МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

А. И. ЛЫСКОВ О. В. МАКСИМОВА Н. Б. БУРЛУЦКАЯ

СЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2022

УДК 004.92(07)
ББК Ж11с11я7+З973.2–044.4я7
Л88

Лысков А. И., Максимова О. В., Бурлуцкая Н. Б.
Л88 Сечение пирамиды: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2022. 32 с.

ISBN 978-5-7629-3029-1

Рассмотрены методы построения вспомогательных проекций для решения позиционных и метрических задач. Разобраны варианты решений задач по определению истинной величины сечения пирамиды.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов технических специальностей, в учебные планы которых включен курс инженерной и компьютерной графики.

УДК 004.92(07)
ББК Ж11с11я7+З973.2–044.4я7

Рецензент канд. техн. наук, зав. каф. ТМиИГ, доц. Л. М. Ображай (СПбХФА).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7629-3029-1 © СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2022

1. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

1.1. Общие понятия

1. Проекции прямой, плоскости или фигуры, находящейся в случайном положении относительно плоскостей проекций, не всегда удобны для решения той или иной конкретной задачи. Например, проекции отрезка, расположенного наклонно ко всем плоскостям проекций, не дают непосредственного представления о натуральной его длине. Можно сказать, что в данном случае проекции отрезка «неудобны» для решения поставленного вопроса. Между тем, если бы тот же отрезок был параллелен одной из плоскостей проекций, то проецировался бы на эту плоскость без искажения, и можно было бы судить о его действительной длине без всяких дополнительных построений. При таком положении отрезка можно считать его проекции «удобными» для решения интересующего вопроса.

Если на эпюре изображена тем или другим способом плоскость общего положения, то без специальных построений нельзя сказать, какой угол образует она с горизонтальной плоскостью или с фронтальной плоскостью. Между тем, если бы та же плоскость была проецирующей, то наклон одного из ее следов к оси X непосредственно давал бы значение интересующего нас угла. Первое из этих двух положений плоскости неудобно для решения практического вопроса, второе – удобно.

Как следует поступить в том случае, если основные две проекции (на плоскости $П_1$ и $П_2$) неудовлетворительны в каком-либо отношении, например, не дают ясного представления о форме оригинала или затрудняют решение какой-либо частной задачи? Необходимо прибегнуть к построению новых, *вспомогательных* проекций, упрощающих решение задачи или помогающих выяснить нужные подробности. Например, две проекции цилиндра на плоскости $П_1$ и $П_2$ не позволяют установить форму оригинала. Построение вспомогательной проекции на плоскость $П_3$ устраняет все сомнения. Эта вспомогательная проекция облегчает решение различных задач на поверхности цилиндра.

Методом построения вспомогательных изображений можно воспользоваться и когда нужно найти точку пересечения профильной прямой с плоскостью. Проекции профильных прямых на $П_1$ и $П_2$ вообще можно считать «неудобными», их проекции вертикальны. Для получения вспомогательного, более удобного изображения можно изменить направление проецирования, т. е.

вместо ортогонального проектирования воспользовались косоугольным. При этом нужно построить вспомогательную проекцию на одной из основных плоскостей (например, на $П_1$), и на биссекторной плоскости IV четверти (что несколько проще, но необязательно).

2. Существуют и другие методы построения вспомогательных проекций. Так, если при заданном положении предмета относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$ получаются неудовлетворительные изображения, то вместо изменения направления проецирования можно изменить положение проецируемого предмета.

Для получения более выгодного положения проецируемого предмета относительно плоскостей проекций можно либо повернуть оригинал в более удобное положение (например, при желании определить истинные размеры и форму плоской фигуры повернуть ее в положение, параллельное одной из плоскостей проекций), либо, наоборот, оставив сам предмет неподвижным, переместить одну или две плоскости проекций, установив их так, чтобы полученные на них новые проекции способствовали решению задачи.

В обоих случаях заданные проекции предмета изменяются. Как выполнить преобразование на эпюре, т. е. каким образом от заданных проекций перейти к новым, полученным в результате поворота проецируемого предмета или перемены плоскостей проекций? Рассмотрим эти способы.

1.2. Метод перемены плоскостей проекций

1.2.1. Пусть имеется система двух взаимно перпендикулярных плоскостей $П_1$ и $П_2$ (будем в дальнейшем сокращенно обозначать такую систему $П_1/П_2$) и точка в пространстве A (рис. 1).

Проекции точки: горизонтальная – A_1, фронтальная – A_2.

