{\text{тр. пок}} > P_{\text{тр. дв}}$.

Рассмотрим силу трения покоя, которая появляется при действии активных сил, стремящихся сдвинуть тело. Эта сила называется силой трения скольжения, которая является компонентой реакции связи в направлении касательной к поверхности и направлена в сторону, противоположную возможному движению. Значение силы трения может изменяться от нуля до некоторого предела в зависимости от значения и направления активных сил. Для определения максимальной силы трения скольжения, соответствующей переходу от покоя к движению, пользуются формулой Амонтона–Кулона

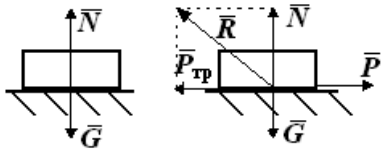


Рис. 3.1

$$P_{\text{тр}} = fN, \tag{3.1}$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Коэффициент трения скольжения безразмерен и находится экспериментально. Для трения скольжения можно сформулировать некоторые закономерности, установленные в разное время Амонтоном, Кулоном, Мореном:

1. Сила трения скольжения действует в касательной плоскости к контактирующим поверхностям соприкасающихся тел и направлена в сторону, обратную их взаимному скольжению.

2. Сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления (компоненте реакции в направлении нормали к контактирующим поверхностям).

3. Сила трения покоя не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей (трущихся поверхностей).

4. Коэффициент трения покоя зависит от материала соприкасающихся тел, физического состояния, температуры, влажности, степени загрязнения и т. п.) и качества обработки поверхности.

Формулой Амонтона–Кулона пользуются для определения силы трения в критическом случае (переход от состояния покоя к состоянию движения). Во всех остальных случаях для определения силы трения используют уравнение равновесия.

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности. Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакции тело находится в предельном равновесии. На рис. 3.2 показаны предельная реакция $\overline{R}$ и ее составляющие: $\overline{N}$ – сила нормального давления; $\overline{P}_{\text{тр}}$ – сила трения. При изменении направления активных сил будет изменяться направление силы трения и реакция $\overline{R}$ будет поворачиваться, описывая конус.

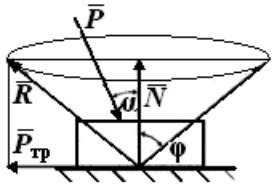


Рис. 3.2

Угол φ между реакцией и нормалью к поверхности называется углом трения, а конус, образованный вращением $\overline{R}$, – конусом трения. Определим угол φ:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{P_{\text{тр}}}{N};\ P_{\text{тр}} = \text{tg}\,\varphi N. \qquad (3.2)$$

Следовательно, вместо коэффициента трения можно задавать угол трения. Рассмотрим случай, когда на тело действуют активные силы которые могут быть приведены к равнодействующей $\overline{P}$, образующей с нормалью к поверхности угол α.

Нормальная составляющая силы $\overline{P}$ определяет силу нормального давления $N = P\cos\alpha$, от которой зависит максимальная сила трения $P_{\text{тр}} = fN = \text{tg}\,\varphi P\cos\alpha$. Касательная составляющая силы $P_k = P\sin\alpha$ стремится сдвинуть тело и сдвинет его, если будет больше максимальной силы трения. Равновесие же тела будет выполнено в случае, когда

$$P_k \le P_{\text{тр}}^{max},\ P\sin\alpha \le \text{tg}\,\varphi P\cos\alpha. \qquad (3.3)$$

Отсюда следует, что если $\text{tg}\,\alpha \le \text{tg}\,\varphi$ или $\alpha \le \varphi$, то состояние покоя обеспечено при любом значении силы *P*.

Если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то тело находится в покое при любом значении силы. Для того чтобы сдвинуть тело, нужно приложить такую систему активных сил, равнодействующая которой находится вне конуса трения.

3.2. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим цилиндрический каток на поверхности (рис. 3.3) без учета его собственного веса, но на который действует сила $\overline{P}$, нормальная к поверхности.

Поскольку рассматриваемая поверхность реальная, то в результате действия силы она будет деформироваться. Реакция поверхности представляет собой симметрично распределенное давление в зоне контакта. Линия действия равнодействующей $\overline{R}$ совпадает с линией действия силы $\overline{P}$.

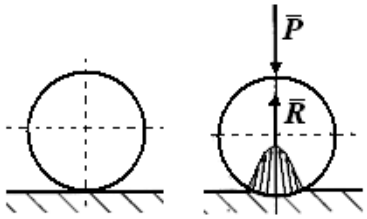


Рис. 3.3

Приложим к катку дополнительную силу $\overline{Q}$, которая параллельна касательной к плоскости в зоне контакта (рис. 3.3). В результате этого дополнительного воздействия зона и распределение давления контакта становятся несимметричными, поскольку вследствие деформации тел касание фактически происходит вдоль некоторой площадки. При действии силы $\overline{Q}$ интенсивность давления возрастает в сторону точки C. Поэтому реакция $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{Q}$. Возникающая реакция должна проходить через точку пересечения линий действия сил $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ (равновесие тела при действии трех сил). Разложим реакцию $\overline{R}$ на нормальную $\overline{N}$ и касательную $\overline{T}$ компоненты. Составим уравнения равновесия катка:

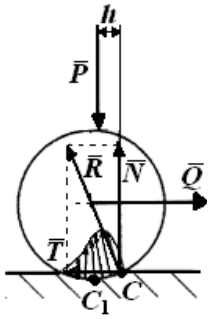


Рис. 3.4

$$Q - T = 0;\ \ N - P = 0;\ \ -Qr + Nh = 0,$$

где r – радиус катка; h – величина, характеризующая смещение точки приложения реакции от плоскости симметрии. Определяем $Q = T,\ N = P$. Из третьего уравнения находим $h = Qr/P$. С увеличением модуля силы Q величина h растет, но величина h связана с величиной зоны контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Обозначим величину наибольшего смещения точки приложения силы реакции буквой δ.

Условие равновесия будет выполняться, если $h \le \delta$. Моментом трения качения называется наибольшее значение момента Nh, который препятствует перекатыванию катка, при $h = \delta$:

$$M_T = \delta N, \qquad (3.4)$$

где δ – коэффициент трения качения, который имеет размерность длины и определяет наибольшую величину смещения силы нормального давления.

Таким образом, каток будет находиться в состоянии покоя, если момент пары $(\overline{Q}, \overline{T})$ меньше момента трения качения $M_{\text{Т}}$, а если момент пары $(\overline{Q}, \overline{T})$

станет больше $M_{\text{Т}}$, то состояние покоя нарушится. При равенстве моментов имеем предельный случай равновесия.

Трение скольжения и трение качения – два основных вида трения.

Тема 4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

Любая конструкция должна быть надежной в эксплуатации и экономичной, т. е. должна отвечать требованиям прочности, жесткости и устойчивости. Элементы конструкции должны иметь рациональную форму и размеры. Форма и размеры деталей конструкций зависят от их функционального назначения, от материала, из которого они изготовлены, и от характера внешних воздействий.

Изменение формы и размеров конструкции или ее элементов в результате внешнего воздействия называется *деформацией*.

Деформация считается упругой, если исчезает после устранения вызвавшей ее силы, и остаточной – в противном случае. Свойство элемента конструкции проявлять упругую деформацию называют *упругостью*, остаточную деформацию – *пластичностью*. Свойства упругости и пластичности являются относительными, а не абсолютными. Например, одна и та же стальная пластина в зависимости от приложенной силы может после сгиба выпрямиться полностью либо получить прогиб, который полностью не исчезнет после устранения силы. Значит при малых деформациях она упруга, а при больших – пластична.

Конструкция считается надежной, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при различных внешних воздействиях.

Прочность – способность конструкции или отдельных ее элементов выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь и не проявляя остаточных деформаций.

Жесткость – способность конструкции сопротивляться образованию деформаций, не превышающих допустимых значений.

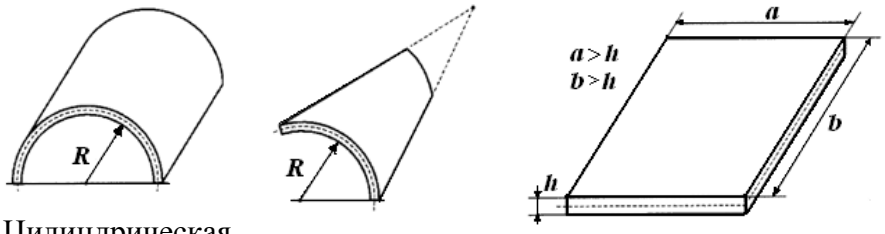
Устойчивость – способность конструкции противостоять воздействиям, стремящимся вывести ее из состояния статического или динамического равновесия.

Важной задачей при анализе прочностных характеристик конструкции является построение расчетной схемы, адекватной реальной конструкции, и внешним воздействиям, которые она испытывает.

4.1. Схематизация формы объектов

Учитывая большое разнообразие конструктивных форм элементов конструкций, встречающихся на практике, рассматриваются четыре основных формы тела: стержень, пластина, оболочка, массивное тело.

Стержень – тело, продольные размеры которого значительно превышают его поперечные размеры (балка, вал). Стержень образуется путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Эта фигура называется поперечным сечением. Кривую, по которой перемещается центр фигуры, называют осью стержня. Сечение, не перпендикулярное к оси стержня, называют наклонным. В зависимости от формы оси стержень может быть прямым, кривым и пространственно изогнутым. Сечение стержня может быть постоянным и переменным вдоль оси.



Цилиндрическая оболочка *а*

Коническая оболочка *б*

Прямоугольная пластина *в*

Рис. 4.1

Оболочка – тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга. Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих сторон поверхностей оболочки, носит название срединной поверхности. По своей форме оболочки могут быть сферические, цилиндрические, конические (Рис. 4.1, *а*, *б*). Если срединная поверхность оболочки является плоскостью, то такую оболочку называют *пластиной* (Рис. 4.1, *а*).

Массивные тела – тела, у которых все три размера одного порядка.

4.2. Схематизация свойств материалов

Конструктивные элементы механизмов изготавливаются из различных материалов: металлов, сплавов, дерева, полимеров и др. Как правило, материалы имеют неоднородности, несплошности и другие дефекты. Атомистическая теория строения вещества вообще говорит о дискретной структуре.

Математическое описание макрообъектов с учетом этих особенностей затруднено. В связи с этим в сопротивлении материалов приняты гипотезы.

Гипотеза о сплошности материала предполагает, что материал заполняет форму тела сплошь, т. е. в любом элементарном объеме, выделенном в пределах тела, содержится вещество.

Гипотеза об однородности материала предполагает, что в любом элементарном объеме, выделенном в пределах тела, содержится одно и то же вещество, обладающее одинаковыми свойствами.

Гипотеза об изотропности предполагает, что свойства материала в различных направлениях одинаковы. Анизотропные материалы – это материалы, свойства которых зависят от направления. Пример такого материала – дерево: его свойства вдоль волокон отличаются от свойств поперек волокон.

Гипотеза об идеальной упругости предполагает, что изменения размеров и формы тела, которые вызваны внешними силами, исчезают после снятия нагрузки, т. е. тело восстанавливает свою первоначальную форму.

Гипотеза о *пропорциональной (линейной) зависимости* предполагает, что все изменения размеров и формы тела, вызванные внешней нагрузкой, линейно зависят от величины этой нагрузки.

4.3. Схематизация опор

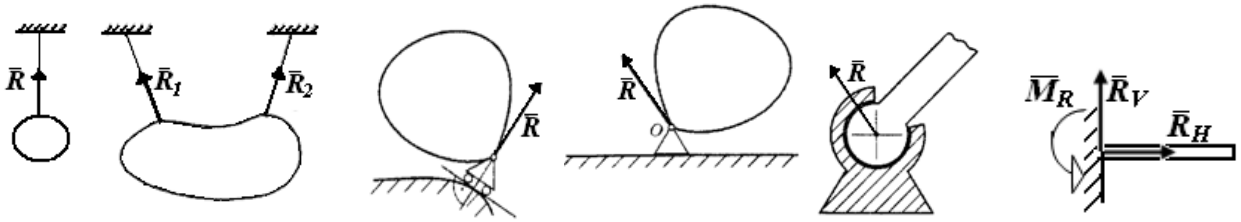
Тело, перемещение которого в пространстве ничем не ограничено, называется свободным. Тело, перемещение которого в пространстве ограничено другими телами, называется несвободным. Тела, ограничивающие перемещения, – связи. Свободное тело в пространстве может совершать три линейных перемещения (в направлении трех взаимно перпендикулярных осей системы координат) и три угловых перемещения (повороты относительно осей системы координат). В покое свободное тело будет тогда, когда будут равны нулю шесть возможных перемещений. В точках контакта рассматриваемого несвободного тела со связями возникают силы взаимодействия. Силы, с которыми связи действуют на тело, называются реакциями связей. Реакции связей проявляются в результате принципа освобождаемости: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связи можно заменить силами (реакциями), приложенными к телу, т. е. отбросить связь как тело и заменить ее силой.

Несвободное тело будет иметь возможность совершать в пространстве столько перемещений, сколько неограничено связями, т. е. шесть минус количество ограниченных связями перемещений.

Любая связь ограничивает одно или несколько перемещений точек рассматриваемого тела. Так как реакция обеспечивает ограничение соответствующих перемещений, то в качестве линии действия используется направление соответствующего ограничения перемещения. Если известно, перемещения каких точек тела ограничены и в каком направлении, то известны и точки приложения и направления сил реакции связей.

Рассмотрим основные виды опор и их реакции.

1. *Гибкая невесомая нерастяжимая нить* (Рис. 4.2, *а*). Препятствует движению только в натянутом состоянии, поэтому реакция направлена всегда вдоль нити от тела.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 4.2

2. *Шарнирно-подвижная опора (плоский цилиндрический шарнир).* Ограничивает перемещение тела в направлении перпендикуляра к той поверхности, по которой перемещается шарнир (Рис. 4.2, *б*). В этом направлении действует реакция связи.

3. *Шарнирно-неподвижная опора (плоский цилиндрический шарнир).* Ограничивает линейное перемещение тела (Рис. 4.2, *в*). Реакция лежит в плоскости чертежа и имеет произвольное направление.

4. *Сферический шарнир* (Рис. 4.2, *г*). Линия действия реакции этого шарнира проходит через центр сферы и имеет произвольное направление.

5. *Защемление (жесткое защемление, заделка).* Полностью ограничено перемещение (Рис. 4.2, *д*). Возникают линейные и вращательные реакции опор.

4.4. Внешние силы

При рассмотрении элемента конструкции (тела) отдельно от окружающих тел действие последних на него заменяют внешними силами. *Внешняя сила* – мера воздействия физических объектов.

По времени действия внешние силы подразделяют на *постоянные*, действующие все время существования изделия, и *временные*, действующие лишь в течение некоторого промежутка времени.

По характеру действия они бывают статическими и динамическими. *Статические* силы сообщают телу малые ускорения, которыми можно пренебречь при исследовании. *Динамические* силы придают значительные ускорения, которыми пренебрегать не следует. Если конечное изменение внешней силы и скорости тела, передающего силу, происходит в очень короткий промежуток времени, динамическая сила называется *ударной*.

По месту приложения к телу внешние силы подразделяют на объемные и поверхностные. *Объемные* силы распределены по всему объему, занятому телом. *Поверхностные* распределены по поверхности. Если поверхность соприкосновения очень узкая, то можно считать, что сила распределена по линии – *распределенная* сила. Если площадка, на которой действует поверхностная сила, мала по сравнению с поверхностью всего тела, то поверхностную силу можно считать *сосредоточенной* в точке тела.

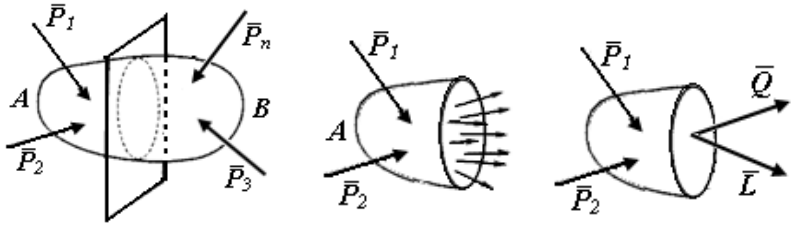
Механическую величину, характеризующую внешнее воздействие на тело и определяющую изменение его вращательного движения, называют *моментом силы*.

Непосредственно с нагрузками связана гипотеза о малости перемещений точек деформируемого тела, которые вызваны внешней нагрузкой, т. е. смещение точек приложения сил и изменение углов линий действия сил малы, что позволяет записывать условия равновесия для деформированного тела как для недеформированного.

4.5. Внутренние силы. Напряжения.

Твердое тело может быть представлено как совокупность бесконечного числа материальных точек, которые взаимодействуют между собой так, что сохраняется его форма при отсутствии внешнего воздействия. Для сохранения формы тела между точками возникают внутренние силы. При приложении внешних нагрузок тело деформируется, и изменение расстояний между точками приводит к изменению внутренних сил. В механике внутренними силами считаются только те силы, которые появляются в результате внешнего воздействия. Внутренние силы, существующие в теле без внешней нагрузки, которые обеспечивают форму тела, во внимание не принимаются.

Изменение сил взаимодействия между частицами тела вследствие деформации называют *внутренними силами*, сопровождающими деформацию.



а *б* *в*

Рис. 4.3

Для выявления и вычисления внутренних сил применяют метод сечений. Рассмотрим произвольное тело (рис. 4.3, *а*), нагруженное системой сил. Мысленно рассечем его некоторой плоскостью на две части *A* и *B*. С обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия (рис. 4.3, *б*). В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних сил интенсивность внутренних сил в различных точках сечения может быть различна. В соответствии с третьим законом Ньютона силы, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *A*, равны по значению и противоположны по направлению внутренним силам, которые действуют по сечению, принадлежащему части тела *B*. Внутренние силы, действующие в сечении, можно привести к одной точке, в результате чего на каждой стороне сечения получим *главный вектор внутренних сил* $\overline{Q}$ и *вектор главного момента внутренних сил* $\overline{L}$ (рис. 4.3, *в*). Для того чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается *напряжение*.

Рассмотрим сечение *A* некоторого тела (рис. 4.4). В окрестности точки *C* выделим элементарную площадку ΔF ($\overline{n}$ – нормаль к площади сечения). Пусть $\Delta\overline{R}$ – равнодействующая внутренних сил на площадке ΔF:

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \overline{R}}{\Delta F} = \overline{\sigma}_n,$$

где $\overline{\sigma}$ – полное напряжение в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$. Единица напряжения – паскаль [Па].

Равнодействующую внутренних сил $\Delta\overline{R}$ и полное напряжение $\overline{\sigma}$ можно разложить на составляющие. Равнодействующую внутренних сил разложим на составляющие: ΔN, направленную по нормали к площадке, и ΔQ, касательную к площадке. Полное напряжение разложим на нормальное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$,

$$\sigma_n = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \overline{N}}{\Delta F}, \qquad (4.1)$$

и касательное напряжение, действующее в окрестности точки C на площадке с нормалью $\overline{n}$ по направлению $\overline{t}$,

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \overline{Q}}{\Delta F}. \qquad (4.2)$$

Касательное напряжение имеет два индекса – нормали и касательной. Рассмотрим площадку с нормалью $\overline{n}$, взятую в окрестности некоторой точки деформируемого тела.

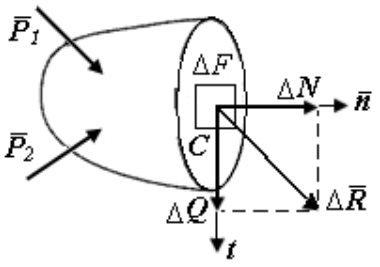


Рис. 4.4

Полное напряжение в общем случае не совпадает с направлением нормали. Его проекции на направление нормали $\overline{n}$ обозначим σ_n, а на направление касательной $\overline{t}$ – τ_{nt}. Тогда

$$|\sigma|^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2.$$

Если известны проекции $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на координатные оси x, y, z полного напряжения, действующего на площадке, то оно может быть выражено:

$$|\sigma|^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2.$$

Если нормаль к площадке составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ, то нормальную составляющую напряжений можно найти через проекции полного напряжения на координатные оси:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma.$$

При повороте площадки напряжение меняется.

Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через эту точку.

Тема 5. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТРЕЖНЯ

5.1. Составляющие внутренних сил в поперечном сечении стержня. Правило знаков

Внутренние силы по своей природе – это силы взаимодействия частей тела между собой. Они могут быть выявлены при отбрасывании части тела и замены ее действия внутренними силами. Этот прием носит название «метод сечений».

На рис. 5.1, *а* представлен стержень, находящийся под действием внешних сил в состоянии равновесия. Мысленно рассечем стержень плоскостью, перпендикулярной продольной оси, и отбросим одну из частей стержня.

Действие мысленно отброшенной части на оставшуюся часть заменим силами. Внутренние силы можно представить главным вектором сил $\overline{Q}$ и вектором главного момента $\overline{L}$ (рис. 5.1, *б*).

В поперечном сечении введем систему координат xyz: оси y и z – центральные оси инерции поперечного сечения; ось x – перпендикулярна плоскости поперечного сечения и совпадает с направлением продольной оси стержня.