Положим, что по каким-либо соображениям мы нашли целесообразным заменить плоскость $П_2$ другой вертикальной плоскостью проекций $П_4$, оставив прежнюю плоскость $П_1$. Плоскости $П_4$ и $П_1$ также взаимно перпендикулярны и потому могут быть приняты за новую систему плоскостей проекций $П_1/П_4$ Вся разница состоит в том, что зритель, который раньше предполагался в положении *I*, должен теперь переместиться в положение *II* и стать лицом к плоскости $П_4$, так чтобы точка A была по-прежнему между ним и вертикальной плоскостью проекций.

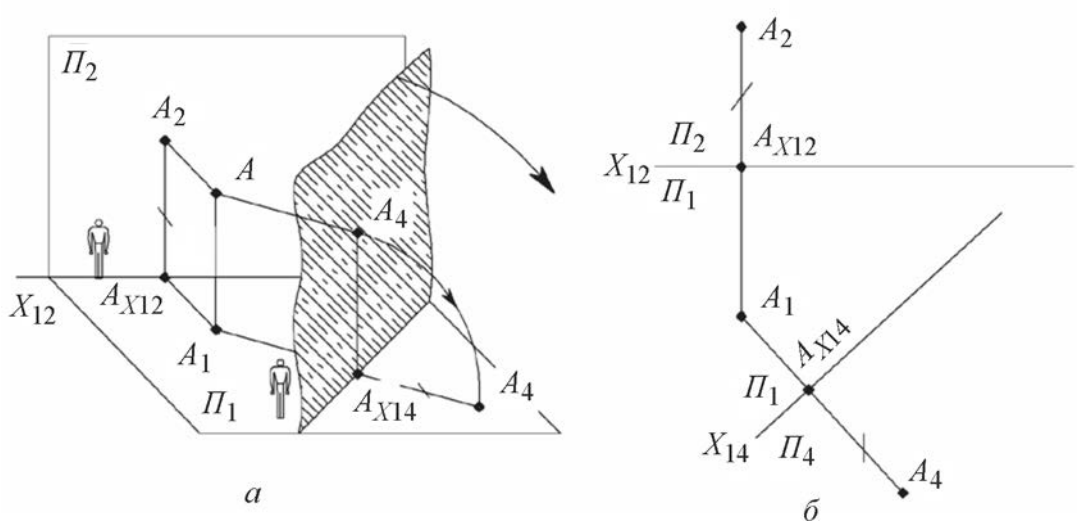


Рис. 1

Линия пересечения плоскостей $П_1$ и $П_4$, т. е. X_{14} будет теперь новой осью проекций.

Найдем ортогональные проекции точки A в новой системе $П_1/ П_4$.

Очевидно, замена плоскости $П_2$ совершенно не отражается на горизонтальной проекции точки A_1: так как плоскость $П_1$ осталась в прежнем положении, то и проекция точки A на эту плоскость не изменится.

Для получения новой вертикальной проекции точки A на плоскости $П_2$ надо опустить из A перпендикуляр на плоскость $П_2$, который и определит искомую проекцию A_2. Итак, вместо проекций A_1 и A_2 в системе $П_1/ П_2$ мы имеем теперь проекции A_1 и A_4 в системе $П_1/ П_4$.

Легко установить связь между старыми и новыми проекциями. Расстояние точки А от плоскости $П_1$ не изменилось, так как эта плоскость осталась в прежнем положении. Следовательно, расстояние новой проекции от новой оси равно расстоянию заменяемой проекции от предыдущей оси.

Для перехода к эпюре представим теперь, что плоскость $П_1$, повернута, как на шарнире, вокруг новой оси X_{24} и совмещена с плоскостью $П_2$. Тогда и новая вертикальная проекция A_4 совместится с плоскостью $П_4$ и при этом окажется на одном перпендикуляре к оси X_{14}, с проекцией A_2.

На рис. 1, *б* показаны построения, которые надо выполнить на эпюре, чтобы от изображения точки в системе $П_1/ П_2$ (проекции A_1 и A_2) перейти к изображению ее в системе $П_1/ П_4$ (проекции A_1 и A_4). Эти построения сводятся к следующему: из A_2 надо опустить перпендикуляр на новую ось X_{24} и отложить на нем расстояние $A_{X12}\,A_2 = A_{X14}\,A_4$.

1.2.2. К аналогичным заключениям можно прийти и при замене горизонтальной плоскости $П_1$ какой-либо другой плоскостью $П_4$, перпендикулярной к плоскости $П_2$ (рис. 2). Новая плоскость $П_4$ образует с прежней плоскостью $П_2$ новую систему $П_2/П_4$. Линия пересечения их дает новую ось проекций X_{24}.

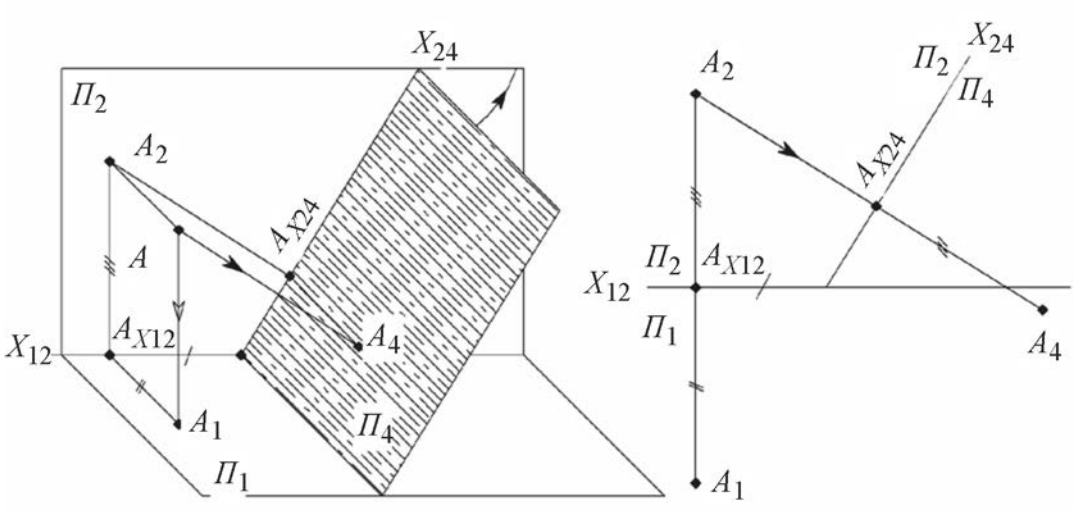


Рис. 2

Плоскость $П_4$ не является уже горизонтальной, но название это понимается условно и плоскости проекций могут занимать в пространстве любое положение.

При перемене плоскости $П_1$ вертикальная проекция A_2 точки A не изменяется, равно как и расстояние точки А от плоскости $П_2$, т. е. $A_{X12}\,A_2 = A_{X24}\,A_4$.

Поэтому для построения новой горизонтальной проекции A_4 надо из A_2 опустить перпендикуляр на ось X_{24} и отложить на нем расстояние $A_{X12}\,A_2$.

1.2.3. Объединяя оба правила в одно, можно сформулировать его так: для построения на эпюре новой проекции точки при перемене одной из плоскостей проекций надо опустить перпендикуляр на новую ось из той проекции точки, которая не меняется, и отложить на нем расстояние от заменяемой проекции до предыдущей оси. Теперь можно с новой точки зрения истолковать уже знакомое проецирование на профильную плоскость $П_3$. Очевидно, его можно рассматривать как один из случаев перемены плоскостей проекций.

Зная, как строятся при перемене плоскостей проекций новые проекции отдельных точек, можно построить новые проекции и любой группы точек, т. е. линии, плоскости или фигуры.

1.2.4. Заметим, что нельзя менять обе плоскости проекций сразу. Новая плоскость проекций должна сохранять перпендикулярность к остающейся

плоскости. Поэтому замену плоскостей можно выполнять только последовательно, изменяя сначала одну плоскость, а затем другую. Если это требуется для решения задачи, такую операцию можно повторять неограниченное количество раз.