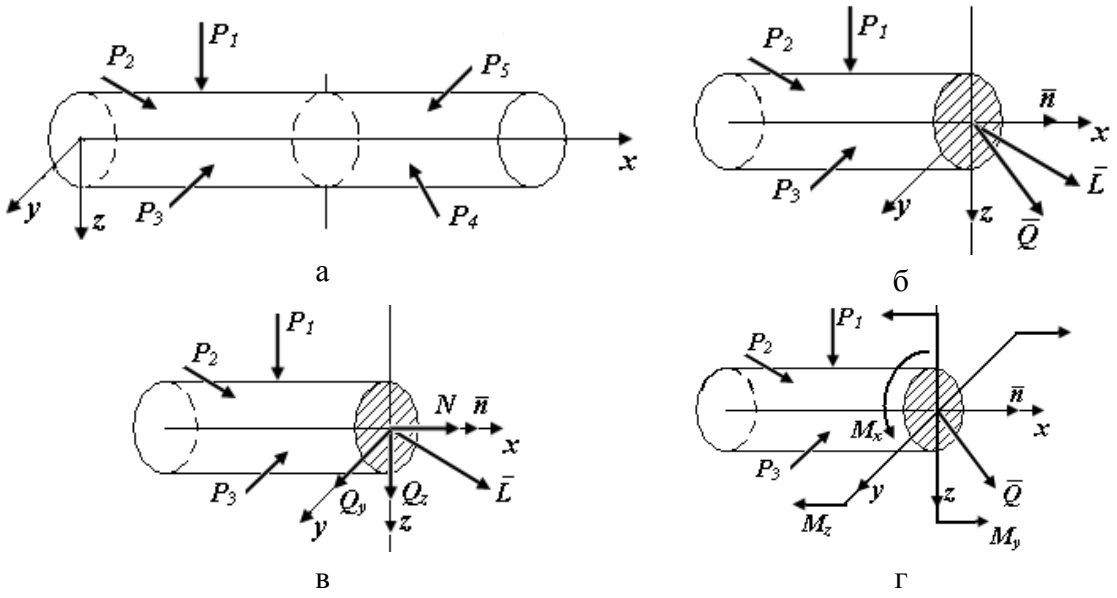


Рис. 5.1

Выделим в плоскости поперечного сечения элементарную площадку *dF*. Разложим вектор внутренних сил, действующих в пределах элементарной площадки, на составляющие по направлениям осей x, y, z:

$$d\overline{L} = d\overline{N}_x + d\overline{Q}_y + d\overline{Q}_z, \text{ или } d\overline{L} = dN_x\overline{i} + dQ_y\overline{j} + dQ_z\overline{k}.$$

Интенсивность распределенной силы в точке определяется как отношение равнодействующей к величине элементарной площадки, на которой она возникает.

Направление полного напряжения $\overline{\sigma} = d\overline{L}/dF$ совпадает с направлением вектора силы $d\overline{L}$. Полное напряжение может быть разложено на составляющие в направлении координат x, y, z.

Дадим определения составляющих полного напряжения:

1) нормальное напряжение – компонента полного напряжения (интенсивности внутренних сил) вдоль нормали к площадке (вдоль оси x):

$$\sigma_n = dN_x/dF\,; \tag{5.1}$$

2) касательные напряжения – компоненты полного напряжения (интенсивности внутренних сил) в направлении осей y и z (по касательной к площадке):

$$\tau_y = dQ_y/dF;\ \tau_z = dQ_z/dF. \tag{5.2}$$

С учетом этого

$$dN_x = \sigma_n\, dF;\ dQ_y = \tau_y dF;\ dQ_z = \tau_z dF.$$

Используя лемму о параллельном переносе силы, перенесем силы dN_x, dQ_y, dQ_z в центр тяжести сечения. При этом получим моменты

$$dM_y = z dN_x = \sigma_n\, z dF;\ dM_z = y dN_x = \sigma_n\, y dF;$$

$$dM_x = y dQ_z - z dQ_y = \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dF.$$

Просуммировав $dN_x, dQ_y, dQ_z, dM_x, dM_y, dM_z$ по всем элементарным площадкам, в центре тяжести поперечного сечения получим силы

$$N_x = \sum_{i=1}^{\infty} dN_x = \int_F \sigma_n\, dF\,;\ Q_y = \sum_{i=1}^{\infty} dQ_y = \int_F \tau_y dF\,;\ Q_z = \sum_{i=1}^{\infty} dQ_z = \int_F \tau_z dF$$

и моменты

$$M_x = \sum_{i=1}^{\infty} dM_x = \int_F \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dF\,;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{\infty} dM_y = \int_F \sigma_n\, z dF\ ;\ M_z = \sum_{i=1}^{\infty} dM_z = \int_F \sigma_n\, y dF\,.$$

Таким образом, совокупность сил N_x, Q_y, Q_z и моментов M_x, M_y, M_z есть интегральная характеристика внутренних сил, возникающих в поперечном сечении.

Продольная сила N_x – компонента главного вектора внутренних сил в направлении продольной оси x – всегда перпендикулярна плоскости поперечного сечения и называется нормальной силой (рис. 5.1, *в*). Внешние силы, соответствующие нормальной силе, вызывают растяжение или сжатие стержня.

Поперечные силы Q_y, Q_z – компоненты главного вектора внутренних сил в направлении главных центральных осей инерции сечения y, z – лежат в плоскости сечения и называются перерезывающими силами (рис. 5.1, *в*).

Крутящий момент M_x – момент внутренних сил относительно продольной оси x. Изгибающие моменты M_y, M_z – моменты внутренних сил относительно главных центральных осей инерции сечения y, z (рис. 5.1, *г*).

Эти силы и моменты называются внутренними силовыми факторами. При исследовании напряжений и деформаций эти силы должны быть определены в первую очередь.

Знаки составляющих внутренних сил находят с помощью *правила знаков* для сил и моментов:

Когда направление внешней нормали к сечению $\overline{n}$ совпадает с положительным направлением оси координат x (левая отсеченная часть), то составляющие внутренних сил N_x, Q_y, Q_z будут положительны, если они направлены в стороны положительных направлений соответствующих осей координат. Когда внешняя нормаль к сечению $\overline{n}$ направлена в сторону, противоположную направлению оси x (правая отсеченная часть), то составляющие внутренних сил N_x, Q_y, Q_z будут положительны, если они направлены в стороны, противоположные направлениям соответствующих осей координат.

Когда направление внешней нормали к сечению $\overline{n}$ совпадает с положительным направлением оси координат x (левая отсеченная часть), моменты M_x, M_y, M_z считаются положительными, если они действуют против часовой стрелки при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей. Когда внешняя нормаль к сечению $\overline{n}$ направлена в сторону, противоположную направлению оси x (правая отсеченная часть), то моменты M_x, M_y, M_z считаются положительными, если они создают вращение по часовой стрелке при рассмотрении с концов соответствующих координатных осей.

Внутренние силовые факторы в сечениях левой и правой частей стержня численно равны и противоположно направлены. Это следует также из третьего закона Ньютона.

5.2. Внутренние силы в частных случаях деформации стержня

Для анализа удобно выделить частные простейшие виды деформации стержня:

– осевое растяжение сжатие – при этом $N \neq 0$ (Рис. 5.2, *а*);

– кручение – при этом $M_x \neq 0$ (Рис. 5.2, *б*);

– чистый изгиб – при этом в плоскости *xOz* $M_y \neq 0$ (Рис. 5.2, *в*), в плоскости *xOy* $M_z \neq 0$;

– плоско-поперечный изгиб – при этом при этом в плоскости *xOz* $Q_z \neq 0$, $M_y \neq 0$ (Рис. 5.2, *г*), в плоскости *xOy* $Q_y \neq 0$, $M_z \neq 0$.

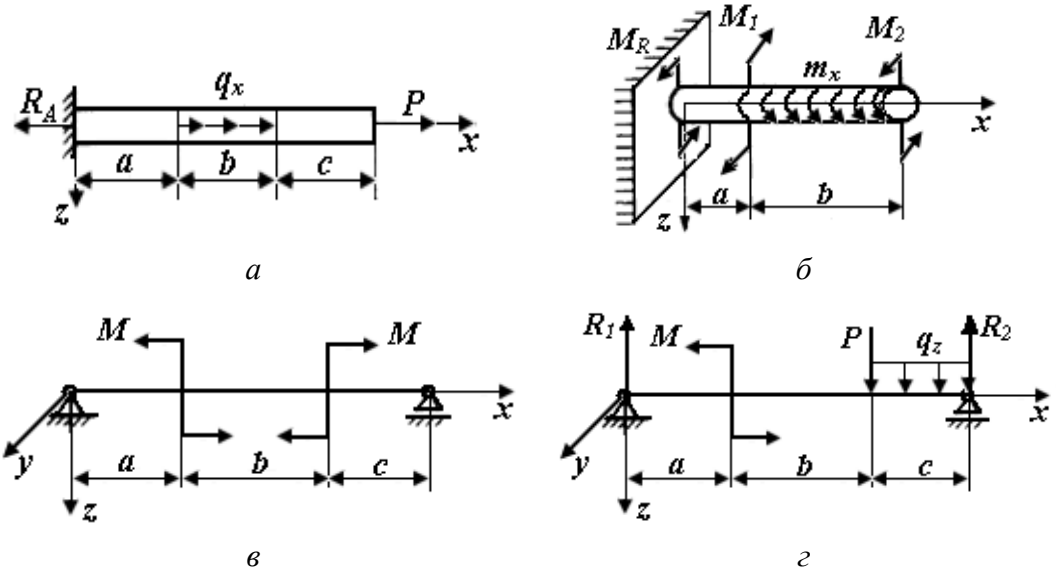


Рис. 5.2

Рассмотрим стержень, нагруженный распределенными продольными и поперечными силами и крутящим моментом (Рис. 5.3).

Выделим из стержня элемент длиной dx и рассмотрим условия равновесия под действием различных внешних сил (Рис. 5.3, *а*). Вследствие малости длины элемента силы и моменты можно считать равномерно распределенными. Рассмотрим действие каждой из внешних сил отдельно.

На рис. 5.3, *б* представлен элемент стержня dx, на который действует только распределенная нагрузка вдоль оси стержня. В левой части сечения действует только нормальная сила N. При переходе от сечения к сечению эта сила получает некоторое приращение dN. Условие статического равновесия элемента запишем в виде $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ (сумма проекций всех сил на ось *x* равна 0). Раскроем это условие:

$$-N + q_x dx + N + dN = 0.$$

Между нормальной силой N и внешней силой q_x существует дифференциальная зависимость

$$\frac{dN}{dx} = -q_x\,. \qquad (5.3)$$

На участке стержня, где действует внешние распределенные силы, нормальная сила изменяется по линейному закону.

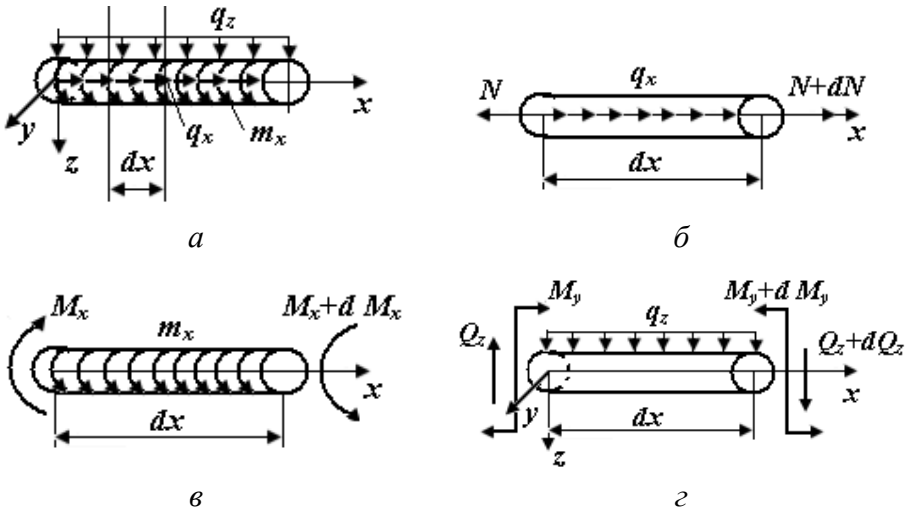


Рис. 5.3

На рис. 5.3, *в* представлен элемент стержня dx, на который действует только распределенный внешний момент m_x. В левом сечении действует крутящий момент M_x, а в правом сечении – момент $M_x + dM_x$. Уравнение статического равновесия имеет вид $\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0$ (сумма моментов относительно оси *x* равна 0):

$$-M_x + m_x dx + M_x + dM_x = 0.$$

Дифференциальная зависимость между крутящим моментом M_x и внешним распределенным моментом m имеет вид

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x. \tag{5.4}$$

На участке стержня, где действует распределенный внешний момент, крутящий момент M_x изменяется по линейному закону.

На рис. 5.3, *г* представлен элемент стержня dx, на который действует только внешняя распределенная нагрузка вдоль оси z.

Условия статического равновесия элемента запишем в виде $\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$ (сумма проекций всех сил на ось z равна 0),

$$-Q_z + q_z dx + Q_z + dQ_z = 0,$$

и сумма моментов всех сил, действующих на элемент стержня, относительно оси y в точке *A* на конце элемента стержня равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ A)} = 0;\ -M_y - Q_z dx + q_z \frac{dx^2}{2} + M_y + dM_y = 0.$$

Если пренебречь величиной второго порядка малости, получим

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z;\ \frac{dM_y}{dx} = Q_z;\ \frac{dQ_z}{dx} = \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z. \tag{5.5}$$

Если внешние силы действуют в плоскости xOy, получим аналогичные выражения:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y;\ \frac{d^2M_z}{dx^2} = -q_y. \tag{5.6}$$

На участке стержня, где внешняя распределенная сила действует перпендикулярно оси стержня, перерезывающие силы изменяются по линейному закону, а изменение изгибающих моментов подчиняется нелинейному закону (параболическому).

5.3. Общие правила построения эпюр внутренних сил

Порядок определения внутренних сил и построения их эпюр одинаков при различных видах нагружения. Эпюр внутренних сил отражает распределение внутренних сил по длине стержня. Участок стержня, на границах которого изменяется характер внешних воздействий, называют грузовым.

Сначала из условия статического равновесия определяют опорные реакции *R*. Так, для стержня, изображенного на рис. 5.2, *а,*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0;\ -R_A + \int_a^{a+b} q_x\,dx + P = 0;\ R_A = \int_a^{a+b} q_x\,dx + P;$$

для стержня, показанного на рис. 5.2, *б*,

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0;\ M_R - M_1 + \int_a^{a+b} m_x\,dx + M_2 = 0;\ M_R = M_1 - \int_a^{a+b} m_x\,dx - M_2;$$

для стержня, представленного на рис. 5.2, *г*, при $q_z = q = \text{const}$:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ A)} = 0;\ M - Pb - qd(c + d/2) + R_2(c + d) = 0;$$

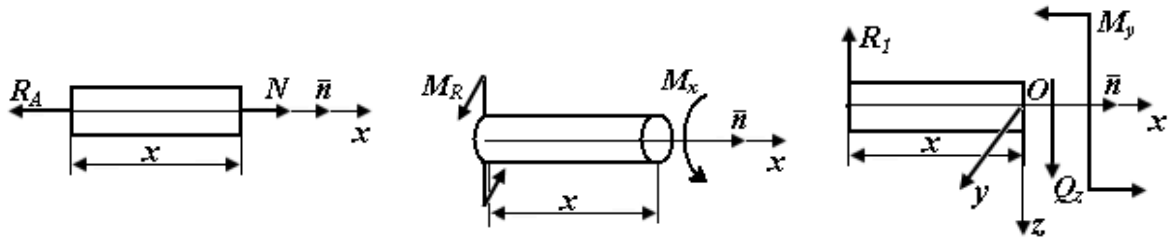
$$R_2 = \frac{-M + Pb + qd(c + d/2)}{(c + d)};$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;\ -R_1 + P + qd - R_2 = 0;\ R_1 = P + qd - R_2.$$

После определения опорных реакций, а значит, и всех внешних сил, на каждом грузовом участке, используя метод сечений и правила знаков, представляют отличные от нуля внутренние силы. Записав условия статического равновесия, выводят закон, по которому изменяются внутренние силы на

данном грузовом участке. Вычисляют значения внутренних сил на границах участков и строят графики – эпюры внутренних сил.

Ось эпюра всегда проводят параллельно оси стержня; значения внутренних силовых факторов откладывают на оси ординат, перпендикулярной оси эпюра в масштабе; эпюр заштриховывают линиями, перпендикулярны- ми оси; в характерных точках эпюра проставляют числовые значения, на поле эпюра в круге ставят знак. Выполняют проверку. В качестве проверки можно использовать следующий факт: если на границе участка действует сосредоточенная сила вдоль оси x (оси y, оси z), то при переходе через эту границу продольная сила (поперечная сила) должна измениться скачкообразно (величина скачка равна величине сосредоточенной силы). Это справедливо и для моментов.



а *б* *в*

Рис. 5.4

На рис. 5.4 представлены сечения и внутренние силы на первых грузовых участках стержней, изображенных на рис. 5.2, протяженностью $0 \le x < a$. Законы распределения внутренних сил получены из условий статического равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0;\ -R_A + N = 0;\ N = R_A \text{ для рис. 5.4, а;}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0;\ M_R + M_x = 0;\ M_x = -M_R \text{ для рис. 5.4, б;}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;\ -R_1 + Q_z = 0;\ Q_z = R_1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ A)} = 0;\ -R_1 x + M_y = 0;\ M_y = R_2 x \text{ для рис. 5.4, в.}$$

Рассмотрим, как определять внутренние силы, на примере плоского поперечного изгиба стержня. На рис. 5.5, *а* представлен стержень на двух

опорах, нагруженный сосредоточенной силой $P = 4qa$, сосредоточенным моментом $M = 6qa^2$ и распределенной силой q.

Определим реакции в опорах. Составим два уравнения равновесия стержня.

Сумма моментов всех внешних сил относительно точки B равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ B)} = 0;\ -R_1 4a + q6a^2 - 6qa^2 - 4qa^2 = 0;\ R_1 = qa - ;$$

Сумма моментов всех внешних сил относительно точки A равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ A)} = 0;\ R_2 4a - 12qa^2 - 6qa^2 - q\frac{4a^2}{2} = 0;\ R_2 = 5qa.$$

При определении внутренних сил, как уже отмечалось, используют метод сечения. Стержень разбивают на грузовые участки. Для каждого участка составляют уравнения равновесия, из которых определяют закон изменения внутренних сил, действующих на данном участке.

Первый участок $0 \le x < 2a$ (Рис. 5.5, *б*):

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;\ -R_1 + qx + Q_z = 0;\ Q_z = \begin{cases} qa \ \text{при}\ x = 0; \\ -qa \ \text{при}\ x = 2a; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ 0)} = 0;\ -R_1 x + q\,x^2/2 + M_y = 0;\ M_y = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ x = 0; \\ 0{,}5\ qa^2 \ \text{при}\ x = a; \\ 0 \ \text{при}\ x = 2a. \end{cases}$$

Второй участок $2a \le x < 3a$ (Рис. 5.5, *в*):

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;\ -R_1 + q2a + Q_z = 0;\ Q_z = \begin{cases} -qa \ \text{при}\ x = 2a; \\ -qa \ \text{при}\ x = 3a; \end{cases}$$

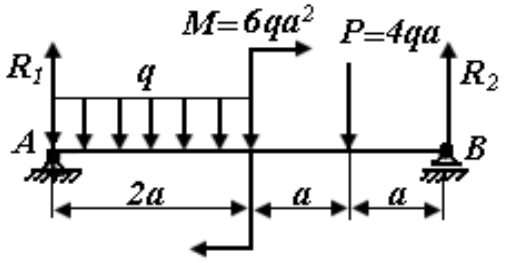
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ 0)} = 0;\ -R_1 x + q2a(x-a) - M + M_y = 0;\ M_y = \begin{cases} 6qa^2 \ \text{при}\ x = 2a; \\ 5qa^2 \ \text{при}\ x = 3a. \end{cases}$$

Третий участок $3a \le x < 4a$ (Рис. 5.5, *г*):

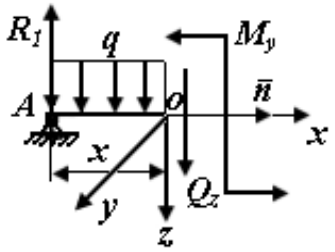
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;\ -R_1 + q2a + P + Q_z = 0;\ Q_z = \begin{cases} 5qa \ \text{при}\ x = 3a; \\ 5qa \ \text{при}\ x = 4a; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{(y,\ 0)} = 0;\ -R_1 x + q2a(x-a) - M + P(x-3a) + M_y = 0;$$

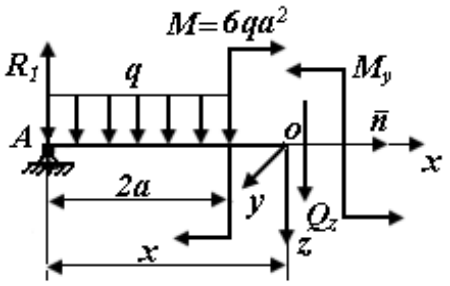
$$M_y = \begin{cases} 5qa^2 \ \text{при}\ x = 3a; \\ 0 \ \text{при}\ x = 4a. \end{cases}$$


M=6qa²
P=4qa
R1
q
R2
A
B
2a
a
a

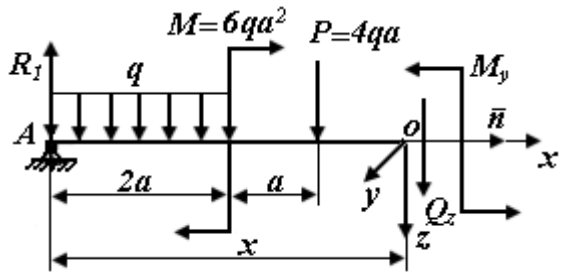
а


R1
q
My
A
o
n̄
x
x
y
Qz
z

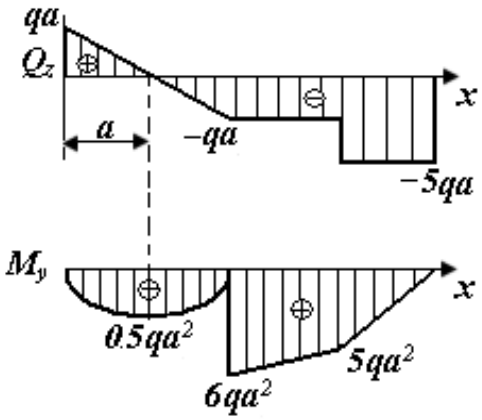
б


M=6qa²
R1
q
My
A
o
n̄
x
2a
y
Qz
z
x

в


M=6qa²
P=4qa
R1
q
My
A
o
n̄
x
2a
a
y
Qz
z
x

г


qa
Qz
x
a
−qa
−5qa
My
x
0.5qa²
5qa²
6qa²

д

Рис. 5.5

Для того чтобы найти вершину параболы, необходимо $Q_z = 0$, или $-R_1 + qx = 0$, и полученное значение $x=a$ подставить в уравнение для $M_y = -R_1 x + q\,x^2/2$. Точки $x = a$ и $M_y = 0{,}5\,qa^2$ являются вершиной параболы.