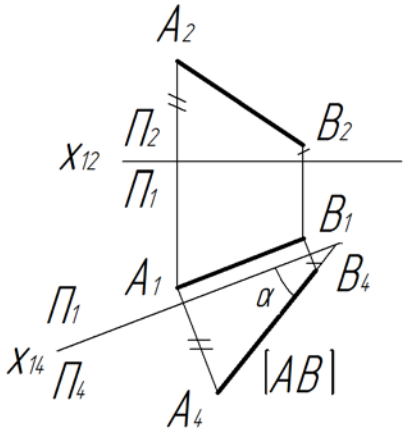


Рис. 3

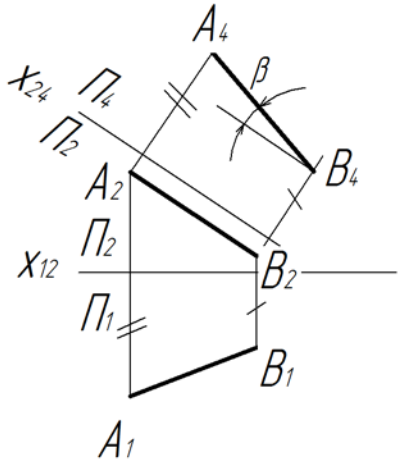


Рис. 4

1.2.5. На рис. 3 показано построение новой фронтальной проекции отрезка AB при замене плоскости $П_2$ плоскостью $П_4$. Цель этого преобразования – определение истинной длины отрезка. Новую фронтальную плоскость $П_4$ надо установить параллельно AB. На эпюре это выразится в том, что новая ось проекций X_{14} будет параллельна горизонтальной проекции A_1B_1. Где именно провести на чертеже новую ось совершенно безразлично, лишь бы она была параллельна AB. Выбрав положение новой оси X_{14}, остается построить новые фронтальные проекции A_4 и B_4 концевых точек отрезка, руководствуясь изложенным правилом. Рассматривая полученное расположение проекций A_1B_1 и A_4B_4 отрезка относительно новой оси X_{14}, легко видеть, что в новой системе $П_1/П_4$ отрезок AB является горизонталью (т. е. параллелен плоскости $П_4$), следовательно, проецируется на плоскость $П_4$, в натуральную величину.

Рис. 4 показывает, как решается та же задача переменной горизонтальной плоскости проекций: новая ось X_{24} проведена параллельно A_2B_2. Новая горизонтальная проекция A_4B_4 в системе $П_2/П_4$ дает натуральный размер отрезка AB. Вместе с тем определились и действительные размеры углов α и β, которые образует прямая AB с плоскостями проекций $П_1$ и $П_2$.

При этом, если концы данного отрезка расположены в разных четвертях пространства, как на рис. 5, необходимо обращать внимание на знаки коор-

динат: в случае одинаковых знаков откладывать соответствующие расстояния в одну и ту же сторону от новой оси, в случае разных знаков – в обе стороны от новой оси. В примере (рис. 5*)* точка *A* данного отрезка расположена в IV четверти, точка *B* – в *I* четверти. Такое относительное расположение точек сохранилось и после замены плоскости $П_2$ на $П_4$. В новой системе $П_1/П_4$ точка *A* тоже расположена в IV четверти, точка *B* – в *I* четверти.

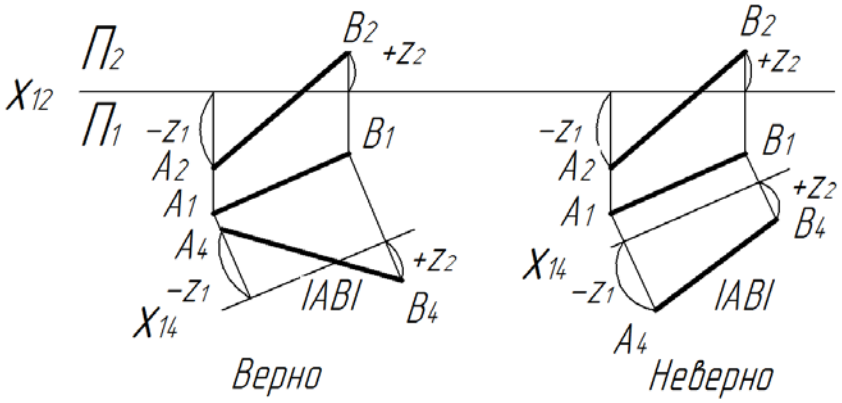


Рис. 5

Справа на рис. 5 показано неверное решение: аппликаты точек *A* и *B*, имеющие разные знаки, отложены в одну сторону от оси X_{14}, вследствие чего относительное положение точек *A* и *B* нарушилось.

1.2.6. На рис. 6 отрезок *AB* способом перемены плоскостей приведен в положение, перпендикулярное новой горизонтальной плоскости проекций $П_5$. В отличие от предыдущей эта задача не может быть решена сразу одной заменой плоскости $П_1$. Необходимо предварительно изменить плоскость $П_2$ так, чтобы сделать *AB* // $П_4$. После этого заменяется плоскость $П_1$, причем по