Перерезывающая сила на участке есть сумма проекций внешних сил, действующих по одну сторону сечения; изгибающий момент – сумма моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону сечения. То же самое можно сказать и о нормальной силе, и крутящем моменте. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 5.5, *д*, *е*.

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Тема 6. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Напряжения в окрестности точки твердого тела: полное, нормальное, касательное

В разд. 1 были даны определения напряжений. $\overline{\sigma}$ – полное напряжение в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$. Единица напряжения – паскаль [Па].

Полное напряжение можно разложить на нормальное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$,

$$\sigma_n = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \overline{N}}{\Delta F},$$

и касательное напряжение, действующее в окрестности точки *C* на площадке с нормалью $\overline{n}$ по направлению $\overline{t}$,

$$\tau_{nt} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \overline{Q}}{\Delta F}.$$

Касательное напряжение имеет два индекса – нормали и касательной (рис. 6.1, *а*).

Для полной характеристики напряженного состояния в окрестности точки тела необходимо знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через эту точку (рис. 6.1, *в*, *г*, *д*).

Девять напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ – составляющие полных напряжений, действующих на трех ортогональных площадках, которые проходят в окрестности некоторой точки твердого тела, подчиняются

правилу знаков: *если внешняя нормаль к площадке совпадает с положительным направлением осей координат, то положительные составляющие напряжений направлены в положительную сторону осей координат. Если внешняя нормаль к площадке направлена в сторону, противоположную положительному направлению осей координат, то положительные составляющие напряжений направлены в стороны, противоположные соответствующим направлениям осей координат.*

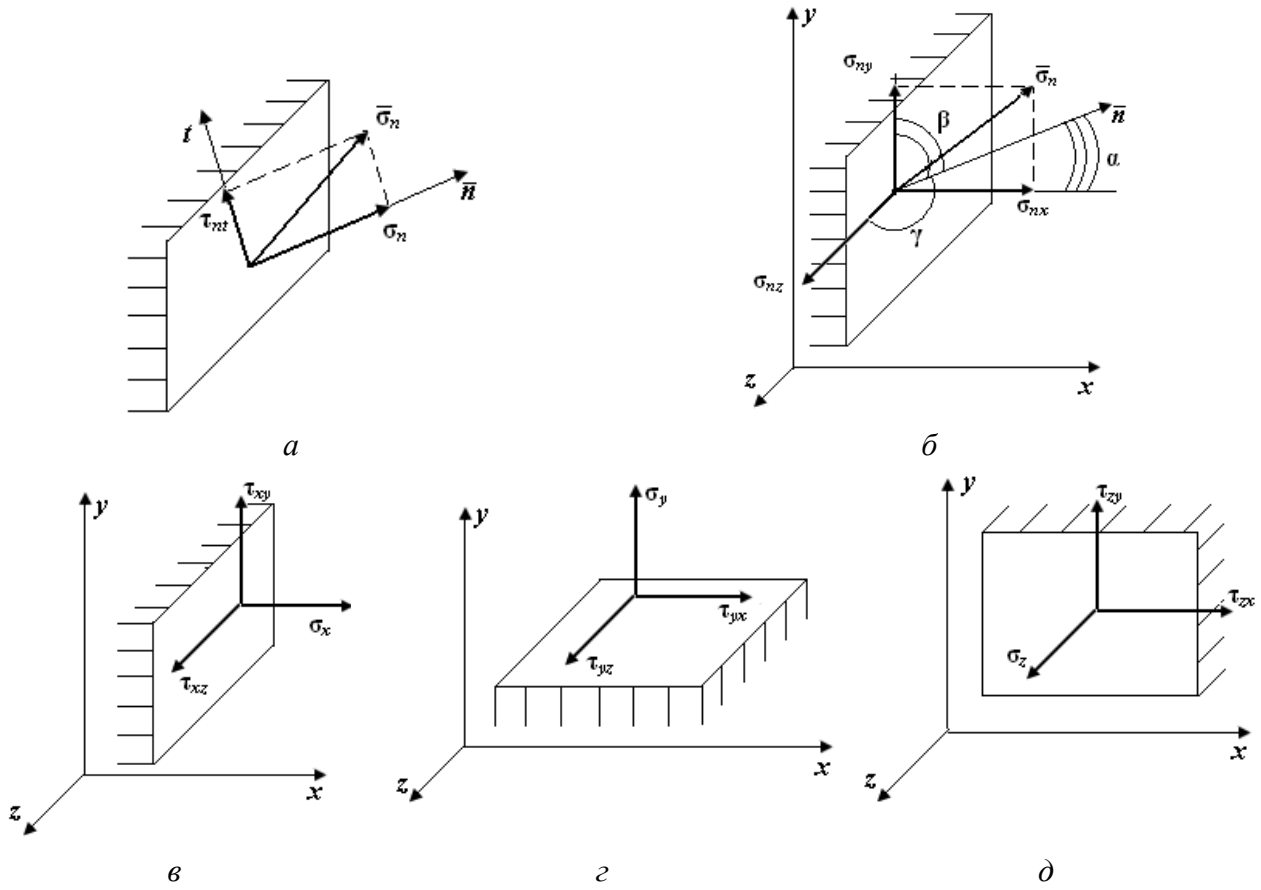


Рис. 6.1

Напряженное состояние в окрестности точки тела характеризуется девятью составляющими напряжений, которые обычно записывают в виде тензора напряжений

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

и называют компонентами тензора напряжений.

6.2. Уравнения равновесия элементарного тетраэдра

Допустим, известны все составляющие тензора напряжений в окрестности точки *A* деформируемого тела. Нужно определить полное напряжение $\overline{\sigma}_n$,

действующее на наклонной площадке с нормалью $\overline{n}$, проведенной через эту точку. Положение нормали к площадке относительно координатных осей x, y, z задано, соответственно, углами α, β, γ.

Вблизи точки *A* выделим небольшой фрагмент в форме тетраэдра, три грани которого перпендикулярны осям x, y, z, а четвертая, наклонная, перпендикулярна к направлению нормали (рис. 6.2). Положительное направление углов отсчитывается против часовой стрелки.

Напряжения, приложенные в центре тяжести каждой грани, отличаются от напряжений в окрестности точки *A*:

$$\sigma'_n = \sigma_n + d\sigma_n;$$

$$\sigma'_x = \sigma_x + d\sigma_x;\ \sigma'_y = \sigma_y + d\sigma_y;\ \sigma'_z = \sigma_z + d\sigma_z;$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + d\tau_{xy};\ \tau'_{yx} = \tau_{yx} + d\tau_{yx};\ \tau'_{zx} = \tau_{zx} + d\tau_{zx};$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + d\tau_{xz};\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} + d\tau_{yz};\ \tau'_{zy} = \tau_{zy} + d\tau_{zy}.$$

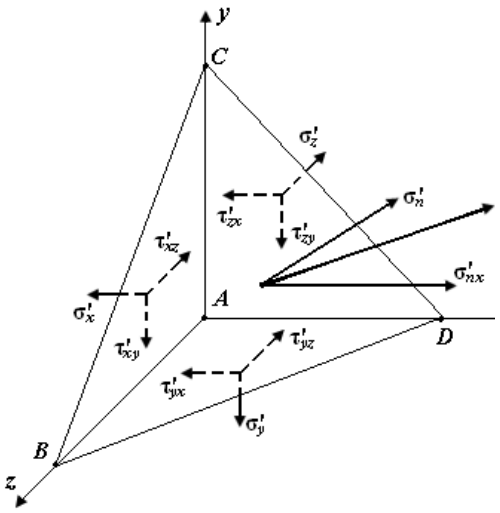


Рис. 6.2

Обозначим площадь наклонной грани *BCD* символом ΔF. Тогда площадь грани *ABC* можно записать как $\Delta F \cos\alpha$, грани *ABD* – $\Delta F \cos\beta$, грани *ACD* – $\Delta F \cos\gamma$. На грани *BCD* действует сила $\sigma'_n \Delta F$; на грани *ABC* – силы $\sigma'_x \Delta F \cos\alpha$, $\tau'_{xy} \Delta F \cos\alpha$, $\tau'_{xz} \Delta F \cos\alpha$; на грани *ABD* – силы $\sigma'_y \Delta F \cos\beta$, $\tau'_{yx} \Delta F \cos\beta$, $\tau'_{yz} \Delta F \cos\beta$; на грани *ACD* – силы $\sigma'_z \Delta F \cos\gamma$, $\tau'_{zx} \Delta F \cos\gamma$, $\tau'_{zy} \Delta F \cos\gamma$. Кроме этих сил к тетраэдру приложена объемная сила gdV, где dV – объем тетраэдра, связанный с площадью ΔF соотношением

$$dV = \frac{1}{3} h \Delta F.$$

Рассмотрим условия статического равновесия элементарного тетраэдра:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$-\sigma'_x \Delta F \cos\alpha - \tau'_{yx} \Delta F \cos\beta - \tau'_{zx} \Delta F \cos\gamma + \sigma'_{nx} \Delta F + \frac{1}{3} h \Delta F g_x = 0.$$

Разделим последнее выражение на ΔF. Устремляем объем тетраэдра к нулю. Напряжения, действующие на его гранях, будут стремиться к значениям напряжений, действующих в окрестности точки A: $\sigma'_x \to \sigma_x$, и т. д.

В этом случае сумму проекций всех сил на ось x можно записать следующим образом:

$$\sigma_{nx} - \sigma_x \cos\alpha - \tau_{yx} \cos\beta - \tau_{zx} \cos\gamma = 0.$$

Составив аналогичным образом уравнения проекций всех сил, действующих на тетраэдр, на оси y и z, соответственно получим:

$$\sigma_{ny} - \sigma_y \cos\beta - \tau_{xy} \cos\alpha - \tau_{zy} \cos\gamma = 0;$$

$$\sigma_{nz} - \sigma_z \cos\gamma - \tau_{xz} \cos\alpha - \tau_{yz} \cos\beta = 0.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma; \\ \sigma_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma; \\ \sigma_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) называются *уравнениями равновесия элементарного тетраэдра (уравнениями Коши).* С помощью уравнений Коши можно вычислить напряжения на любой известной площадке, проведенной через точку, если известны компоненты тензора напряжений в этой точке. В том случае, когда точка лежит на поверхности деформированного тела, в формулах (6.1) в левой части, вместо напряжений σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} необходимо записать составляющие вектора поверхностных сил p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}.

6.3. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие элементарного объема в форме прямоугольного параллелепипеда, выделенного из деформируемого тела (рис. 6.3). На левой, нижней, задней гранях его напряжения равны компонентам тензора напряжений, на остальных получают приращения:

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx;\ \sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy;\ \sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz;$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx;\ \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx;\ \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy;$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy;\ \tau'_{xy} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz;\ \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz.$$

Напряжение является непрерывной функцией, и ее дифференциал зависит только от той координаты, вдоль которой рассматривается данная функция.

Кроме напряжений на гранях параллелепипеда действует объемная сила, проекции которой на оси координат x, y, z обозначим g_x, g_y, g_z.

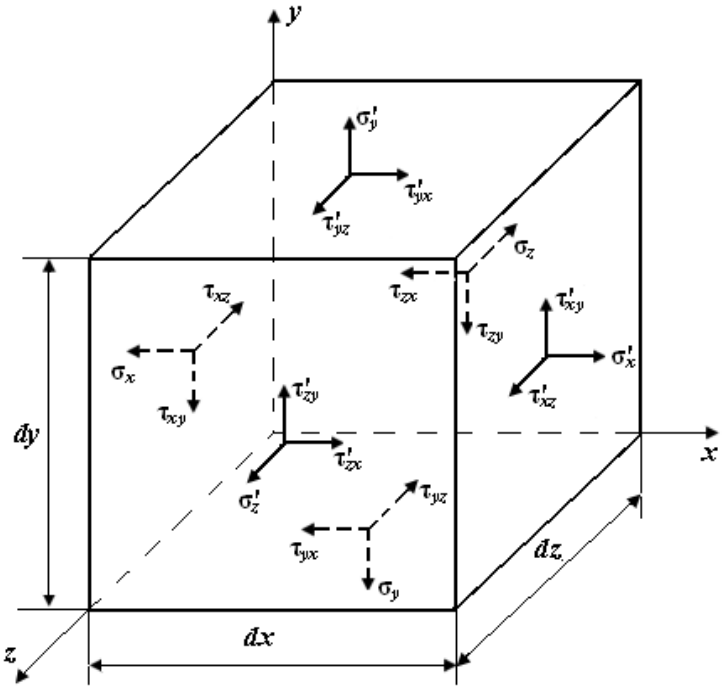


Рис. 6.3

На площадке $dydz$ действуют силы

$$\sigma_x dydz;\ \tau_{xy} dydz;\ \tau_{xz} dydz;$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz;\ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz;\ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz.$$

Аналогично записываются выражения для сил, действующих на площадке $dzdx$:

$$\sigma_y dzdx;\ \tau_{yx} dzdx;\ \tau_{yz} dzdx;$$

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dzdx;\ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx;\ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dzdx;$$

и на площадке $dxdy$:

$$\sigma_z dxdy;\ \tau_{zx} dxdy;\ \tau_{zy} dxdy;$$

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dxdy;\ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy;\ \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy.$$

Проекции объемной силы на оси координат x, y, z обозначим, соответственно, g_x, g_y, g_z.

Рассмотрим условия статического равновесия этого элементарного объема в форме параллелепипеда. Составим уравнение проекции сил, действующих на гранях параллелепипеда, на ось *x*:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{yx} dzdx + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx -$$

$$-\tau_{zx} dxdy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - g_x dxdydz = 0.$$

Составим уравнение проекции сил, действующих на гранях параллелепипеда, на ось *y*:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0;$$

$$-\sigma_y dzdx + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dzdx - \tau_{xy} dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz -$$

$$-\tau_{zy} dxdy + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy - g_y dxdydz = 0.$$

Составим уравнение проекции сил, действующих на гранях параллелепипеда, на ось *z*:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;$$

$$-\sigma_z dxdy + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{xz} dydz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz -$$

$$-\tau_{yz} dzdx + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dzdx - g_z dxdydz = 0.$$

Раскрыв скобки и проведя преобразования, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Система уравнений (6.2) характеризует изменение напряжений при переходе от одной точки деформируемого тела к другой. Эти уравнения называют *дифференциальными уравнениями равновесия Навье.*

Если можно пренебречь объемными силами, то уравнения Навье принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

6.4. Свойство парности касательных напряжений

Составим уравнения моментов всех сил, действующих на гранях параллелепипеда, относительно координатных осей:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0;$$

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz \frac{dx}{2} -$$

$$-\tau_{yx} dzdx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx \frac{dy}{2} = 0.$$

Умножив эти части уравнения на $2/(dxdydz)$, получим:

$$\tau_{xy} + \tau'_{xy} - \tau_{yx} - \tau'_{yx} = 0;$$

$$2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - 2\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy = 0.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получаем: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Составим уравнение моментов относительно оси *x*:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0;$$

$$\tau_{yz} dzdx \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dzdx \frac{dy}{2} -$$

$$-\tau_{zy} dxdy \frac{dz}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy \frac{dz}{2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0;$$

$$\tau_{zx} dxdy \frac{dz}{2} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy \frac{dz}{2} -$$

$$-\tau_{xz} dydz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz \frac{dx}{2} = 0.$$

Проведя аналогичные преобразования, получим:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Эти равенства выражают *свойство парности касательных напряжений: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательного напряжения, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собой по модулю.*

В результате число компонент тензора напряжений сокращается с девяти до шести и становится симметричным относительно главной диагонали:

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Тема 7. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

7.1. Напряжения на произвольно ориентированных площадках

Предположим, что в окрестности точки *A* деформированного тела известны все шесть компонент тензора напряжений и необходимо вычислить нормальное σ_n и касательное τ_{nt} напряжения, действующие на площадке, нормаль n к которой составляет углы α, β, γ, а касательная t – углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ с осями координат x, y, z.

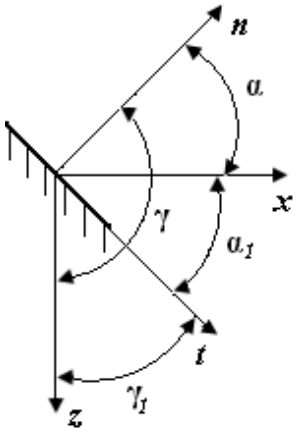


Рис. 7.1

Чтобы узнать нормальное напряжение через известные составляющие тензора напряжений, необходимо в уравнение $\sigma_n = \sigma_{nx}\cos\alpha + \sigma_{ny}\cos\beta + \sigma_{nz}\cos\gamma$ вместо σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} подставить их выражения из уравнений Коши:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma +$$

$$+2\tau_{xy}\cos\beta\cos\alpha + 2\tau_{yz}\cos\gamma\cos\beta + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \qquad (7.1)$$

Уравнение касательного напряжения можно получить, спроецировав полное напряжение, действующее на площадке, на направление касательной. Для этого следует σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} умножить, соответственно, на косинусы углов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$:

$$\tau_{nt} = \sigma_{nx}\ \cos\alpha_1 + \sigma_{ny}\cos\beta_1 + \sigma_{nz}\cos\gamma_1.$$

Подставив в последнее равенство вместо σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} их выражения из уравнений Коши, находим касательное напряжение, выраженное через составляющие тензора напряжений:

$$\tau_{nt} = \sigma_x\ \cos\alpha_1\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta_1\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma_1\cos\gamma +$$
$$+ \tau_{xy}(\cos\beta\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\beta_1) + \tau_{yz}(\cos\gamma\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\gamma_1) +$$
$$+ \tau_{zx}(\cos\gamma\ \cos\alpha_1 + \cos\alpha\ \cos\gamma_1). \qquad (7.2)$$

Рассмотрим случай, когда положение площадки известно. Представим, что она лежит в плоскости *xOz*, т. е. угол $\beta = \pi/2$ (рис. 7.1).

Тогда $\gamma = \pi/2 + \alpha;\ \alpha_1 = \pi/2 - \alpha;\ \gamma_1 = \alpha; \cos\gamma = -\sin\alpha\,;\ \cos\alpha_1 = \sin\alpha\,;\ \cos\gamma_1 = \cos\alpha.$

Запишем уравнения для σ_n и τ_{nt} для данной площадки:

$$\sigma_n = \sigma_x\cos^2\alpha - \sigma_z\sin^2\alpha - 2\tau_{zx}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Учитывая, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha\,;\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

уравнения для нормального и касательного напряжений для данной площадки можно представить в следующем виде:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zx}\sin 2\alpha\,; \qquad (7.3)$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha. \qquad (7.4)$$

7.2. Главные площадки и главные напряжения

В любой точке тела можно найти площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называются *главными*, а нормальные напряжения, действующие на них, – *главными напряжениями*.