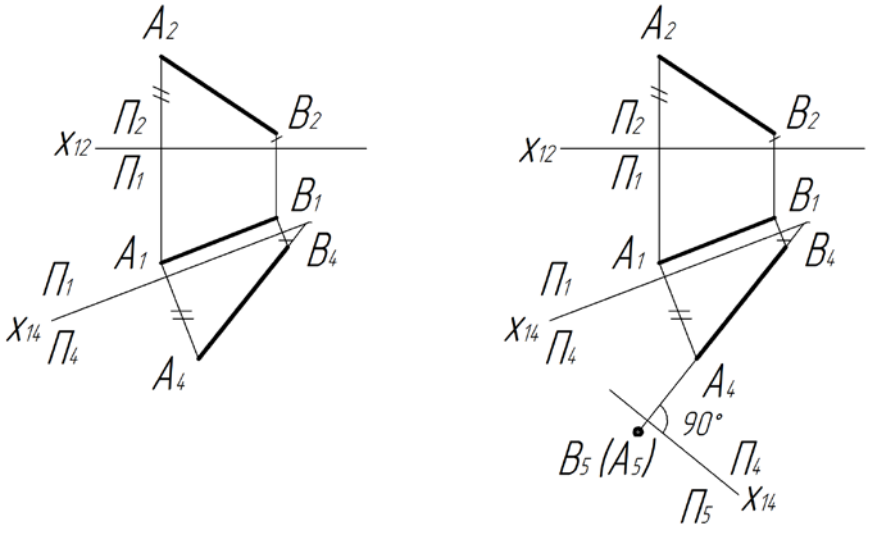


Рис. 6

смыслу задачи надо провести новую ось перпендикулярно к A_4B_4. В системе $П_4/П_5$ эта прямая проецируется в точку (проекции A_5 и B_5 совпадают), что и доказывает перпендикулярность AB к плоскости $П_5$.

Если нужно сделать заданную прямую перпендикулярной к плоскости $П_4$, необходимо предварительно привести ее в положение, параллельное горизонтальной плоскости $П_1$.

1.2.7. Посмотрим, как преобразуется при перемене плоскостей $П_1$ или $П_2$ изображение заданной плоскости. На рис. 7 задана своими следами плоскость P общего положения. Требуется сделать эту плоскость проецирующей (например, фронтально проецирующей) в новой системе плоскостей проекций. Зная, что горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости должен быть перпендикулярен к оси проекций, выбираем новую ось X_{14} перпендикулярно $P_{П1}$ и заменяем плоскость $П_2$ новой плоскостью $П_4$. Положение следа $P_{П1}$ не изменится при перемене плоскости $П_2$, но точка схода следов перейдет теперь на новую ось в точку P_{X14}.

Остается найти новое положение фронтального следа в системе $П_1/П_4$. С этой целью взята произвольная точка (N_2, N_1) на старом следе $П_2$ и построена ее новая фронтальная проекция N_4 в системе $П_1/П_4$. Очевидно, след $P_{П2}$, будет проходить через N_4. Для построения его можно воспользоваться и любой другой точкой плоскости P, так как известно, что все вертикальные проекции точек, принадлежащих фронтально проецирующей плоскости, совпадают с вертикальным следом. Выполненное преобразование дает и значение угла α, составляемого плоскостью P с плоскостью $П_1$.

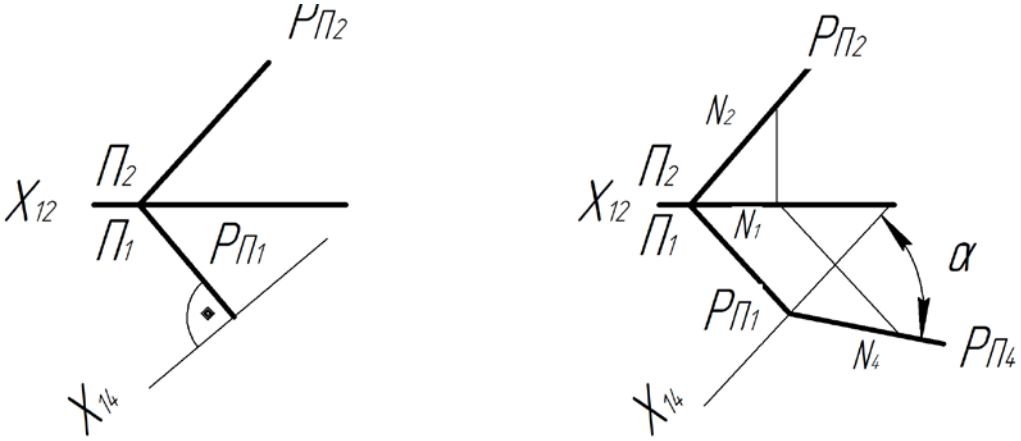


Рис. 7

Для более точного построения следа $P_{П2}$ надо брать точку (N_2, N_1) как можно дальше от точки схода P_{X14}.