Предположим, что одна из таких площадок известна. Полное напряжение на ней направлено по нормали, которая составляет с координатными осями x, y, z углы α, β, γ (рис. 7.2)

Уравнения (6.1) для главной площадки запишем в виде

$$\sigma_{nx} = \sigma\cos\alpha;\ \sigma_{ny} = \sigma\cos\beta;\ \sigma_{nz} = \sigma\cos\gamma.$$

Подставив в данные уравнения вместо σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz} выражения из уравнений (6.1), получим:

$$\begin{cases}\sigma\cos\alpha = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma;\\ \sigma\cos\beta = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma;\\ \sigma\cos\gamma = \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma;\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}(\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = 0;\\ \tau_{xy}\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma = 0;\\ \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0.\end{cases} \qquad (7.5)$$

Положение главной площадки определяется углами α, β, γ, которые нормаль составляет с осями координат x, y, z соответственно. Если относительно косинусов этих углов система уравнений (7.5) имеет решение, отличное от нуля, то можно найти хотя бы одну главную площадку. Меняя углы α, β, γ и поворачивая площадку, можно отыскать такое положение, где значения нормальных напряжений экстремальны. Для доказательства этого необходимо исследовать на экстремум уравнение (7.1) для σ_n как функцию косинусов, т. е.

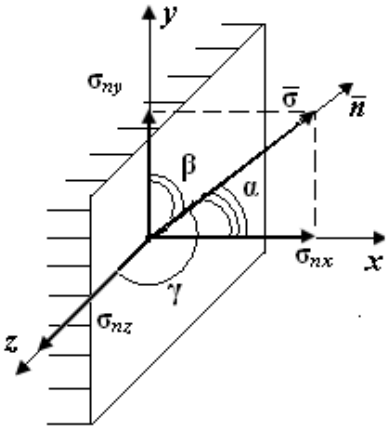


Рис. 7.2

$$\sigma_n = \sigma_n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Косинусы направляющих углов связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

В уравнение (7.1) добавим функцию, тождественно равную нулю:

$$\sigma_n = (\sigma_x + \sigma - \sigma)\cos^2\alpha + (\sigma_y + \sigma - \sigma)\cos^2\beta + (\sigma_z + \sigma - \sigma)\cos^2\gamma +$$
$$+ 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\alpha\cos\gamma =$$
$$= (\sigma_x - \sigma)\cos^2\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos^2\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+ 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\alpha\cos\gamma + \sigma(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Экстремальное значение σ_n находим, рассматривая совместно три условия:

$$\frac{\partial\sigma_n}{\partial\cos\alpha} = 0;\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial\cos\beta} = 0;\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial\cos\gamma} = 0.$$

Раскрыв частные производные, получаем:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos\alpha} = 2(\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + 2\tau_{xy}\cos\beta + 2\tau_{zx}\cos\gamma = 0;$$
$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos\beta} = 2\tau_{xy}\cos\alpha + 2(\sigma_y - \sigma)\cos\beta + 2\tau_{yz}\cos\gamma = 0;$$
$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos\gamma} = 2\tau_{zx}\cos\alpha + 2\tau_{yz}\cos\beta + 2(\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0.$$

Разделив обе части уравнений на два и перегруппировав члены, получим:

$$(\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = 0;$$
$$\tau_{xy}\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma = 0;$$
$$\tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0.$$

Сравнив полученную систему уравнений с системой (7.5), видим, что они совпадают. Значения экстремальных и нормальных напряжений реализуются на главных площадках.

Система уравнений (7.5) имеет ненулевое решение, если ее определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных косинусах, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} -$$
$$-(\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0.$$

Сгруппировав члены определителя и приняв обозначения

$$\Theta_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$
$$\Theta_{\mathrm{II}} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$
$$\Theta_{\mathrm{III}} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_z\tau_{xy}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2,$$

Приходим к алгебраическому уравнению

$$\sigma^3 - \Theta_{\mathrm{I}}\sigma^2 + \Theta_{\mathrm{II}}\sigma - \Theta_{\mathrm{III}} = 0, \qquad (7.6)$$

которое называют *кубическим.*

Все корни кубического уравнения являются вещественными и определяют нормальные напряжения, действующие на главных площадках.

Главные напряжения обозначают σ_1, σ_2, σ_3, причем принято считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Поскольку напряженное состояние в окрестности точки тела и, соответственно, главные напряжения в ней не могут меняться при изменении системы координат, уравнение (7.6) должно быть инвариантно (безразлично) к преобразованию системы координат. Поэтому коэффициенты Θ_I, Θ_{II}, Θ_{III} называют первым, вторым и третьим *инвариантами тензора напряжений*.

В окрестности точки деформированного тела различают напряженное состояние трех видов:

1) *линейное* – если только одно из главных напряжений не равно нулю $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

2) *плоское* – когда $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 \neq 0$;

3) *объемное* – когда все три главных напряжения отличны от нуля $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \ \sigma_3 \neq 0$.

7.3. Определение главных напряжений и главных площадок в частном случае

Рассмотрим случай, когда в некоторой точке тела известно положение одной из главных площадок (рис. 7.3). Нормальное (главное) напряжение на ней σ. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось *y* была перпендикулярна к этой площадке.

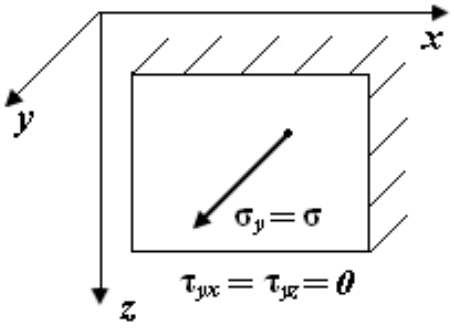


Рис. 7.3

Тензор напряжений принимает упрощенную форму

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Система уравнений (7.5) имеет вид

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_{zx}\cos\gamma = 0; \\ (\sigma_y - \sigma)\cos\beta = 0; \\ \tau_{zx}\cos\alpha + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma = 0, \end{cases} \qquad (7.7)$$

а определитель ее

$$(\sigma_y - \sigma)\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Возможны два решения системы:

$$\sigma_y - \sigma = 0; \ \sigma_y = \sigma \text{ – по условию задачи;}$$

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{zx}^2 = 0.$$

Тогда уравнение (7.6) примет вид

$$\sigma^2 - (\sigma_x - \sigma)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = 0.$$

Корни полученного уравнения

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2}\right]. \quad (7.8)$$

Положение главных площадок, на которых действуют напряжения σ_1 и σ_3, определяют, решив систему (7.7) относительно углов направляющих косинусов. Во втором уравнении этой системы $\sigma_y - \sigma \neq 0$ только при $\cos\beta = 0$, т. е. при $\beta = \pi/2$. Отсюда следует, что две нормали, характеризующие положение первой и третьей главных площадок, лежат в плоскости, параллельной *xOz*.

Для определения положения главных площадок можно воспользоваться формулой (7.4). На главных площадках касательные напряжения равны нулю, следовательно

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zx}\cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z}. \quad (7.9)$$

Два первых значения α, различающиеся на 90° и вычисленные по этой формуле, определяют положение главных площадок. Это указывает на то, что главные площадки в произвольной форме взаимно перпендикулярны.

7.4. Наибольшие касательные напряжения в окрестностях точки тела

Если в некоторой точке тела известны главные напряжения, то нормальные и касательные напряжения на произвольно ориентированной площадке, проведенной через эту точку, можно выразить через главные напряжения:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\cos 2\alpha;$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha;$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Касательное напряжение будет максимальным при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. на площадках, составляющих угол 45° с главными площадками.

РАЗДЕЛ 3. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ.

Тема 8. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ.

8.1. Перемещения и деформации. Составляющие деформации

Тело под действием прикладываемых к нему сил меняет свои форму и размеры – деформируется. При этом изменяется относительное расположение отдельных его частиц, вследствие их перемещения в пространстве.

Если рассматривать абсолютно жесткое тело, как это делается в теоретической механике, то при перемещении точек тела не меняется их взаимное расположение, т. е. тело не деформируется.

Перемещение не всегда сопровождается деформацией. Однако деформация тела невозможна без перемещения его точек.

Выделим в твердом теле точку *A* (рис. 8.1). Пусть под действием внешних сил эта точка займет положение *B*. Отрезок *AB* называют *вектором полного упругого перемещения* и обозначают $\overline{u}$. Проекции вектора полного упругого перемещения на оси декартовой системы координат x, y, z обозначают, соответственно, u_x, u_y, u_z и называют *составляющими перемещений точки*.

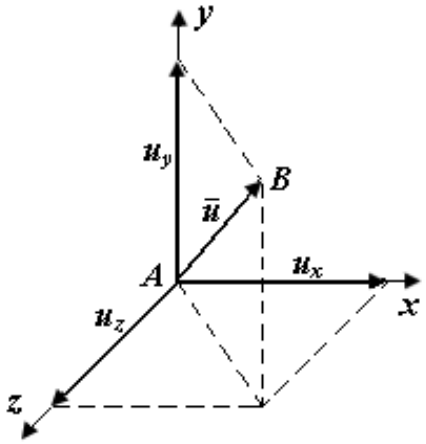


Рис. 8.1

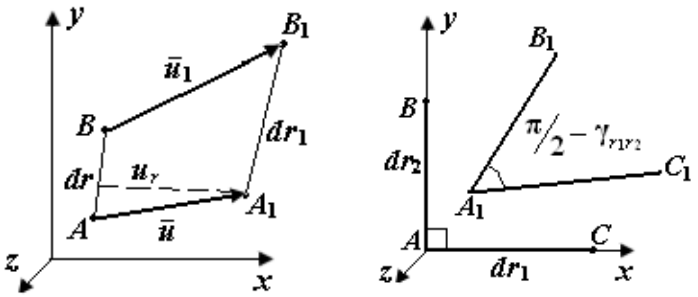
Деформация считается упругой, если исчезает после устранения вызвавшей ее силы, и остаточной – в противном случае. Свойство элемента конструкции проявлять упругую деформацию называют *упругостью*, остаточную деформацию – *пластичностью*.

Деформация – количественная мера изменения размеров в окрестности точки. Различают два вида деформации тела: относительное удлинение в окрестности точки и относительный сдвиг.

Относительная линейная деформация – относительное удлинение в окрестности точки *A* по направлению *r*:

$$\varepsilon_r = \frac{dr_1 - dr}{dr}.$$

Относительное удлинение будем считать положительным, если бесконечно малые отрезки увеличиваются по длине (рис. 8.2, *а*).



а *б*

Рис. 8.2

Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками *AB* и *AC* (рис. 8.2, *б*). После нагружения тела внешними силами этот угол изменяется, принимая значение $\pi/2 - \gamma_{r_1 r_2}$. Величина, равная изменению прямого угла после нагружения между двумя взаимно перпендикулярными направлениями, называется *относительным сдвигом, углом сдвига* или просто *сдвигом* и обозначается $\gamma_{r_1 r_2}$. Относительный сдвиг считается положительным, если прямой угол уменьшается.

Относительные линейные деформации в направлении координатных осей x, y, z обозначают $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, а изменения углов между этими отрезками: $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$ называют *составляющими деформации* в окрестности точки твердого тела. Составляющие деформации принято записывать в виде тензора деформации

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Тензор деформаций полностью характеризует деформацию тела в окрестности точки.

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность нормального напряжения (σ_n) относительному удлинению (ε_n):

$$\sigma_n = E\varepsilon_n. \qquad (8.1)$$

Коэффициент пропорциональности E называют *модулем нормальной упругости*, а коэффициент пропорциональности касательного напряжения и относительного сдвига – *модулем упругости при сдвиге G.*

Модуль нормальной упругости E и модуль упругости при сдвиге G определяют экспериментально. Величины E и G выражают в паскалях [Па].

Если относительное перемещение элементов изделия происходит без деформации, то такую конструкцию называют *геометрически изменяемой*; если перемещение имеет место только при деформации элементов – *геометрически неизменяемой*.

8.2. Связь между деформациями и перемещениями

Перемещение точек деформированного тела характеризуется траекториями, по которым происходит движение. Считаем, что жесткое перемещение отсутствует. Поскольку перемещения разных точек деформируемого тела различны, вектор перемещения является функцией координат точек тела, а в динамических задачах – и функцией времени.

В дальнейшем будем полагать, что как вектор $\overline{u}$, так и его проекции в пределах рассматриваемого тела (элемента конструкции) являются непрерывными функциями вместе с их двумя первыми производными, ввиду того, что сплошность тела при деформациях сохраняется.

В рамках основной модели механики будем иметь дело с упругими деформациями, поэтому правомерно принять допущение о малости величин u_x, u_y, u_z по сравнению с размерами деформируемого тела и, как следствие, линейной зависимости между перемещениями и деформациями.

Найдем связь между составляющими перемещений и составляющими деформаций. Сначала рассмотрим связь между линейными составляющими деформаций и составляющими $\overline{u}$ перемещений (см. рис. 8.2). Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет отрезок AB с осями координат x, y, z соответственно. Допустим, что после деформации отрезок AB занял положение A_1B_1; $\overline{u}$ – вектор перемещения точки A; $\overline{u}_1$ – вектор перемещения точки B.

Точки A, B, A_1, B_1 имеют следующие координаты:

$A\ -x, y, z$;

$B - x + dr\ \cos\alpha\,, y + dr\ \cos\beta\,, z + dr\ \cos\gamma\,$;

$A_1 - x + u_x,\ y + u_y,\ z + u_z$;

$B_1 - x + dr\ \cos\alpha + u_{1x},\ y + dr\ \cos\beta + u_{1y},\ z + dr\ \cos\gamma + u_{1z}$.

Разложим составляющие перемещений $u_{1x},\ u_{1y},\ u_{1z}$ точки B в ряд Тейлора по степеням dr и, отбросив малые величины высшего порядка, выразим их через составляющие перемещений $u_x,\ u_y,\ u_z$ точки A:

$$u_{1x} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial r} dr;\ u_{1y} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial r} dr;\ u_{1z} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr.$$

Тогда координаты точки B_1 будут следующими:

$$x + dr\ \cos\alpha + \frac{\partial u_x}{\partial r} dr;\ y + dr\ \cos\beta + \frac{\partial u_y}{\partial r} dr;\ z + dr\ \cos\gamma + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr.$$

Относительная линейная деформация отрезка

$$\varepsilon_r = \frac{dr_1 - dr}{dr},$$

$$dr_1 = \left[\begin{array}{c} \left(dr\ \cos\alpha + \frac{\partial u_x}{\partial r} dr \right)^2 + \\ + \left(dr\ \cos\beta + \frac{\partial u_y}{\partial r} dr \right)^2 + \left(dr\ \cos\gamma + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr \right)^2 \end{array} \right]^{1/2};$$

$$dr_1 = dr \left[\begin{array}{c} (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial r} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma \right) \end{array} \right]^{1/2},$$

где $\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2$ – бесконечно малые величины, которыми можно пренебречь.

Сумма квадратов направляющих косинусов двух взаимно перпендикулярных отрезков равна единице. Следовательно,

$$dr_1 = dr \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma \right)}.$$

Развернув радикал по биному Ньютона в ряд и отбросив члены второго порядка малости, находим:

$$dr_1 = dr \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma \right);$$

$$\varepsilon_r = \frac{dr \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma \right) - dr}{dr};$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma.$$

Проекцию вектора перемещений на направление деформации обозначим $\overline{u}_r$:

$$u_r = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_x}{\partial r}\cos\alpha + \frac{\partial u_y}{\partial r}\cos\beta + \frac{\partial u_z}{\partial r}\cos\gamma.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \qquad (8.2)$$

Линейная деформация по направлению dr равна частной производной от проекции вектора перемещений на это направление.

Если поочередно совмещать направление деформации с направлением координатных осей x, y, z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

получим связь составляющих линейных деформаций с составляющими перемещений.

Для определения зависимости между составляющими угловых деформаций и составляющими перемещений рассмотрим два взаимно перпендикулярных отрезка до деформации и после нее (рис. 8.3).

Обозначим проекции вектора перемещения точки A на направление dr_1 символом u_{r_1}, а на направление $dr_2 - u_{r_2}$. Проекции векторов перемещений точек B и C на те же направления можно записать в виде

$$u_{r_1} + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_2} dr_2;\ u_{r_2} + \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_2} dr_2 \text{ для точки } B;$$

$$u_{r_1} + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1} dr_1;\ u_{r_2} + \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_1} dr_1 \text{ для точки } C.$$

Углы α_1 и α_2 – углы поворота отрезков AC и AB в результате деформации. Относительная угловая деформация $\gamma_{r_1 r_2} = \alpha_1 + \alpha_2$.

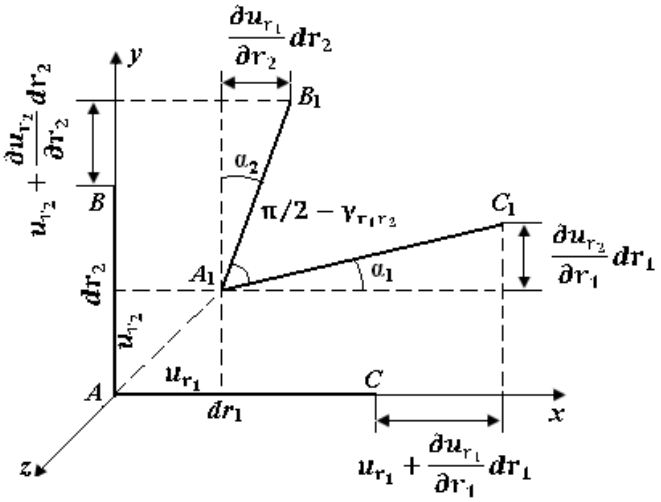


Рис. 8.3

С учетом принятых обозначений получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_1}dr_1}{dr_1 + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1}dr_1} = \frac{\frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_1}}{1 + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_1}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_2}dr_2}{dr_2 + \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_2}dr_2} = \frac{\frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_2}}{1 + \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_2}}.$$

Вследствие малости отрезков dr_1 и dr_2 можно считать, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_1};\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_2},$$

ввиду малости углов поворота α_1 и α_2 отрезков dr_1 и dr_2:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \alpha_1;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \alpha_2.$$

Тогда относительная угловая деформация

$$\gamma_{r_1 r_2} = \frac{\partial u_{r_2}}{\partial r_1} + \frac{\partial u_{r_1}}{\partial r_2}. \tag{8.3}$$

Если направления деформации поочередно совмещать с направлениями координатных осей, то получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Таким образом, выведены шесть дифференциальных зависимостей, которые связывают составляющие деформаций с составляющими перемещений:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y};\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Дифференциальные уравнения (8.4) впервые были получены Коши и носят его имя. Они позволяют вычислить относительные линейные и угловые деформации по известным составляющим перемещений.

8.3. Уравнения сплошности

Деформации можно определить по известным перемещениям как функции координат точек тела путем дифференцирования этих функций согласно

уравнениям (8.4). Значительно сложнее рассчитать перемещения по известным деформациям, так как при этом необходимо интегрировать уравнения в частных производных. Для решения этой задачи необходимо установить связь между шестью составляющими деформаций, т. е. найти условия, позволяющие интегрировать уравнения (8.4).

Составляющие деформаций должны зависеть друг от друга, так как они являются производными трех произвольных функций. Функции $u_x,\ u_y,\ u_z$ – непрерывные, следовательно, и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ должны быть такими, чтобы обеспечить эту непрерывность. Совокупность функций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ описывает полную картину деформации. Следовательно, условия сплошности тела в процессе деформации можно рассматривать как условия совместности деформаций.

Условия интегрируемости уравнений (8.4) представляют собой шесть уравнений, которые получают следующим образом.

Продифференцировав γ_{xy} по x и по y, γ_{yz} – по y и по z, γ_{zx} – по z и по x, получим первую группу из трех уравнений:

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 u_z}{\partial z\partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial z^2\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial z^2\partial x} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial z\partial x^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{xz}}{\partial x^2}.$$

Для получения второй группы уравнений продифференцируем γ_{xy} по z, γ_{yz} – по x, γ_{zx} – по y. Далее просуммируем их таким образом, чтобы в каждом из уравнений осталась зависимость только от одной из составляющих перемещений:

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial y};$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial z};$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}.$$

Продифференцируем первое выражение по x, второе по y, третье по z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial z\partial y} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^3 u_y}{\partial x\partial z\partial y}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^3 u_z}{\partial x\partial y\partial z}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\partial y}.$$

Получены шесть уравнений, связывающих линейные и угловые деформации:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2};\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z};\\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2};\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\partial z};\\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x^2};\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\partial y}.\end{cases} \qquad (8.5)$$

Таким образом, доказано, что линейные и угловые деформации должны быть связаны так, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (8.4). Физический смысл уравнений (8.5): тело как до деформации, так и после нее остается сплошным, неразрывным. Поэтому эти уравнения называют *уравнениями сплошности* (неразрывности) или *уравнениями совместности деформаций Сен-Венана* (по имени ученого, который их вывел).

8.4. Главные деформации и главные оси

Составим выражения для определения линейной и угловой деформации в произвольном направлении по заданным составляющим тензора деформаций. Применим формулу для дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dr}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dr}=\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma,$$

продифференцируем уравнение для относительной линейной деформации (8.2), подставив в него выражение для проекции вектора перемещений на направление деформации:

$$u_r=u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma.$$

В результате получим

$$\varepsilon_r=\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u_x}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u_x}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\alpha+$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u_y}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u_y}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\beta+$$

$$+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u_z}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u_z}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma=$$

$$=\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos^2\alpha+\frac{\partial u_y}{\partial y}\cos^2\beta+\frac{\partial u_z}{\partial z}\cos^2\gamma+$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\cos\alpha\cos\beta+\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\cos\beta\cos\gamma+$$

$$+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\cos\gamma\cos\alpha.$$

Заменив производные составляющими деформаций в точке, получим

$$\varepsilon_r=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\cos^2\beta+\varepsilon_z\cos^2\gamma+\gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta+\gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+\gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \qquad (8.6)$$

Обозначив углы между отрезком dr_1 и осями координат x,y,z соответственно α,β,γ, углы между отрезком dr_2 и осями координат x,y,z – соответственно $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, проекции векторов перемещения точек на направления деформации dr_1, dr_2

$$u_{r_1}=u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma;$$
$$u_{r_2}=u_x\cos\alpha_1+u_y\cos\beta_1+u_z\cos\gamma_1.$$

Продифференцировав уравнение (1.49) и проведя преобразования, получим:

$$\gamma_{r_1r_2}=2\varepsilon_x\cos\alpha\cos\alpha_1+2\varepsilon_y\cos\beta\cos\beta_1+2\varepsilon_z\cos\gamma\cos\gamma_1+$$
$$+\gamma_{xy}(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1)+\gamma_{yz}(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1)+$$
$$+\gamma_{zx}(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1). \qquad (8.7)$$

Таким образом, зная составляющие деформаций в точке деформированного тела, можно определить, используя выражения (8.6) и (8.7), линейные и угловые деформации в произвольном направлении. Сравнив выражения (7.1), (7.2) с выражениями (8.6), (8.7), можно убедиться в их одинаковой структуре. Это означает, что компоненты деформаций в точке тела, так же как и компоненты напряжений, составляют тензор деформаций, который характеризует деформируемое состояние точки твердого тела.

Для изотропной среды в каждой точке существует три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения имеют максимальные значения. Применительно к тензору деформаций можно утверждать, что в каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярных направления, углы между которыми при де-

формации не изменяются, т. е. сдвиги равны нулю: $\gamma_{xy} = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0$. Эти направления называют *главными осями деформации.* Линейные деформации по главным осям носят название *главных деформаций* и обозначаются $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

8.5. Закон Гука

Допустим, что деформируемое твердое тело однородно и изотропно. Тогда в силу однородности связи между напряжениями и деформациями во всех точках тела будут одинаковыми, а в силу изотропности при любом нагружении главные оси деформации совпадут с главными осями напряжений. Отсюда можно считать, что главные деформации являются функциями только главных напряжений, а главные напряжения – только главных деформаций: $\varepsilon_1 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3);\ \varepsilon_2 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3);\ \varepsilon_3 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Впервые линейная зависимость между деформациями и напряжениями, не превышающими определенного для каждого материала предела (предела пропорциональности), была установлена Гуком и носит название закона Гука. Если деформации малы и справедлив закон Гука, то вступает в силу *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции): *напряжения и деформации, возникающие в теле, находящемся под действием системы сил, не зависят от того, действует ли на данное тело какая-либо другая система сил.*

Отсюда вытекают два следствия:

1) *если силы, действующие на тело, увеличить в некоторое число раз, то напряжения и деформации увеличатся в то же самое число раз;*

2) *напряжения и деформации в теле, находящемся под воздействием суммы сил, равны сумме напряжений и деформаций, возникающих под действием каждой из этих сил в отдельности.*

Рассмотрим стержень (рис. 8.4), нагруженный внешними силами вдоль оси. В этом случае относительная линейная деформация определяется выражениями

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx};\ \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

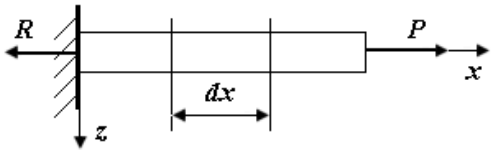


Рис. 8.4

Вдоль оси x под действием внешней силы P стержень удлиняется, вдоль оси z стержень сжимается. Взятое по модулю отношение поперечного относительного сжатия тела к продольному относитель-

ному удлинению называется *коэффициентом Пуассона*

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|.$$

Коэффициент Пуассона определяется экспериментально и для всех материалов лежит в пределах от 0 до 0.5.

Если рассматривать сечение в стержне, где возникают только главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то в случае линейного напряженного состояния закон Гука согласно (8.1) имеет вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Величины E, ν являются характеристиками жесткости материала.

В случае объемного напряженного состояния деформации исследуют вдоль трех главных осей деформации:

1) вдоль первой главной оси

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_1^{(3)},$$

где

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{E};\ \varepsilon_1^{(2)} = -\nu\frac{\sigma_2}{E};\ \varepsilon_1^{(3)} = -\nu\frac{\sigma_3}{E};$$

2) вдоль второй

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_2^{(3)},$$

где

$$\varepsilon_2^{(1)} = -\nu\frac{\sigma_1}{E};\ \varepsilon_2^{(2)} = \frac{\sigma_2}{E};\ \varepsilon_2^{(3)} = -\nu\frac{\sigma_3}{E};$$

3) вдоль третьей

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3^{(1)} + \varepsilon_3^{(2)} + \varepsilon_3^{(3)},$$

где

$$\varepsilon_3^{(1)} = -\nu\frac{\sigma_1}{E};\ \varepsilon_3^{(2)} = -\nu\frac{\sigma_2}{E};\ \varepsilon_3^{(3)} = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Обобщенно закон Гука в случае объемного напряженного состояния выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)];\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)];\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Выражения (8.8) можно записать в другом виде – через первый инвариант напряжений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_1 - \nu\Theta_{\text{I}}];$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_2 - \nu\Theta_{\text{I}}]; \qquad (8.9)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_3 - \nu\Theta_{\text{I}}].$$

Таким образом, уравнения закона Гука связывают главные деформации и главные напряжения.

8.6. Связь между составляющими деформаций и составляющими напряжений

Дальнейшие преобразования выражений закона Гука возможны при переходе от главных деформаций и главных напряжений к деформациям и напряжениям вдоль координатных осей, не совпадающих с главными осями. Для этого воспользуемся выражением (8.6) и поочередно будем совмещать направление деформации с направлением координатных осей x, y, z, а направление координатных осей – с направлением главных осей. Тогда для случая совмещения направления деформации с осью координат x выражение (8.6) примет вид

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma.$$

Подставив в это выражение значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из формулы (8.9), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\sigma_1 \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sigma_2\cos\beta\cos\beta_1 + \sigma_3\cos\gamma\cos\gamma_1\right) -$$
$$-\frac{1}{E}\nu\Theta_{\text{I}}(\sigma_1\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sigma_2\cos\beta\cos\beta_1 + \sigma_3\cos\gamma\cos\gamma_1),$$

где $\sigma_x = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma$ в соответствии с формулой (7.1) для нормальных напряжений на наклонной площадке, выраженных через главные напряжения. В результате

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta_{\text{I}}].$$

Окончательно получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta_{\text{I}}];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_y - \nu\Theta_{\text{I}}\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_z - \nu\Theta_{\text{I}}\right],$$

или можно записать в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].$$

Подобные зависимости можно установить между сдвигами и касательными напряжениями. В выражении (8.7) совместим направления деформации r_1 и r_2, соответственно, с осями координат x и y, а оси координат – с главными осями:

$$\gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_1 \cos\alpha \cos\alpha_1 + 2\varepsilon_2 \cos\beta \cos\beta_1 + 2\varepsilon_3 \cos\gamma \cos\gamma_1.$$

Подставим в это выражение значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E}\left((1+\nu)\sigma_1 \cos\alpha \cos\alpha_1 + \sigma_2 \cos\beta \cos\beta_1 + \sigma_3 \cos\gamma \cos\gamma_1\right) -$$

$$-\frac{2}{E}\nu\Theta_{\text{I}}(\sigma_1 \cos\alpha \cos\alpha_1 + \sigma_2 \cos\beta \cos\beta_1 + \sigma_3 \cos\gamma \cos\gamma_1).$$

Здесь $\sigma_1 \cos\alpha \cos\alpha_1 + \sigma_2 \cos\beta \cos\beta_1 + \sigma_3 \cos\gamma \cos\gamma_1 = \tau_{nt} = \tau_{xy}$ – касательные напряжения на наклонной площадке, выраженные через главные напряжения (7.2); $\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1 = 0$, потому что сумма попарных произведений направляющих косинусов двух взаимно перпендикулярных отрезков равна нулю. После преобразования получим

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy},$$

где $E/\left(2(1+\nu)\right) = G$ – модуль нормальной упругости второго рода, или модуль сдвига, который характеризует сопротивление материала деформации сдвига.

Окончательные выражения для угловых деформаций выглядят так:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Итак, равенства, связывающие составляющие деформаций и напряжений имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right];\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right];\ \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G}. \end{cases}$$

Полученная форма записи закона Гука применяется при определении составляющих деформаций по известным составляющим напряжений в окрестности точки деформированного твердого тела.

РАЗДЕЛ 4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПО СТЕРЖНЕВОЙ СХЕМЕ.

Тема 9. НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ, НАГРУЖЕННОМ ПО ТОРЦАМ

9.1. Массовые и геометрические характеристики сечений

Сопротивление тела различным видам деформации зависит не только от материала, из которого она изготовлена, ее размеров, но также и от массовых характеристик, формы поперечных сечений и их расположения относительно направления действия нагрузки, т. е. геометрических характеристик сечения.

К массовым характеристикам относятся масса тела и массовый момент инерции тела.

Масса тела – мера его инерционных и гравитационных свойств. В механике масса тела принята равной сумме масс всех его малых частей и не зависящей от скорости его движения. Инертность тела проявляется в том, что под действием внешних сил оно изменяет свое движение, постепенно приобретая конечное ускорение. Единица измерения массы – килограмм [кг].

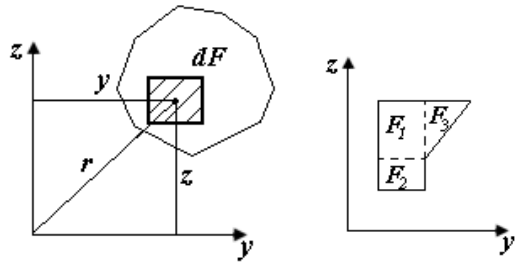
Массовый момент инерции тела относительно оси – мера инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси. Единица измерения – килограмм метр в квадрате [кг · м^2]. Массовый момент инерции тела вычисляют по формуле

$$I = \int_m r^2\, dm,$$

где r – расстояние от элементарной массы до оси вращения; dm – элементарная масса.

Величину $\sqrt{I/m}$ называют *радиусом инерции тела* относительно соответствующей оси.

Основными геометрическими характеристиками сечения тела являются: площадь поперечного сечения, статический момент площади, осевой момент инерции сечения, момент сопротивления сечения, центробежный момент инерции сечения, полярный момент инерции сечения, радиус инерции.



а *б*

Рис. 9.1

Статический момент $S_y\,(S_z)$ площади F относительно оси $y\,(z)$ представляют интегралом, взятым по рассмотренной площади:

$$S_y = \int_F zdF\,;\; S_z = \int_F ydF,$$

где y и z – координаты центра тяжести элементарной площадки, dF – элементарная площадка (рис. 9.1, *а*). Единица измерения – метр в кубе [м^3].

Статические моменты площади сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения (центральных осей), равны нулю.

В практических расчетах при определении статических моментов редко возникает необходимость в интегрировании. Сложное сечение разбивают на ряд простых: прямоугольник, треугольник, круг и т.д. (рис. 9.1, *б*). Поскольку $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \ldots + F_n$, можно записать

$$S_y = \int_F zdF = \int_{F_1} zdF + \int_{F_2} zdF + \cdots + \int_{F_n} zdF,$$

откуда

$$S_y = \sum_{i=0}^{n} S_{yi} = \sum_{i=0}^{n} F_i\, z_i.$$

Аналогично

$$S_z = \sum_{i=0}^{n} S_{zi} = \sum_{i=0}^{n} F_i\, y_i.$$

Осевые моменты инерции сечения I_y, I_z, *центробежный момент инерции* I_{yz}, *полярный момент инерции* I_p представляют собой интегралы по площади

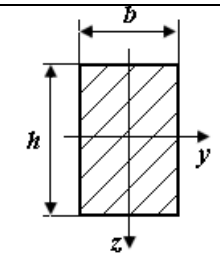
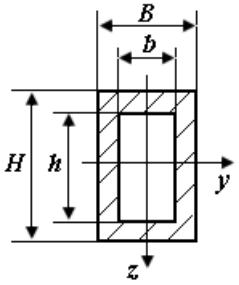
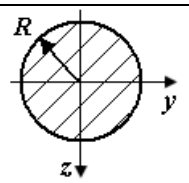
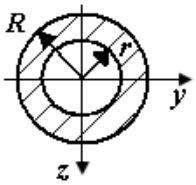
$$I_y = \int_F z^2 dF\,;\; I_z = \int_F y^2 dF\,;\; I_{yz} = \int_F yzdF\,;\; I_p = \int_F r^2 dF,$$

где r – расстояние от центра тяжести сечения элементарной площадки до начала координат.

Единица измерения моментов инерции – метр в четвертой степени [м^4].

В табл. 9.1 приведены выражения для моментов инерции наиболее часто встречающихся случаев.

Табл. 9.1

Форма сечения	I_y	I_z	$W_и$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}\left(\frac{\frac{b^3h}{12}}{\frac{b}{2}}\right)$
	$\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$	$\frac{B^3H}{12}-\frac{b^3h}{12}$	$\frac{\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}}{\frac{H}{2}}\left(\frac{\frac{B^3H}{12}-\frac{b^3h}{12}}{\frac{B}{2}}\right)$
	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R}$
	$\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\frac{\pi R^4}{4}-\frac{\pi r^4}{4}}{R}$

Моменты инерции сечения называются центральными, если оси, относительно которых они вычислены, проходят через центр тяжести сечения. Подынтегральные выражения осевого и полярного моментов инерции положительны при любом положении координатных осей, и поэтому эти моменты всегда больше нуля.

Центробежный момент инерции I_{yz} может быть положительным, отрицательным, и равным нулю. Расстояние r связано с координатами y и z центра тяжести элементарной площадки dF равенством $r^2 = y^2 + z^2$, поэтому

$$I_p = \int_F r^2 dF = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF.$$

Отсюда полярный момент инерции сечения $I_p = I_y + I_z$.

Момент сопротивления сечения $W_и, W_к$ характеризует способность тела сопротивляться изгибу или кручению в рассматриваемом сечении. Момент сопротивления равен осевому или полярному моменту инерции, деленному на расстояние от оси (от центра тяжести сечения) до наиболее удаленной точки сечения. Единица измерения – метр в кубе [м^3].

9.2. Элементарное решение дифференциальных уравнений равновесия деформируемого тела

Одной из задач механики является исследование напряженного состояния, которое появляется в деформируемом теле при его нагружении.

Решение данной задачи сводится к нахождению шести компонент тензора напряжений. Для отыскания этих функций можно воспользоваться дифференциальными уравнениями равновесия (6.2), однако их недостаточно, так как уравнений три, а неизвестных функций – шесть. Такие задачи являются статически неопределимыми. Для раскрытия статической неопределимости к решению привлекают уравнения из теории деформаций – условия сплошности (8.5).

Когда $g_x = g_y = g_z$, система (6.2) становится системой однородных уравнений. Уравнения сплошности будут выполнены, если напряжения представить в виде полиномов первой степени вида

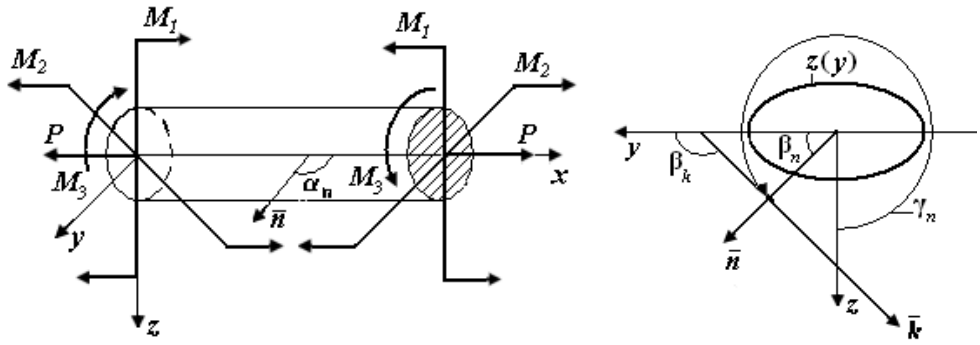
$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_{10} + a_{11} y + a_{12} z; \\ \sigma_y &= a_{20} + a_{21} z + a_{22} x; \\ \sigma_y &= a_{30} + a_{31} x + a_{32} y; \\ \tau_{xy} &= a_{40} + a_{41} z; \\ \tau_{yz} &= a_{50} + a_{51} x; \\ \tau_{zx} &= a_{60} + a_{61} y. \end{aligned} \qquad (9.1)$$

Составляющие деформаций, по закону Гука линейно связанные с напряжениями, также являются линейными функциями координат x, y, z, и их вторые производные обращаются в ноль. Таким образом, уравнения (9.1) удовлетворяют и дифференциальным уравнениям равновесия, и условиям сплошности. Они являются элементарными решениями основных дифференциальных уравнений равновесия деформируемого твердого тела. Коэффици-

енты, входящие в эти уравнения, представляют постоянные интегрирования. Их следует находить в каждом частном случае в зависимости от условий нагружения и геометрии рассматриваемого тела.

9.3. Напряжения в стержне, нагруженном по торцам

Рассмотрим призматический стержень с круглым поперечным сечением, который находится в равновесии под действием системы сил, приложенных к торцам.



а *б*

Рис. 9.2

При исследовании напряженного деформированного состояния в таком стержне необходимо учитывать, что в любом поперечном сечении (рис. 9.2, *а*) $N = P,\ Q_y = Q_z = 0,\ M_x = M_3,\ M_y = M_1,\ M_z = M_2$; боковая поверхность стержня свободна от нагрузок, т. е. $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$; стержень призматический, следовательно, в любой точке поверхности нормаль к этой поверхности перпендикулярна к оси x; угол между осью стержня и нормалью к боковой поверхности $\alpha_n = \pi/2$.

Определим компоненты тензора напряжений, возникающие в сечении стержня.

Нормальное напряжение σ_x. Воспользуемся условиями статической эквивалентности, которые связывают напряжение σ_x и внутренние силы. Подставим в это выражение полином из (9.1) и вычислим значения коэффициентов $a_{10},\ a_{11},\ a_{12}$:

$$\int_F \sigma_x\, dF = N;$$

$$\int_F (a_{10} + a_{11}y + a_{12}z)\, dF = a_{10}\int_F dF + a_{11}\int_F ydF + a_{12}\int_F z\, dF =$$

$$= a_{10} + a_{11}S_z + a_{12}S_y,$$

где S_y и S_z – статические моменты площади сечения относительно осей y и z. Если оси y и z – центральные, то $S_y = S_z = 0$. Тогда

$$a_{10}F = N;\ a_{10} = N/F\,;$$

$$\int_F \sigma_x\, z\, dF = M_y;\ \int_F (a_{10} + a_{11}y + a_{12}z)z\ dF =$$

$$= a_{10}\int_F z\, dF + a_{11}\int_F yz\, dF + a_{12}\int_F z^2\, dF = a_{10}S_y + a_{11}I_{yz} + a_{12}I_y,$$

где I_{yz} – центробежный момент инерции; I_y – осевой момент инерции.

Оси сечения всегда можно выбрать так, чтобы они были главными, т. е. $I_{yz} = 0$. Тогда

$$a_{12}I_y = M_y;\ a_{12} = M_y/I_y.$$

Аналогично

$$\int_F \sigma_x\, y\, dF = -M_z;\ a_{10}\int_F y\, dF + a_{11}\int_F y^2\, dF + a_{12}\int_F yz\, dF =$$
$$= a_{10}S_z + a_{11}I_z + a_{12}I_{yz};\ a_{11} = -M_z/I_z.$$

Окончательно получим

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y. \qquad (9.2)$$

Трехчленная формула (9.2) справедлива при выполнении двух условий: 1) ось x проходит через центр тяжести сечения; 2) оси y и z – главные центральные оси инерции сечения.

Напряжения $\boldsymbol{\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}}$. Так как поверхностные силы на боковой поверхности отсутствуют, уравнения Коши для точек на поверхности имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = p_{nx} = 0; \\ \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma = p_{ny} = 0; \\ \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z \cos\gamma = p_{nz} = 0. \end{cases}$$

Для призматического стержня $\alpha_n = \pi/2\,, \cos\alpha_n = 0$.