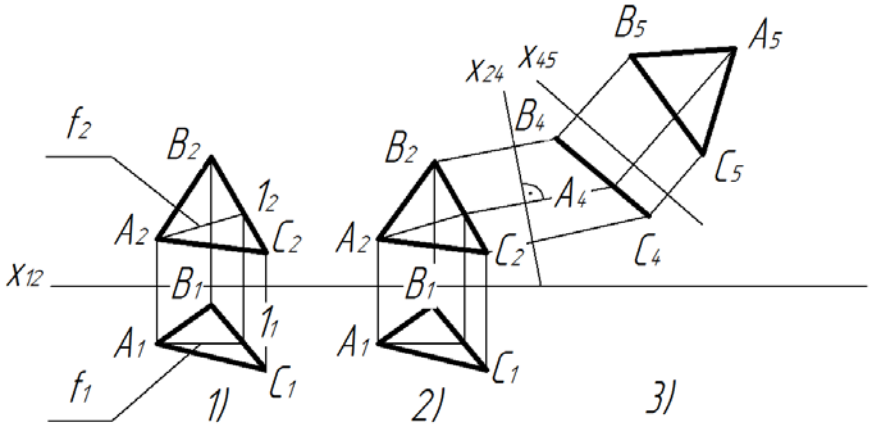


Рис. 8

1.2.8. На рис. 8 та же задача выполнена для случая, когда на эпюре нет следов плоскости: плоскость задана треугольником *ABC*, и требуется сделать ее горизонтально проецирующей. Для этого проводим фронталь плоскости *ABC*, т. е. прямую, параллельную этому следу. Новая ось X_{24}, проведенная перпендикулярно к фронтали, будет перпендикулярна и отсутствующему фронтальному следу. Построив в системе $П_2/П_4$ новые горизонтальные проекции вершин треугольника A_4, B_4 и C_4, убеждаемся, что он спроецировался на плоскость $П_4$, в одну прямую линию. Это и есть признак того, что в системе $П_2/П_4$ треугольник расположен в горизонтально проектирующей плоскости. Задача решена. Одновременно определился угол β, образуемый заданной плоскостью с плоскостью $П_2$.

1.2.9. На рис. 8 построение продолжено, чтобы определить истинные размеры и форму треугольника *ABC*. Для этого установлена новая фронтальная плоскость $П_5$, параллельная плоскости треугольника, т. е. на эпюре проведена новая ось проекций $X_{45} \parallel A_4B_4C_4$. Спроецировав треугольник на эту плоскость, получаем его истинную фигуру $A_5B_5C_5$.

Как видим, для построения истинной формы и размеров плоской фигуры методом перемены плоскостей проекций требуется выполнить двойную перемену: сначала преобразовать плоскость данной фигуры в проецирующую относительно новой плоскости проекций (т. е. получить одну из проекций фигуры в виде прямой линии), затем вторично спроецировать фигуру на параллельную ей плоскость.

1.2.10. На рис. 9 метод перемены плоскостей проекций применен для преобразования проекций наклонной призмы. Изменена плоскость $П_2$, причем новая плоскость $П_4$ установлена параллельно боковым ребрам призмы. Видно, что и в этом случае решение сводится к построению новых проекций отдельных точек – вершин призмы.

Новая вертикальная проекция призмы на плоскости $П_4$, дает истинные размеры всех боковых ребер призмы.

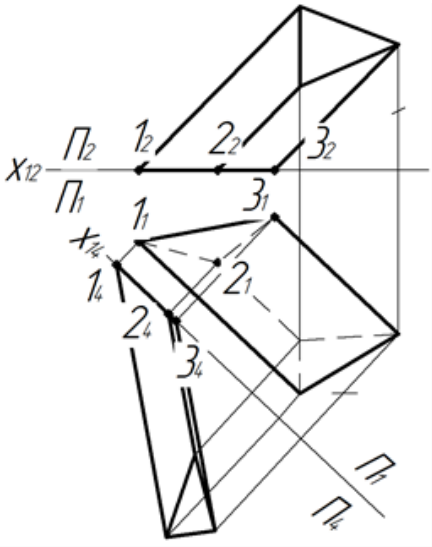


Рис. 9

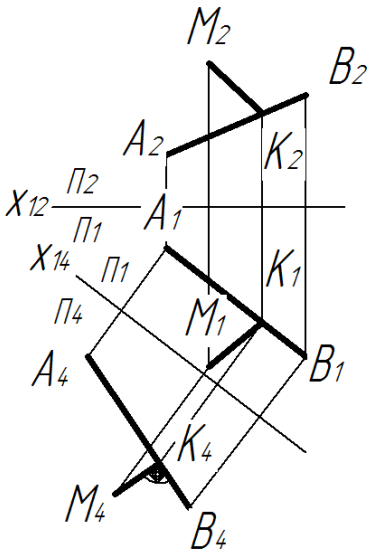


Рис. 10

1.2.11. Метод перемены плоскостей проекций весьма упрощает решение различных задач. Он удобен также и в графическом отношении, так как новые оси проекций можно проводить в любом месте чертежа и использовать таким образом свободное поле листа, избегая наложения проекций друг на друга и связанной с этим неясности эпюр.

Для иллюстрации преимуществ этого метода далее показано решение нескольких задач, которые другими способами решаются более сложно.

Задача 1. Из заданной точки *M* опустить перпендикуляр на прямую *AB* (рис. 10). Основание перпендикуляра – точка *K*.

Можно решить эту задачу, не пользуясь методом перемены плоскостей проекций, например, так:

1) провести через точку *M* плоскость, перпендикулярную прямой *AB*, что само по себе требует некоторых вспомогательных построений;

2) найти точку встречи проведенной плоскости с прямой *AB* (т. е. выполнить три действия;

3) соединить найденную точку с точкой *M*.

Методом перемены плоскостей эта задача решается заменой всего одной плоскости $П_1$ или $П_2$. Новая ось выбирается параллельно A_1B_1 (или A_2B_2). При этом условии прямая AB будет параллельна плоскости $П_2$, (или $П_1$); значит, прямой угол между AB и искомым перпендикуляром будет проецироваться на эту плоскость без искажения (теорема о проецировании прямого угла). Другими словами, M_4K_4 и есть проекция искомого перпендикуляра на плоскости $П_4$. Остается построить проекции точки K, т. е. K_1 и K_2 в старой системе $П_1/П_2$ и соединить их с M_1 и M_2.

Задача 2. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями P и Q *(рис. 11).*

Расстояние между двумя параллельными плоскостями есть длина перпендикуляра, опущенного из какой-либо точки одной плоскости на другую. Исходя из этого соображения, можно решить задачу, не применяя метода перемены плоскостей проекций:

– взять на плоскости P произвольную точку;

– опустить из этой точки перпендикуляр на плоскость Q;

– найти точку встречи опущенного перпендикуляра с плоскостью Q;

– соединить проекции обеих точек, т. е. найти проекции перпендикуляра;

– по проекциям перпендикуляра определить его истинную длину.

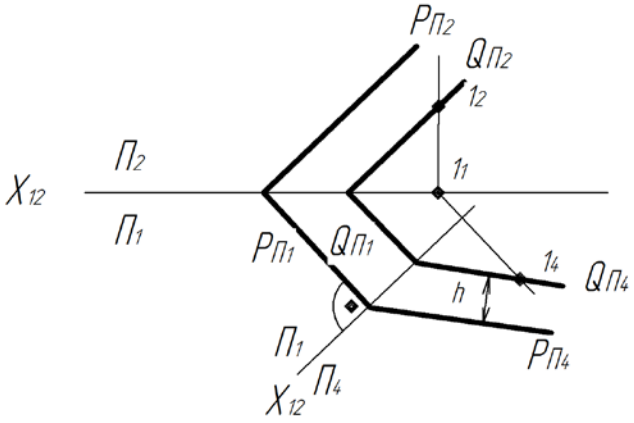


Рис. 11

Итого пять основных действий, не считая различных вспомогательных построений.

Между тем задача может быть решена простой переменой одной плоскости проекций ($П_1$ или $П_2$). Решение показано на рис. 11. Выполнена замена плоскости $П_2$ так, чтобы в новой системе $П_1/П_4$ обе данные плоскости были фронтально проецирующими. С этой целью новая ось X_4 проведена перпендикулярно следам $P_{П1}$ и $Q_{П1}$. Построен новый вертикальный след одной из

плоскостей, например, $Q_{П4}$. След $P_{П4}$, проведен параллельно $Q_{П4}$, так как параллельность плоскостей сохраняется и в новой системе. Теперь отрезок h, перпендикулярный следам $P_{П4}$ и $Q_{П4}$, непосредственно выражает расстояние между данными плоскостями.

Преимущества второго способа решения очевидны.

Задача 3. Определить значение двугранного угла, образуемого двумя пересекающимися плоскостями P и Q.

Пусть заданы своими следами плоскости P и Q, пересекающиеся по линии MN (рис. 12). Если бы линия пересечения MN была перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то двугранный угол между P и Q проецировался бы на эту плоскость в натуральную величину.