Следовательно, нормаль к любой точке контура будет лежать в плоскости yOz. Так как угол $\gamma_n = 270° + \beta_n,\ \cos\gamma_n = \sin\beta_n$ (рис. 9.2), то

$$\begin{cases} \tau_{yx}\cos\beta_n + \tau_{zx}\sin\beta_n = 0; \\ \sigma_y \cos\beta_n + \tau_{zy}\sin\beta_n = 0; \\ \tau_{yz}\cos\beta_n + \sigma_z \sin\beta_n = 0. \end{cases} \qquad (9.3)$$

Избавившись от τ_{yz}, получим зависимость

$$\sigma_y = \sigma_z \operatorname{tg}^2 \beta_n. \tag{9.4}$$

Пусть функция $z(y)$ определяет контур поперечного сечения. Тогда справедливо равенство $z'(y) = \operatorname{tg} \beta_k$ (рис. 9.2, *б*). Так как векторы $\overline{n}$ и $\overline{k}$ взаимно перпендикулярны и составляют с третьей прямой (осью y) углы β_n и β_k, то справедливо равенство $\operatorname{tg} \beta_n \operatorname{tg} \beta_k = -1$, следовательно

$$\operatorname{tg} \beta_n = -\frac{1}{z'(y)}. \tag{9.5}$$

С учетом соотношения (9.5), подставив в уравнение (9.4) выражения для σ_y, σ_z из (9.1) получим

$$a_{20} + a_{21} z + a_{22} x = [z'(y)]^{-2} \, (a_{30} + a_{31} x + a_{32} y).$$

Данное уравнение не имеет решения относительно функции $z(y)$ при коэффициентах, отличных от нуля, следовательно,

$$a_{20} = a_{21} = a_{22} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0.$$

Это приводит к условию

$$\sigma_y = 0; \; \sigma_z = 0; \; \tau_{yz} = 0.$$

Тогда

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha_n + \sigma_y \cos^2 \beta_n + \sigma_z \cos^2 \gamma_n +$$
$$+ 2\tau_{xy} \cos \beta_n \cos \alpha_n + 2\tau_{yz} \cos \gamma_n \cos \beta_n + 2\tau_{zx} \cos \gamma_n \cos \alpha_n = 0.$$

Это условие отсутствия поперечного обжатия стержня нельзя путать с условием для поперечной деформации. Поперечная деформация у стержня, нагруженного по торцам, отлична от нуля.

Касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz} связаны между собой первым уравнением системы (9.3):

$$\tau_{xy} = -\tau_{xz} \operatorname{tg} \beta_n.$$

С учетом выражения (9.5) последнее равенство можно представить в виде

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} \frac{1}{z'(y)}. \tag{9.6}$$

В уравнения для τ_{xy}, τ_{xz} подставим полиномы из (9.1)

$$\int_F \tau_{xy} \, dF = Q_y = 0; \; \int_F (a_{40} + a_{41} z) \, dF = a_{40} F + a_{41} S_y = 0;$$

$$\int_F \tau_{xz} \, dF = Q_z = 0; \; \int_F (a_{60} + a_{61} y) \, dF = a_{60} F + a_{61} S_z = 0.$$

Так как относительно центральных осей статические моменты площади $S_y = S_z = 0$, то $a_{40} = a_{60} = 0$ и $\tau_{xy} = a_{41}z$, $\tau_{xz} = a_{61}y$. Подставив выражения для τ_{xy}, τ_{xz} из (9.6), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{a_{41}z}{a_{61}y} = \frac{dy}{dz},$$

имеющее решение при коэффициентах a_{41}, a_{61}, отличных от нуля,

$$a_{61}y^2 = a_{41}z^2 + c,$$

где *c* – постоянная интегрирования.

Если ввести обозначения

$$a_{61} = c/a^2\,;\; a_{41} = -c/b^2,$$

полученное выражение можно записать в виде уравнения эллипса с полуосями a и b или круга, если $a = b$:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Таким образом, в круглом поперечном сечении стержня при $a = b = R$

$$\tau_{xy} = -\frac{c}{R^2}z;\;\; \tau_{xz} = \frac{c}{R^2}y.$$

Постоянную *c* можно определить, используя условие статической эквивалентности

$$M_x = \int_F \left(\tau_{xz}y - \tau_{xy}z\right)dF = \frac{c}{R^2}I_z + \frac{c}{R^2}I_y; c = \frac{M_x R^2}{I_y + I_z}.$$

С учетом того, что для круга $I_y + I_z = I_p$

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p}z;\;\; \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_p}y.$$

Полное касательное напряжение в окрестности точки на площадке с нормалью x определяется как

$$\tau_x = \sqrt{\tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{xz}} = \frac{M_x}{I_p}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{M_x}{I_p}\rho, \qquad (9.7)$$

где ρ – текущий радиус поперечного сечения.

Тема 10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ОСНОВНЫХ СЛУЧАЕВ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ.

10.1. Механические свойства материалов

При определении механических свойств материалов проводят испытания на растяжение, сжатие, кручение и изгиб образцов, форма и размер которых стандартизированы. Испытание на растяжение проводят в соответствии с ГОСТ на разрывной машине при нагружении вдоль продольной оси стандартных образцов (рис. 10.1). Отношение длины рабочей части образца l_0 к диаметру d_0 равно 10 или 5. На рис. 10.2 приведены диаграммы растяжения образцов из пластичного (*а*, *б*) и хрупкого (*в*) материалов.

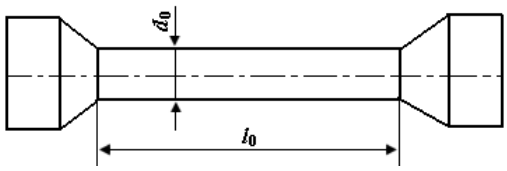
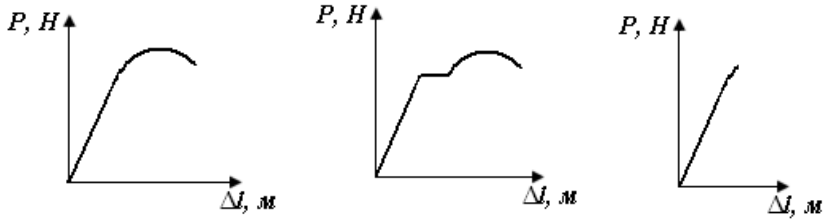


Рис. 10.1

Рассмотрим более подробно диаграмму растяжения образца (рис. 10.3). На начальной стадии нагружения образца из пластичного материала до точки *A* справедлив закон Гука, зависимость между нагрузкой и удлинением линейная. Образец испытывает упругую деформацию. Максимальная нагрузка на этом участке $P_{\text{пц}}$. Далее зависимость становится нелинейной.

Рост деформации происходит без заметного роста нагрузки (это явление получило название текучести). На диаграмме это соответствует горизонтальному участку от точки *B* (площадка текучести). Нагрузка при этом равна $P_{\text{т}}$. Условно считают, что нагрузка равняется $P_{\text{т}}$, если деформация составляет 0.2 % от длины рабочей части образца.

После стадии текучести материал вновь начинает сопротивляться возрастающей нагрузке (стадия упрочнения). До момента достижения точки *C* на диаграмме, что соответствует максимальной нагрузке $P_{\max}$, как продольная, так и поперечная деформация, растут равномерно.



а *б* *в*

Рис. 10.2

При этом полная деформация в каждый момент времени складывается из упругой и остаточной, что может быть обнаружено при разгрузке образца.

При достижении максимальной нагрузки $P_{\max}$ деформация локализуется в одном месте образца (ослабленном сечении). Образуется местное сужение поперечного сечения – шейка. Сопротивление образца нагрузкам резко пада-

ет и кривая на диаграмме идет вниз. В точке D происходит разрушение образца, и нагрузка в момент разрыва равна $P_к$. Площадь диаграммы растяжения пропорциональна работе, затраченной на разрушение образца.

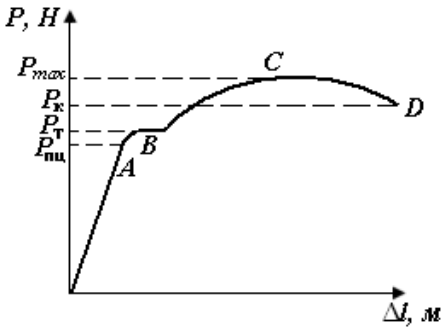


Рис. 10.3

Для суждения о механических свойствах материала вычисляют значения механических характеристик: характеристик прочности, определяющих способность материала сопротивляться нагрузкам, и характеристик пластичности, определяющих способность материала сопротивляться деформации.

Характеристики прочности:

1) предел пропорциональности – напряжение, для которого справедлив закон Гука:

$$\sigma_{пц} = P_{пц}/F_0,$$

где F_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца;

2) предел текучести – напряжение, при котором деформации растут без заметного увеличения нагрузки:

$$\sigma_т = P_т/F_0\,;$$

3) временное сопротивление – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, предшествующей разрушению образца:

$$\sigma_в = P_{max}/F_0\,;$$

4) истинное напряжение в момент разрыва:

$$\sigma_к = P_к/F_к,$$

где $F_к$ – конечная площадь поперечного сечения образца.

Характеристики пластичности:

1) относительное удлинение после разрыва [%]

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0}100;$$

2) относительное сужение поперечного сечения образца после разрыва [%]

$$\psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0}100.$$

Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести и зоны упрочнения (рис. 10.2, *в*).

Для испытания на сжатие образцы из хрупкого и пластичного материалов выполняются в виде цилиндров, высота которых берется в пределах от $1{,}5d$ до $3d$, где d – диаметр цилиндра. Это соотношение выбирается таким потому, что необходимо исключить потерю устойчивости образца и обеспечить в его средней части однородное напряженное состояние. Образцы из неоднородных материалов выполняют в форме кубиков. Диаграмма сжатия образца из пластичного материала имеет вид кривой (рис. 10.4). Здесь, как и при растяжении образца, есть зона текучести с последующим переходом к зоне упрочнения.

В дальнейшем нагрузка не падает, как при растяжении, а резко возрастает. Довести образец до разрушения практически не удается.

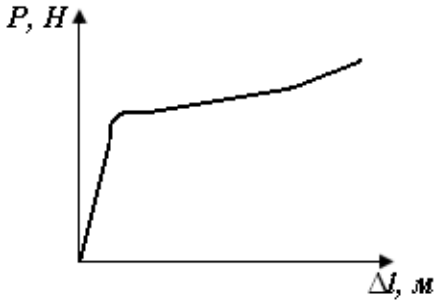


Рис. 10.4

Диаграмма сжатия хрупких материалов сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения. Разрушение образца происходит с образованием трещин по наклонным плоскостям.

Испытание на кручение заключается в определении условного предела прочности при кручении $\tau_{пч}$ и модуля сдвига G.

10.2. Теории прочности

При любом характере нагружения для проверки прочности необходимо найти наибольшее суммарное напряжение и удостовериться, что оно меньше опасного. В противном случае происходит разрушение. Для линейного напряженного состояния опасное напряжение определяют опытным путем. При плоском и объемном напряженном состоянии это практически невозможно, поскольку возникновение и развитие пластической деформации зависит не только от значений главных напряжений, но и от соотношения между ними, а число возможных комбинаций этих соотношений бесконечно велико. Поэтому по известным для линейного напряженного состояния значениям допустимого напряжения устанавливают условия прочности при сложном напряженном состоянии.

Полученные таким образом зависимости между величинами, относящимися к различным напряженным состояниям, на основании которых оцени-

вают прочность, называют критериями прочности, а соображения, определяющие выбор критериев – *гипотезами* или *теориями прочности.*

Существует несколько различных теорий прочности.

Теория первая. *В хрупких материалах разрушение в точке возникает, когда наибольшее нормальное напряжение в ней является растягивающим и достигает определенного для данного материала значения (хрупкое разрушение происходит путем отрыва от нормали).*

Поскольку максимальные значения нормальных напряжений соответствуют главным напряжениям, а $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то условие прочности можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{\text{в. р}}/n \text{ или } \sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{р}},$$

где $[\sigma]_{\text{р}}$ – допускаемое напряжение растяжения.

По первой теории хрупкий образец не разрушается при сжатии. Поэтому было введено предположение, что хрупкое разрушение обусловливается наибольшими относительными разрушениями.

Теория вторая. *Хрупкое разрушение в точке возможно только при* $\varepsilon_1 > 0$ *и достигает характерного для данного материала критического значения.*

По закону Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При линейном напряженном состоянии (растяжении)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \text{ или } \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{в.\ р}}{E},$$

поэтому во второй теории прочности условием разрушения является следующее: $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{р}}$, причем $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$. Условие прочности можно записать так

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{р}}.$$

Вторая теория, в отличие от первой, допускает возможность разрушения и при простом одноосном сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$. Условие прочности принимает вид $\nu\sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{р}}$. Отсюда следует, что временное сопротивление при растяжении $\left(\sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{в. р}}\right)$ связано с временным сопротивлением при сжатии соотношением $\nu\sigma_{\text{в. сж}} = \sigma_{\text{в. р}}$, так как разрушение наступает при $\nu[\sigma_3] = \sigma_{\text{в. р}}$. Этот вывод подтверждается тем известным фактом, что у хруп-

ких материалов сопротивление разрушению при сжатии выше, чем при растяжении.

Для пластичных материалов введены третья и четвертая теории прочности.

Теория третья. *Пластическая деформация возникает, когда максимальное касательное напряжение достигает определенного для данного материала критического значения.*

Третья теория выведена из того факта, что пластическая деформация обусловливается необратимыми относительными сдвигами элементов структуры тела.

Всегда $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, а при растяжении $\tau_{\max} = \sigma_1/2$. Тогда условие прочности описывается неравенством

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Теория четвертая. *Пластические деформации возникают, когда достигает некоторого предела удельная энергия формоизменения. Причем вклад в энергию деформации вносит только та часть работы, которая связана с упругой деформацией (остальная превращается в теплоту).*

По четвертой теории условие прочности характеризуется выражением

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq [\sigma].$$

10.3. Нормальные напряжения при осевом растяжении-сжатии. Концентрация напряжений

При осевом растяжении-сжатии стержня из шести компонент тензора напряжений от нуля отлична только одна, так как только одно внутреннее усилие $N \neq 0$. Из выражения (9.2) получим $\sigma_x = N/F$. В стержне имеет место линейное напряженное состояние, поскольку при растяжении в каждой точке сечения $\sigma_x = \sigma_1 > 0$, при сжатии $\sigma_x = \sigma_3 < 0$. Два других главных напряжения σ_2 и σ_3 или σ_1 и σ_2 равны нулю.

Главная площадка, где $\sigma \neq 0$, лежит в поперечном сечении и составляет угол $\pi/2$ с осью x стержня. В наклонном сечении возникают и нормальные, и касательные напряжения: $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha$, $\tau_{nt} = (\sigma_x/2) \sin 2\alpha$.

В поперечном сечении напряжения распределены равномерно, если по торцам приложена равномерно распределенная нагрузка и нет резкого изменения сечения тела.

Теоретические исследования и эксперименты показывают, что наличие местных ослаблений (отверстий, выточек) существенно сказывается на напряженно-деформированном состоянии тела. Распределение напряжений в сечениях, близких к месту расположения ослаблений, становится неравномерным (рис. 10.5).

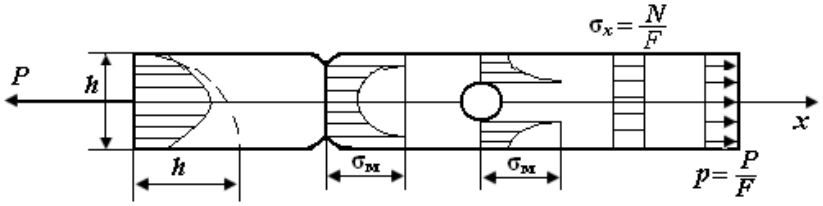


Рис. 10.5

По мере удаления от сечений, проходящих через центр отверстия и выточки, эта неравномерность постепенно сглаживается (в пределах расстояния, примерно равного наибольшему поперечному размеру стержня). Около отверстия и выточек имеет место концентрация напряжений. Часто эти местные напряжения можно вычислить так:

$$\sigma_м = \alpha_\Sigma \sigma_x,$$

где $\sigma_м$ – местные напряжения; α_Σ – коэффициент концентрации напряжений.

Чтобы стержень под действием нагрузок не разрушался, необходимо соблюдать условие

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \le [\sigma];\ [\sigma] = \sigma_{оп}/n, n > 1,$$

где $[\sigma]$ – допустимое нормальное напряжение; $\sigma_{оп}$ – опасное напряжение; n – коэффициент запаса.

Значение $[\sigma]$ устанавливают в каждом конкретном случае на основании опытных данных о прочности материала с учетом условий работы конструкции. Опасное напряжение зависит от состояния материала: для пластичного состояния за $\sigma_{оп}$ принимают σ_T (напряжение текучести), для хрупкого состояния – σ_B (временное сопротивление). Эти механические характеристики определяют по диаграммам условных напряжений материала, полученным в результате испытаний.

10.4. Напряжения при кручении стержня круглого поперечного сечения

Рассмотрим кручение призматического стержня с круглым поперечным сечением типа изображенного на рис. 5.2, *б*.

При таком характере деформации из всех внутренних усилий только крутящий момент M_x отличен от нуля. В поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} z;\ \tau_{xz} = -\frac{M_x}{I_p} y.$$

Они составляют отличные от нуля компоненты в тензоре напряжений

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и в инвариантах тензора напряжений

$$\Theta_{\mathrm{I}} = 0;\ \Theta_{\mathrm{III}} = 0; \Theta_{\mathrm{II}} = -{\tau_{xy}}^2 - {\tau_{xz}}^2 = -{\tau_x}^2.$$

Кубическое уравнение принимает вид

$$\sigma^3 + \sigma(-{\tau_x}^2) = 0;\ \sigma(\sigma^2 - {\tau_x}^2) = 0,$$

что дает значения главных напряжений:

$$\sigma_{1,3} = \pm\tau_x; \sigma_2 = 0.$$

Таким образом, при кручении в точках поперечного сечения возникает плоское напряженное состояние. Положение главных площадок можно найти, используя выражение

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha\,;\ \sin 2\alpha = \frac{2\tau_{nt}}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

При кручении $\tau_{nt} = \tau_x,\ \sin 2\alpha = \pm 1$. Следовательно, главные площадки составляют угол $45°$ с площадками, по которым действуют касательные напряжения.

Полное касательное напряжение, возникающее в окрестности точки поперечного сечения:

$$\tau_x = \frac{M_x}{I_p}\rho;\ I_p = \int_F \rho^2 dF,$$

где ρ – радиус-вектор точки, в которой определяют напряжение.

Напряжение τ_x изменяется по линейному закону вдоль радиуса сечения и принимает экстремальное значение в точках контура.

Полярный момент инерции для круглого поперечного сечения

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Для расчета максимальных касательных напряжений используют следующее выражение:

$$\tau_{x\,\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_k};\ W_k = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2},$$

где W_k – момент сопротивления при кручении.

Принимают следующее условие прочности при кручении:

$$\tau_{x\,\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_k} \le [\tau],$$

где $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение. Значение $|M_x|_{\max}$ водят в расчет после рассмотрения эпюры крутящих моментов.

10.5. Напряжения при чистом изгибе

При чистом изгибе на стержень действуют пары сил, которые лежат в плоскости стержня. Все внутренние силы и моменты равны нулю, кроме M_y. В формуле (9.2) остается только $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$. Вдоль оси, параллельной оси y, напряжения распределяются равномерно; вдоль оси, параллельной оси z, – по линейному закону (рис. 1.53). При $z = 0$ имеем $\sigma_x = 0$; при $z = z^{max}$ выполняется равенство $\sigma_x = {\sigma_x}^{max}$. Если $M_y > 0$, нижние волокна растягиваются, верхние – сжимаются.

В плоскости xOy напряжения равны 0. Эту плоскость называют нейтральной. Она разделяет сжатую и растянутую зоны стержня. След нейтральной плоскости на чертеже – нейтральная линия. В рассматриваемом случае она совпадает с осью x.

В точках стержня при чистом изгибе реализуется линейное напряженное состояние, т.к. $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в волокнах ниже нейтральной линии и $\sigma_{13} = -\sigma_x, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ выше нейтральной линии.

Наибольшие напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от оси. условие прочности имеет вид

$${\sigma_x}^{max} = \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].$$

Допустимое напряжение определяется так же, как и при растяжении-сжатии. Момент сопротивления при изгибе W_y зависит от формы сечения, поэтому очень важно выбрать ее рационально.

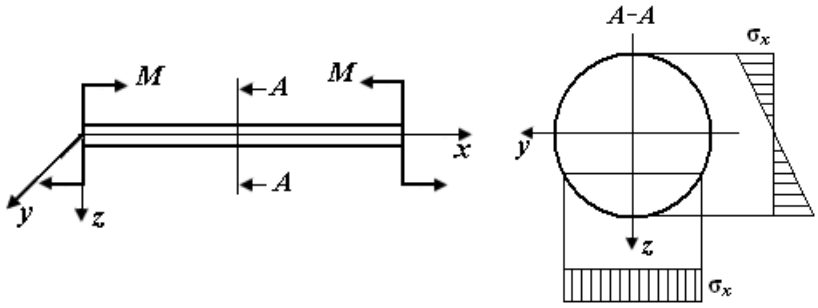


Рис. 1.54

Для прямоугольного сечения

$$W_y = \frac{I_y}{z^{max}} = \frac{bh^2}{6}.$$

Два прямоугольника можно расположить по-разному. Наименьшими напряжения будут в том случае, если при $h > b$ высота h прямоугольника лежит в плоскости действия сил.

Чтобы при наименьшей затрате материала получить наибольшую прочность, рационально использовать коробчатое сечение, но оно неудобно в технологическом отношении. Можно расположить стенки в середине. Получится рациональное сечение – двутавр.

10.6. Напряжения при плоско-поперечном изгибе.

При плоско-поперечном изгибе стержня, нагруженного в плоскости xOz, в каждом сечении в общем случае отличны от нуля изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z. Следовательно, условия, при которых получена формула (1.58) не выполняются. Однако, в инженерной практике для определения нормальных напряжений используется та же формула, что и при чистом изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z.$$

Эта формула дает правильные значения в тех случаях, когда $Q_z = \text{const}$. Если Q_z изменяется по длине, то формула дает несколько приближенные результаты, точность которых зависит от отношения размеров поперечного сечения балки к длине пролета. Для практических расчетов точность формулы вполне достаточна, т.к. ошибка не превышает 1% от $\sigma_x{}^{max}$.

При плоско-поперечном изгибе касательное напряжение не равно нулю:

$$\int_F \tau_{xz}\, dF = Q_z \neq 0.$$

Рассмотрим сечение с осью симметрии z. Касательные напряжения на поверхности направлены по касательной к контуру (рис. 1.55). Каждое из этих напряжений может быть разложено на две составляющие: τ_{xy} и τ_{xz}. В каждой точке $\tau_{xy} \neq 0$, но в сумме они составляют 0, а напряжения τ_{xz} суммируются. Формулу для вычисления касательных напряжений τ_{xz} получим, введя следующие допущения: нормальные напряжения распределяются по закону $\sigma_x = (M_y/I_y)z$; вдоль любой прямой, параллельной оси y, касательные напряжения τ_{xz} распределены равномерно.

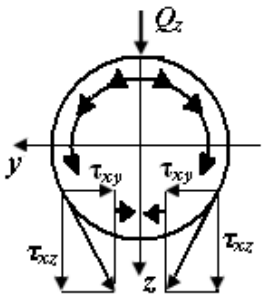


Рис. 1.55

В стержне, подвергнутом плоско-поперечному изгибу (рис. 1.56, а), двумя бесконечно близкими сечениями выделяем элемент длиной dx. По граням этого элемента действуют одинаковые перерезывающие силы Q_z и различающиеся на бесконечно малую величину изгибающие моменты M_y и $M_y + dM_y$ (рис. 1.56, б).

В левом сечении (1-1) нормальные напряжения равны σ_x, в правом (2-2) $\sigma_x + d\sigma_x$ (рис. 1.56, в). Проведем еще одно сечение 3-3, параллельное плоскости xOy. Ширина сечения в этом месте b_z. Рассмотрим равновесие полученного малого элемента (рис. 1.56, г). Так как сумма проекций на ось x должна быть равной нулю, то в сечении 3-3 должна существовать сила T, которая будет уравновешивать нормальные силы:

$$\sum_{i=0}^{n} X_i = 0;\ -N - T + N + dN = 0; T = dN.$$

В заштрихованной части сечения (рис. 1.55, д) возьмем площадку dF на расстоянии z от нейтральной оси и запишем выражение для нормальной силы:

$$N = \int_{F^*} \sigma_x dF;\ N = \int_{F^*} \frac{M_y}{I_y} z dF = \frac{M_y}{I_y} \int_{F^*} z dF\,; N = \frac{M_y}{I_y} S_y^*,$$

где S_y^* – статический момент площади F^* относительно оси y.

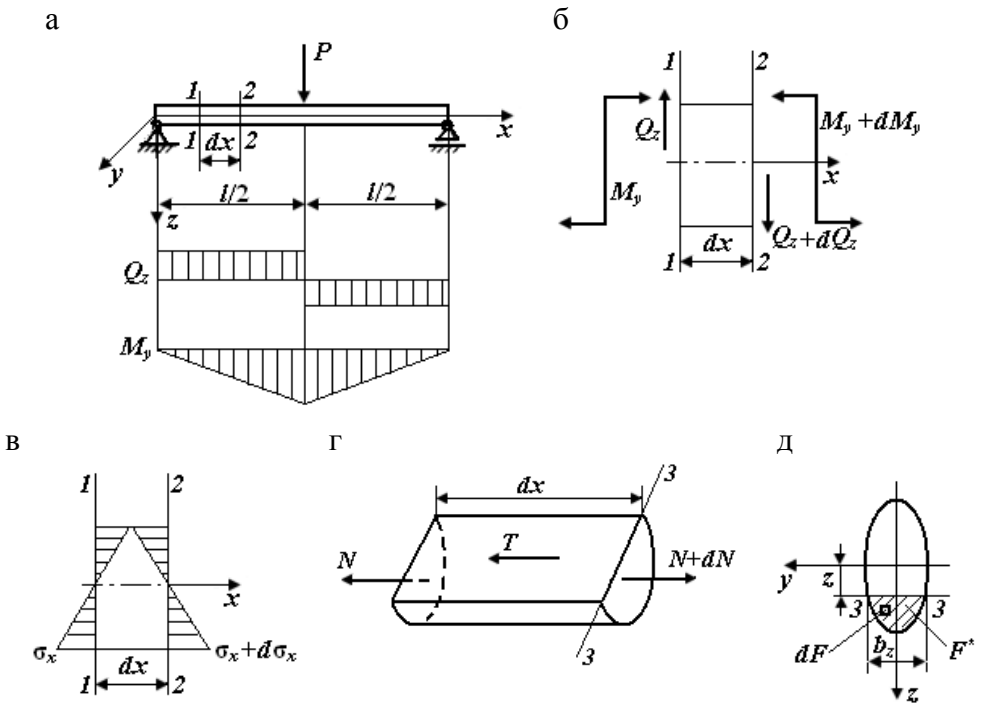


Рис. 1.56

Аналогично

$$N + dN = \frac{\left(M_y + dM_y\right)}{I_y} S_y^*;\ dN = \frac{dM_y}{I_y} S_y^*.$$

В сечении возникают касательные напряжения. Так как dx – величина малая напряжения можно считать равномерно распределенными. Тогда получим

$$\tau_{xz} = \tau_{xz} = \frac{T}{b_z dx} = \frac{dM_y}{dx}\frac{S_y^*}{I_y b_z} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b_z};$$

Выражение

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b_z} \qquad (1.64)$$

называют *формулой Журавского*.

Для наиболее распространенных форм поперечного сечения его можно представить в следующем виде:

для прямоугольного сечения высотой h и шириной b

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right];\ F = bh;\ \text{при}\ z = 0\ \ {\tau_{xz}}^{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F};$$

для круглого сечения наружного радиуса R

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{F}\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2\right];\ F = \pi R^2;\ \text{при}\ z = 0\ \ {\tau_{xz}}^{max} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{F}.$$

Напряжение изменяется по высоте сечения по параболе.

Формула Журавского не дает точного решения. При $h/b = 2$ погрешность вычислений составляет около 3%. Отметим, что S_y^* – статический момент площади, который лежит ниже рассматриваемого волокна. При вычислении τ_{xz} можно брать статический момент для части площади, лежащей выше рассматриваемого волокна. В данном случае эта величина вводится в формулу с обратным знаком. Зоны действия наибольших σ_x и τ_{xz} не пересекаются, поэтому размеры сечения при плоско-поперечном изгибе обычно подбирают по нормальным напряжениям.

10.7. Сложный изгиб. Уравнение нейтральной линии.

Рассмотрим случай, когда $N \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0,$

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y.$$

Представим моменты M_y и M_z в виде векторов L_y и L_z. Общий суммарный момент (рис. 1.57)



Рис. 1.57

$$L_\Sigma = M_\Sigma = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору L_Σ. Эта плоскость условная, т.к. M_y и M_z могут меняться по длине стержня, и, следовательно, положение плоскости в разных сечениях различно. В каждом сечении $\operatorname{tg}\alpha = M_z/M_y$. Считая N, M_y, M_z положительными, находим геометрическое место точек, где $\sigma_x = 0$:

$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0.$$

Это *уравнение нейтральной линии*. Можно выразить z через y:

$$z = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}y - \frac{N}{M_y}\frac{I_y}{F};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z} = \frac{I_y}{I_z}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$z = y\operatorname{tg}\beta - a.$$

Получено уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Ордината, в которой нейтральная линия пересекает главную ось z сечения

$$a = -\frac{N}{M_y}\frac{I_y}{F}.$$

Если $I_y \neq I_z$, то $\alpha \neq \beta$ – нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости нагружения. Она делит сечение на две части – растянутую и сжатую.

Если $N = 0$, то нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения. Этот случай называют сложным изгибом.

Зная положение нейтральной линии, можно найти положение наиболее опасных точек. Наиболее напряженными точками сечения при сложном изгибе будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. В одной из них действуют наибольшие растягивающие напряжения, а в другой – наибольшие сжимающие.

Условие прочности для опасного сечения имеет вид

$$\sigma_x{}^{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

10.8. Совместное действие изгиба с кручением.

Такой деформации обычно подвергаются валы, например, с закрепленными на них цилиндрическими прямозубыми колесами. Поскольку на каждое колесо действуют силы, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, определяем реакции в двух плоскостях, строим эпюры крутящего M_x и двух изгибающих M_y, M_z моментов.

Перерезывающие силы Q_y и Q_z вызывают касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} в плоскости сечения. Наибольшее значение напряжения $\tau_x = \sqrt{\tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{xz}}$ возникает в центре тяжести сечения. От крутящего момента появляется касательное напряжение $\tau_x = \left(M_x/I_p\right)\rho$. Наибольшее значение $\tau_x = M_x/W_k$ имеет место в точках контура.

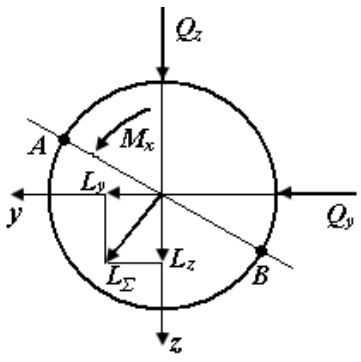


Рис. 1.58

Кроме того, в сечении возникают нормальные напряжения, которые лежат в плоскости, перпендикулярной к сечению. Поскольку $I_y = I_z$, то $\sigma_x{}^{max}$ можно определить по формуле $\sigma_x{}^{max} = M_и/W_и$, где $M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, $W_и = \pi R^4/4$. Таким образом, на контуре получены две точки, в которых одновременно действуют $\sigma_x{}^{max}$ и $\tau_x{}^{max}$ – точки A и B (рис. 1.58). чтобы проверить прочность стержня, надо найти предельное суммарное напряжение. Оно

должно быть меньше допустимого: $\sigma_{пр} \leq [\sigma]$. По третьей теории прочности $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.

Для плоского напряженного состояния

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \pm \sqrt{{\sigma_x}^2 + 4{\tau_x}^2}\right);$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{{\sigma_x}^2 + 4{\tau_x}^2};$$

$$\sigma_{пр} = \sqrt{\left(\frac{M_и}{W_и}\right)^2 + 4\left(\frac{M_к}{W_к}\right)^2} = \frac{1}{W_и}\sqrt{(M_x)^2 + \left(M_y\right)^2 + (M_z)^2} \leq [\sigma].$$

Раздел 5. Расчет жесткости по стержневой схеме.

Тема 11. Расчет жесткости стержня.

Расчет жесткости стержня – это оценка его упругой податливости под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут выходить за установленные нормами пределы.

Для количественной оценки жесткости изделия необходимо знать перемещения, которые совершают элементы конструкции под влиянием различных внешних воздействий.

Выражения, характеризующие перемещения стержня при изгибе и кручении, получают, интегрируя дифференциальные зависимости Коши с учетом закона Гука и условий сплошности. Искривленную при изгибе ось стержня называют *изогнутой*, перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси стержня, – прогибом стержня в данном сечении, наибольший прогиб – стрелой прогиба. Угол θ, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, носит название угла поворота сечения. Прогиб в плоскости xOz считают положительным, если его направление совпадает с направлением оси z. Угол поворота считают положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

11.1. Расчет перемещений при чистом изгибе.

Рассмотрим стержень (рис. 1.59, а), подвергающийся чистому изгибу. В окрестностях каждой точки поперечного сечения стержня из составляющих

тензора напряжения от нуля отлична только составляющая $\sigma_x = \left(M_y/I_y\right)z$. С помощью закона Гука определим составляющие тензора деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{M_y}{I_y}z;\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{M_y}{I_y}z;\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \qquad (1.65)$$

Подставляя выражения (1.65) в дифференциальные зависимости Коши, получаем выражения для этих зависимостей при чистом изгибе

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \alpha_1 z;\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \alpha_2 z;\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0;$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \alpha_1 z;\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \qquad (1.66)$$

где для краткости записи в дальнейших преобразованиях введены обозначения $\alpha_1 = M_y/\left(\mathrm{E}I_y\right)$; $\alpha_2 = -\nu\, M_y/\left(\mathrm{E}I_y\right)$.

Проинтегрировав первые два выражения, получим:

$$u_x = \alpha_1 zx + f(y,z);$$
$$u_y = \alpha_2 zy + \varphi(x,z);$$
$$u_z = \alpha_2\frac{z^2}{2} + \psi(x,y). \qquad (1.67)$$

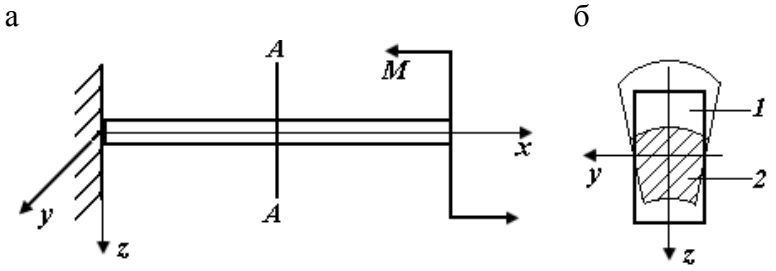


Рис. 1.59

Решения получены с точностью до функций f, φ, ψ, которые аналогичны постоянным интегрирования в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Уточнить значения этих функций можно, использовав три оставшиеся выражения (1.66) – подстановкой в них выражений для u_x, u_y, u_z:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\alpha_2 y;$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = -\alpha_1 x. \qquad (1.68)$$

В системе (1.68) разделим переменные. Для этого сначала продифференцируем последовательно каждое тождество системы по y, z, x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\alpha_1. \qquad (1.69)$$

Так как в выражениях (1.69) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ (φ зависит от x и от z и не зависит от y),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\alpha_1. \qquad (1.70)$$

Продифференцируем каждое тождество системы (1.68) по x, y, z:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\alpha_2;$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0;\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0;\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0;$$

то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\alpha_2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.71)$$

Теперь продифференцируем каждое тождество системы по z, x, y. Получим, в которой все смешанные производные отличны от нуля:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0.$$

Произведя преобразования в полученной системе, получили, что смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=0;\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0. \qquad (1.72)$$

Интегрируя выражения (1.70) – (1.72), представим искомые функции полиномами:

$$f=ay+bz+c;$$
$$\varphi=dx+ez+h;$$
$$\psi=-\frac{1}{2}\alpha_1 x^2-\frac{1}{2}\alpha_2 y^2+mx+ny+k. \qquad (1.73)$$

В результате получим девять постоянных интегрирования. Подставив выражения (1.73) в (1.68), находим, что некоторые постоянные попарно равны: $a=-d, m=-b, n=-e$. Поэтому записываем с учетом системы (1.67) и равенств (1.73) окончательные выражения для составляющих перемещений при чистом изгибе:

$$u_x=\frac{M_y}{EI_y}zx+ay+bz+c;$$
$$u_y=-\nu\frac{M_y}{EI_y}zy-ax+ez+h;$$
$$u_z=-\nu\frac{M_y}{2EI_y}z^2-\frac{M_y}{2EI_y}x^2+\nu\frac{M_y}{2EI_y}y^2-bz-ey+k. \qquad (1.74)$$

Шесть постоянных интегрирования в системе (1.74) находим из условия закрепления стержня. Рассмотрим эти условия для стержня, представленного на рис. 1.59, а. В начале координат при $x=y=z=0$ перемещения $u_x=$ $=u_y=u_z=0$ и углы поворота оси стержня относительно осей координат также равны нулю:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial x}=0.$$

Из этих условий следует, что $a=b=c=e=h=k=0$, и формулы для определения составляющих перемещений при чистом изгибе стержня, жестко защемленного в начале координат, принимают следующий вид:

$$u_x=\frac{M_y}{EI_y}zx;\ \ u_y=-\nu\frac{M_y}{EI_y}zy;\ u_z=-\frac{M_y}{2EI_y}(x^2-\nu y^2+\nu z^2). \qquad (1.75)$$

На рис. 1.59, б показано, как при этом изменяется форма прямоугольного поперечного сечения стержня на некотором расстоянии от начала координат. Линии, параллельные оси z, поворачиваются, оставаясь прямыми (выражение для u_y), а линии, параллельные оси y, принимают форму кривых второго порядка (выражение для u_z).

11.2. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Определим упругие перемещения точек стержня, показанного на рис. 1.59, а. При $y = z = 0$ уравнения (1.75) приобретают вид

$$u_x = 0;\ \ u_y = 0;\ u_z = -\frac{M_y}{2EI_y}x^2. \tag{1.76}$$

При чистом изгибе точка оси стержня перемещается только в вертикальном направлении. Каждая точка, лежащая вне оси стержня, перемещается при изгибе в продольном направлении на $u_x = \frac{M_y}{EI_y}zx$. При $x = \text{const}$ перемещение зависит только от z. Зависимость эта линейная: поперечное сечение поворачивается вокруг оси y, оставаясь при этом плоским.

Введя допущение о малости угла поворота ($\text{tg}\,\theta \approx 0$), получим:

$$\theta = \frac{u_x}{z} = \frac{M_y}{EI_y}x. \tag{1.77}$$

Положительным направлением угла θ считаем направление против часовой стрелки при рассмотрении с конца оси y. Учитывая, что при чистом изгибе $M_y = \text{const}$, из уравнений (1.76) находим:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \tag{1.78}$$

Сравнивая выражение для угла поворота θ сечения стержня (1.77) и выражение (1.78), устанавливаем зависимость между прогибом и углом поворота:

$$\theta = -\frac{\partial u_z}{\partial x}. \tag{1.79}$$

Выражение (1.79) при инженерных расчетах правомерно распространять на плоско-поперечный изгиб. Его называют *приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня.*

11.3. Расчет перемещений при кручении круглых стержней.

Рассмотрим кручение стержня круглого поперечного сечения, нагруженного по торцам. При таком характере нагружения в тензоре напряжений отличны от нуля только составляющие

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} z;\ \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_p} y,$$

а в тензоре деформаций

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{M_x}{GI_p} z;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{M_x}{GI_p} y.$$

Дифференциальные зависимости Коши принимают вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{M_x}{GI_p} z;$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{M_x}{GI_p} y.$$

После интегрирования первых трех зависимостей получим:

$$u_x = f(y,z);\ u_y = \varphi(x,z);\ u_z = \psi(x,y).$$

Вид этих функций уточняем с помощью трех оставшихся дифференциальных зависимостей Коши:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{M_x}{GI_p} z;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{M_x}{GI_p} y.$$

Разделим переменные в полученной системе уравнений. Продифференцируем последовательно каждое тождество системы по z, x, y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -\frac{M_x}{GI_p};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{M_x}{GI_p}.$$

Проведя преобразования, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -\frac{M_x}{GI_p};\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{M_x}{GI_p};\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Проинтегрировав эти выражения, представим искомые функции в следующем виде:

$$f = 0;$$

$$\varphi = -\frac{M_x}{GI_p} xz + dx + ez + h;$$

$$\psi = \frac{M_x}{GI_p} xy + mx + ny + k.$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий. Пусть стержень жестко защемлен в начале координат. В сечении, проходящем через начало координат, составляющие перемещения и составляющие углов поворота равны нулю. Из этих условий следует равенство нулю всех постоянных интегрирования. Формулы для составляющих перемещения принимают следующий вид:

$$u_x = 0;\ \ u_y = -\frac{M_x}{GI_p} xz;\ u_z = \frac{M_x}{GI_p} xy. \qquad (1.80)$$

Проанализируем выражения для составляющих перемещений (1.80). Поскольку $u_x = 0$, все точки, находящиеся в любом поперечном сечении, до деформации и в процессе деформации остаются в плоскости этого же поперечного сечения. Точка A (рис. 1.60) в процессе деформации перемещается и занимает новое положение. Обозначим это новое положение как A_1. Вектор полного упругого перемещения u составляет с осью y угол η, тангенс которого $\operatorname{tg}\eta = u_z/u_y$. С учетом выражений (1.80) $\operatorname{tg}\eta = -y/z$. При этом радиус-вектор $OA = \rho$, определяющий положение точки A до деформации, составляет с осью угол β. По рис. 1.60 $\operatorname{tg}\beta = z/y$. Обратим внимание на то, что $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\eta = -1$. Такое

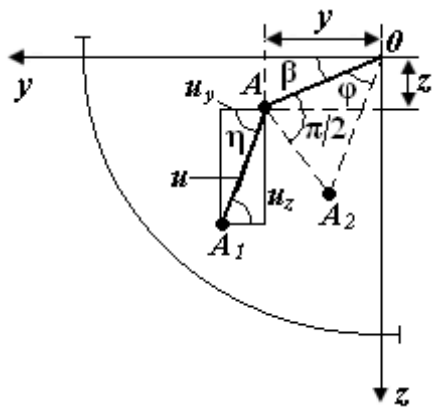


Рис. 1.60

возможно, только когда перемножаются тангенсы углов двух взаимно перпендикулярных направлений, составляющих с третьим направлением углы β и η. Значит, действительное направление полного перемещения точки A перпендикулярно к радиус-вектору OA и точка A после деформации займет положение A_2 (рис. 1.60).

Изменение положения радиус-вектора OA характеризует угол закручивания стержня φ. Так как упругие деформации малы, введем допущение, что $\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1A_2}{\rho} = \frac{|u|}{\rho} = \frac{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}}{\rho} = \frac{M_x}{GI_p}\frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\rho}x,$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{M_x}{GI_p}x. \tag{1.81}$$

Помня о том, что в рассматриваемом случае $M_x = \text{const}$, продифференцируем соотношение (1.81) по x:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{M_x}{GI_p}. \tag{1.82}$$

Выражение (1.82) называют *дифференциальным уравнением угла закручивания поперечного сечения стержня.* В инженерной практике его применяют и в тех случаях, когда значение крутящего момента изменяется вдоль оси стержня.

Формула угла закручивания φ_Σ для стержня, имеющего n участков с различными механическими характеристиками материала на каждом -том участке, при постоянных в пределах каждого участка значениях момента M_x, имеет следующий вид:

$$\varphi_\Sigma = \sum_{i=0}^{n}\frac{M_{xi}l_i}{G_i\ I_{pi}}.$$

Условие жесткости при кручении стержня характеризуется выражением

$$\varphi_{max} = \frac{|M_x|^{max}l_p}{G\ I_p} \le [\varphi],$$

где $|M_x|^{max}$ – наибольший по модулю на эпюре M_x крутящий момент; l_p – расчетная длина, на которой определяют угол закручивания; $[\varphi]$ – допустимый на данной длине угол закручивания.

11.4. Расчет перемещений в стержнях по методу начального параметра.

Расчет перемещений в стержнях с большим числом грузовых участков интегрированием приближенного дифференциального уравнения упругой линии представляет собой сложную и трудоемкую задачу ввиду большого числа постоянных интегрирования: если стержень имеет n участков, то для обеспечения непрерывного и плавного сопряжения всех участков упругой линии необходимо $2n$ постоянных интегрирования.

Для упрощения вычислений разработано несколько методов. Один их них – *метод начальных параметров.* Он предполагает определение только двух постоянных интегрирования в начале координат – угла поворота θ_0 и прогиба u_{z0}.

Предположим, стержень (рис. 1.61, а) нагружен сосредоточенным моментом M, приложенным на расстоянии a от левого конца стержня, силой P на расстоянии b и распределенной нагрузкой q на расстоянии c от начала отсчета. Чтобы обеспечить равенство всех постоянных интегрирования на границах грузовых участков, при составлении дифференциальных уравнений упругой линии и их интегрировании соблюдают следующие правила:

1) начало координат выбирают в крайней левой точке стержня;
2) выражение для изгибающего момента M_y составляют применительно к левой отсеченной части стержня;
3) сосредоточенный момент M домножают на $(x-a)^0$, что равно единице;
4) распределенную нагрузку продлевают до конца рассматриваемого сечения, а чтобы общий характер внешнего воздействия не изменился, прикладывают «компенсирующую» нагрузку обратного направления (рис. 1.61, б);
5) уравнения для всех участков интегрируют, не раскрывая скобок.

Запишем выражение для изгибающего момента M_y в произвольном сечении крайнего правого участка (рис. 1.61, в):

$$M_y = -M(x-a)^0 - P(x-b) - q\frac{(x-c)^2}{2} + q\frac{(x-d)^2}{2}. \qquad (1.83)$$

Нетрудно заметить, что выражение для изгибающего момента на участке 4 получается из формулы (1.83) при устранении членов, учитывающих нагрузку на участке 5.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии для участка 5:

$$\frac{d^2u_z}{dx^2} = \frac{1}{EI_y}\left[M(x-a)^0 + P(x-b) + q\frac{(x-c)^2}{2} - q\frac{(x-d)^2}{2}\right].$$

Проинтегрируем это выражение дважды, не раскрывая скобок:

$$\frac{du_z}{dx} = \frac{1}{EI_y}\left[M(x-a) + \frac{P(x-b)^2}{2} + q\frac{(x-c)^3}{6} - q\frac{(x-d)^3}{6}\right] + C_5;$$

$$\Theta_x = -\frac{du_z}{dx};$$

$$u_z(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-b)^3}{6} + q\frac{(x-c)^4}{24} - q\frac{(x-d)^4}{24}\right] + C_5x + D_5. \quad (1.84)$$

Запишем дифференциальное уравнение упругой линии и выражение для угла поворота и прогиба на участке 4:

$$\frac{d^2u_z}{dx^2} = \frac{1}{EI_y}\left[M(x-a)^0 + P(x-b) + q\frac{(x-c)^2}{2}\right];$$

$$\frac{du_z}{dx} = \frac{1}{EI_y}\left[M(x-a) + \frac{P(x-b)^2}{2} + q\frac{(x-c)^3}{6}\right] + C_4;$$

$$u_z(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-b)^3}{6} + q\frac{(x-c)^4}{24}\right] + C_4x + D_4. \quad (1.85)$$

Запишем условия сопряжения на границе участков 4 и 5 при $x = d$:

$$\Theta(d)_4 = \Theta(d)_5;\ u_z(d)_4 = u_z(d)_5. \quad (1.86)$$

Подставляя выражения для Θ и u_z из формул (1.84), (1.85) и (1.86), получаем, что $C_4 = C_5;\ D_4 = D_5$.

Записав аналогичные условия сопряжения на границах других участков, находим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C;\ D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D.$$

Установим геометрический смысл постоянных интегрирования на участке 1:

$$\frac{du_z}{dx} = C;\ u_z(x) = Cx + D.$$

При $x = 0$

$$\Theta(0) = \Theta_0 = -C;\ u_z(0) = u_{z0} = D.$$

Постоянные C и D равны прогибу и углу поворота с обратным знаком в начале координат.

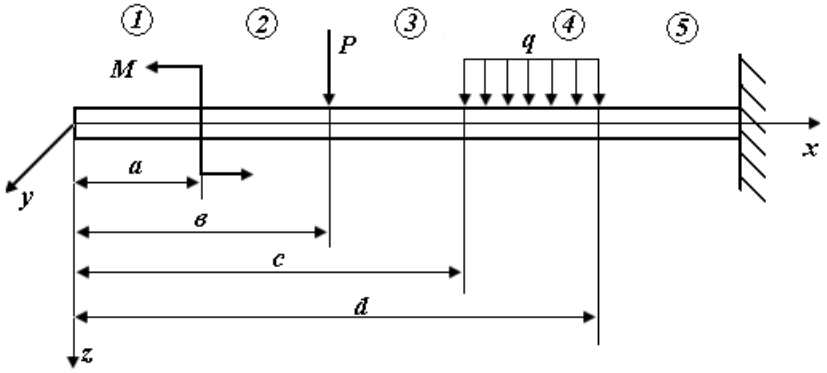
Если на стержень действует несколько сосредоточенных моментов, сил и распределенных нагрузок, выражения для перемещений и углов поворота в произвольном сечении можно представить в следующем виде:

$$u_z(x) = u_{z0} + u'_{z0}x + \sum_k \frac{M_k(x-a_k)^2}{2EI_y} + \sum_j \frac{P_j\left(x-b_j\right)^3}{6EI_y} + \\ + \sum_i \frac{q_i(x-c_i)^4}{24EI_y} - \sum_m \frac{q_m(x-d_m)^4}{24EI_y}; \qquad (1.87)$$

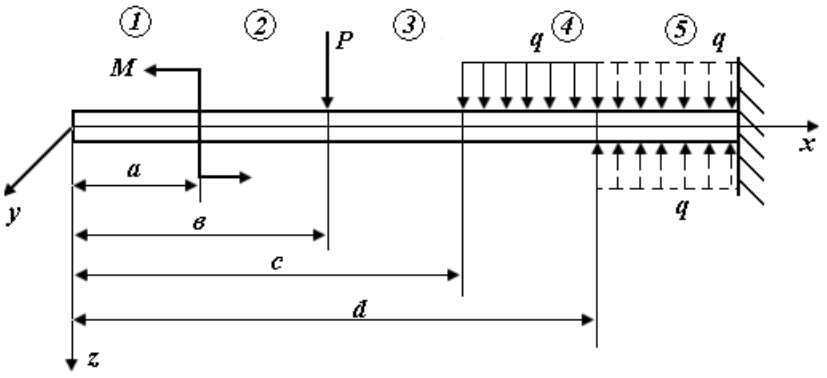
$$u'_z(x) = u'_{z0} + \sum_k \frac{M_k(x-a_k)}{2EI_y} + \sum_j \frac{P_j\left(x-b_j\right)^2}{2EI_y} + \\ + \sum_i \frac{q_i(x-c_i)^3}{6EI_y} - \sum_m \frac{q_m(x-d_m)^3}{6EI_y}. \qquad (1.88)$$

Выражение (1.87) называют *универсальным уравнением упругой линии*.

а



б



в

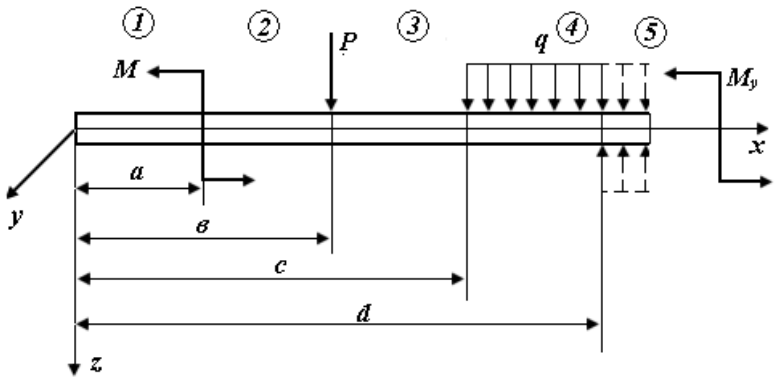


Рис. 1.61

В дифференциальные уравнения (1.87) и (1.88) подставляют только нагрузки, приложенные слева от сечения. Положительное значение внешних нагрузок M_k, P_j, q_i соответствуют направлениям, представленным на рис. 1.61. Вычисления следует начинать с определения опорных реакций из условия статического равновесия. Геометрические начальные параметры u_{z0}, Θ_0 определяют из граничных условий в местах закрепления стержня.

11.5. Потенциальная энергия стержня в общем случае.

Расчет перемещений при помощи энергетических соотношений базируется на общем выражении для потенциальной энергии нагруженного стержня. Выделим из стержня элементарный участок длиной dx. В общем случае нагружения в поперечных сечениях стержня возникают шесть составляющих внутренних сил: $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$. По отношению к элементарному участку рассмотрим эти внутренние силы как внешние. Определим работу, совершаемую этими силами при деформировании элемента. Она равна потенциальной энергии, накопленной в элементарном участке стержня. Допустим, что левое сечение элемента неподвижно. Точка приведения сил в правом сечении перемещается. При этом совершается работа. Полная потенциальная энергия элемента стержня может рассматриваться как сумма независимых работ каждого из шести силовых факторов:

$$d\Pi = d\Pi(N) + d\Pi\big(Q_y\big) + d\Pi(Q_z) + d\Pi(\,M_x) + d\Pi\big(\,M_y\big) + d\Pi(\,M_z). \quad (1.89)$$

При кручении элементарного участка стержня длиной dx согласно равенству (1.82) угол закручивания

$$\Delta\varphi = \frac{M_x dx}{GI_p},$$

а потенциальная энергия деформации кручения

$$d\Pi(M_x) = \frac{1}{2} M_x \Delta\varphi = \frac{M_x^2 dx}{2GI_p}.$$

При изгибе в плоскости элементарного отрезка dx в соответствии с равенством (1.78) угол поворота и потенциальная энергия деформации изгиба

$$\Delta\Theta = \frac{M_y dx}{EI_y};\ d\Pi(M_y) = \frac{M_y^2 dx}{2EI_y}.$$

Если изгиб происходит в плоскости xOy, то соответствующее выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$d\Pi(M_z) = \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}.$$

По закону Гука удлинение элемента стержня длиной dx равно $Ndx/(EF)$. Потенциальная энергия при растяжении-сжатии элементарного участка

$$d\Pi(N) = \frac{1}{2}\frac{N^2 dx}{EF}.$$

Слагаемые $d\Pi(Q_y)$ и $d\Pi(Q_z)$ представляют потенциальную энергию сдвига. При сдвиге для элемента стержня, учитывая закон Гука и формулу Журавского для касательных напряжений, можно записать:

$$d\Pi(Q_y) = k_y \frac{Q_y^2 dx}{2GF};\ d\Pi(Q_z) = k_z \frac{Q_z^2 dx}{2GF},$$

где k_y и k_z – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения.

Как правило, эти слагаемые значительно меньше остальных, и ими можно пренебречь. Таким образом, потенциальная энергия деформации равна половине произведения сил или пары сил на перемещение по ее направлению в том сечении, где внутренняя сила приложена.

Сосредоточенную силу и сосредоточенный момент, вызывающие соответствующие перемещения, называют *обобщенными силой и моментом*, а перемещение, вызванное этой силой, – *обобщенным перемещением.*

Потенциальную энергию всего стержня найдем, проинтегрируя выражение (1.89)

$$\Pi = \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \int_l \frac{N^2 dx}{2EF} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dx}{2GF} + \int_l \frac{k_z Q_z^2 dx}{2GF}.$$

11.6. Теорема Кастильяно.

Рассмотрим стержень длиной l, жестко защемленный одним концом. Известны геометрические характеристики стержня F, I_y, I_p, модуль нормальной упругости материала E, модуль упругости при сдвиге G. К свободному торцу стержня последовательно приложим растягивающую силу P, скручивающий момент $M_к$ и изгибающий момент $M_и$. накопленная в стержне потенциальная энергия упругой деформации числено равна работе каждой из этих внешних сил:

$$П = \begin{cases} \dfrac{N^2 l}{2EF}; \text{при } P \neq 0, M_к = M_и = 0; \\ \dfrac{M_к^2 dx}{2GI_p} \text{ при } M_к \neq 0, P = M_и = 0; \\ \dfrac{M_и^2 dx}{2EI_y} \text{ при } M_и \neq 0, M_к = P = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим производные от энергии упругой деформации по соответствующей обобщающей силе

$$\frac{\partial П}{\partial P} = \frac{Pl}{EF} = \Delta l; \frac{\partial П}{\partial M_к} = \frac{M_к l}{GI_p} = \Delta\Theta; \frac{\partial П}{\partial M_к} = \frac{M_и l}{EI_y} = \Delta\varphi.$$

Производная от энергии упругой деформации по обобщенной силе равна перемещению, соответствующему этой силе по линии действия силы.

Эта закономерность в общем виде была установлена Кастильяно и сформулирована им в качестве теоремы.

Рассмотрим общий случай нагружения упругого тела. Пусть оно закреплено так, что при нагружении невозможно его смещение как жесткого целого. Тело испытывает деформацию под действием обобщенных сил $P_1, P_2, \dots, P_n$. Энергию упругой деформации выразим функцией этой группы сил: $П = П(P_1, P_2, \dots, P_n)$. Если одна из внешних сил, например P_n, придать небольшое приращение dP_n, то энергия упругой деформации возрастает:

$$П_1 = П + \frac{\partial П}{\partial P_n} dP_n.$$

Возьмем другой случай. Допустим, сначала была приложена бесконечно малая сила dP_n, вызывающая бесконечно малое перемещение. Работой силы dP_n можно пренебречь, как бесконечно малой величиной второго порядка по сравнению с работой приложенных затем сил $P_1, P_2, \dots, P_n$. Потенциальная

энергия упругой деформации, вызванной этими силами, по-прежнему равна П. В точке приложения силы P_n произойдет конечное перемещение δ_n, при котором малая сила dP_n, приложенная в начале, совершит работу $\delta_n dP_n$. В итоге накопленная потенциальная энергия будет равна $\Pi_1^* = \Pi + \delta_n dP_n$.

Потенциальная энергия деформации не зависит от порядка, в котором прикладываются силы, поэтому $\Pi_1 = \Pi_1^*$, и, следовательно,

$$\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} dP_n = \Pi + \delta_n dP_n,$$

откуда

$$\delta_n = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n}. \qquad (1.90)$$

Сформулируем *теорему Кастильяно:*

Частная производная от потенциальной энергии упругой деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению точки приложения силы по направлению силы.

Под перемещением в заданном направлении понимают проекцию полного перемещения на заданное направление. Перемещение точки приложения силы по направлению силы – это проекция на направление силы полного перемещения этой точки.

Список литературы

1. Бегун П. И., Кормилицын О.П. Прикладная механика. – СПб.: Политехника, 1995.
2. Сапрыкин В. И. Техническая механика. – М.: Эксмо, 2007.

3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007.
4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. Шк., 2004.
5. Кочетов В. Т., Кочетов М. В., Павленко А. Д. Сопротивление материалов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

Оглавление

Введение 4
Раздел 1. Статические расчетные схемы
Тема 1. Системы сходящихся сил. Моменты сил. Пары сил. Условия равновесия системы сил. Пространственная и плоская системы сил..... 5
1.1. Сила. Система сил..... 5
1.2. Аксиомы статики..... 6
1.3. Система сходящихся сил..... 7
1.4. Равновесие тела под действием системы сходящихся сил..... 8
1.5. Момент силы относительно точки и оси..... 9
1.6. Момент пары сил..... 10
1.7. Основная теорема статики..... 12
1.8. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил и ее частных видов..... 13
1.9. Центр параллельных сил..... 15
Тема 2. Центр тяжести тел..... 17
2.1. Определение центра тяжести тела..... 17
2.2. Центр тяжести симметричных однородных тел..... 18
2.3. Метод разбиения тела..... 18
2.4. Метод отрицательных масс..... 19
Тема 3. Трение..... 20
3.1. Трение скольжения..... 20

3.2. Трение качения..... 23
Тема 4. Общие сведения для построения расчетных схем..... 25
4.1. Схематизация формы объектов..... 25
4.2. Схематизация свойств материалов..... 25
4.3. Схематизация опор..... 26
4.4. Внешние силы..... 28
4.5. Внутренние силы. Напряжения..... 28
Тема 5. Внутренние силы в поперечном сечении стрежня..... 30
5.1. Составляющие внутренних сил в поперечном сечении стержня. Правило знаков..... 30
5.2. Внутренние силы в частных случаях деформации стержня..... 34
5.3. Общие правила построения эпюр внутренних сил..... 36
Раздел 2. Теория напряжений
Тема 6. Напряженное состояние в окрестности точки твердого тела..... 39
6.1. Напряжения в окрестности точки твердого тела: полное, нормальное, касательное..... 39
6.2. Уравнения равновесия элементарного тетраэдра..... 41
6.3. Дифференциальные уравнения равновесия..... 43
6.4. Свойство парности касательных напряжений..... 46
Тема 7. Главные площадки и главные напряжения в окрестности точки деформированного тела..... 47
7.1. Напряжения на произвольно ориентированных площадках..... 47
7.2. Главные площадки и главные напряжения..... 48
7.3. Определение главных напряжений и главных площадок в частном случае..... 51
7.4. Наибольшие касательные напряжения в окрестностях точки тела..... 52
Раздел 3. Теория деформаций
Тема 8. Теория деформаций..... 52
8.1. Перемещения и деформации. Составляющие деформации..... 52
8.2. Связь между деформациями и перемещениями..... 55

8.3. Уравнения сплошности..... 58
8.4. Главные деформации и главные оси..... 60
8.5. Закон Гука..... 62
8.6. Связь между составляющими деформаций и составляющими напряжений..... 64
Раздел 4. Расчеты на прочность по стержневой схеме
Тема 9. Напряжения в стержне, нагруженном по торцам..... 66
9.1. Массовые и геометрические характеристики сечений.. 66
9.2. Элементарное решение дифференциальных уравнений равновесия деформируемого тела..... 68
9.3. Напряжения в стержне, нагруженном по торцам..... 69
Тема 10. Расчет на прочность основных случаев деформации стержня..... 73
10.1. Механические свойства материалов..... 73
10.2. Теории прочности..... 76
10.3. Нормальные напряжения при осевом растяжении-сжатии. Концентрация напряжений..... 78
10.4. Напряжения при кручении стержня круглого поперечного сечения..... 79
10.5. Напряжения при чистом изгибе..... 80
10.6. Напряжения при плоско-поперечном изгибе..... 81
10.7. Сложный изгиб. Уравнение нейтральной линии..... 84
10.8. Совместное действие изгиба с кручением..... 85
Раздел 5. Расчет жесткости по стержневой схеме
Тема 11. Расчет жесткости стержня..... 86
11.1. Расчет перемещений при чистом изгибе..... 86
11.2. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня..... 90
11.3. Расчет перемещений при кручении круглых стержней..... 91
11.4. Расчет перемещений в стержнях по методу начального параметра..... 94
11.5. Потенциальная энергия стержня в общем случае..... 97
11.6. Теорема Кастильяно 98
Список литературы..... 100

Лебедева Елена Александровна

Механика деформируемого тела

Учебное пособие

105

Редактор

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. 6,5.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5