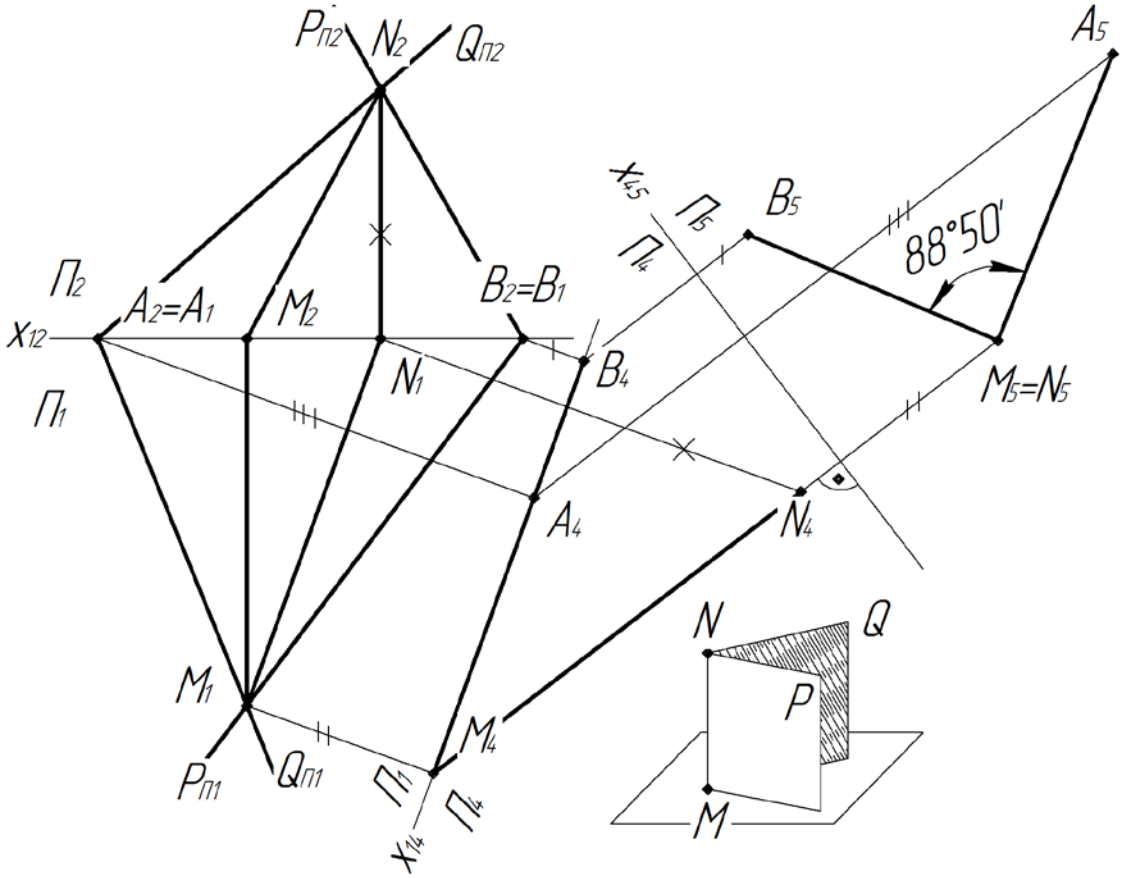


Рис. 12

Исходя из такого соображения, заменим данную систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ новой системой $П_4/П_5$ так, чтобы прямая MN была в ней перпендикулярна к плоскости $П_5$.

Эта операция описана ранее, в п. 1.2.6 (рис. 6). Заменяем сначала плоскость $П_2$ новой плоскостью $П_4$, установив ее параллельно MN; значит, новая ось проекций X_{14} должна быть проведена параллельно M_1N_1. Новые верти-

кальные проекции точек *M, A* и *B,* лежащих в самой плоскости $П_1$, будут лежать на новой оси в точках M_4, A_4 и B_4; новая вертикальная проекция точки N – в N_4 и, следовательно, новая вертикальная проекция прямой *MN* будет M_4N_4. Затем меняем плоскость $П_1$, причем новую ось проводим перпендикулярно M_4N_4 и строим, как обычно, новые горизонтальные проекции тех же четырех точек A_5, B_5, C_5 и M_5. При этом проекции M_5 и N_5 совпадут, и угол выразит натуральное значение двугранного угла.

Аналогично решается эта задача и в том случае, когда плоскости заданы не следами, а каким-либо иным способом.

Решая задачи по определению плоских сечений твердых тел, чаще всего удобно использовать метод перемены плоскостей проекций. В приложении рассмотрены задачи, в которых требуется определить сечение четырехгранной пирамиды *ABCD* плоскостью Ω при различных вариантах задания ее положения. Одним из условий является то, что плоскость Ω должна содержать точку *E*, принадлежащую заданной грани пирамиды. Секущая плоскость может быть перпендикулярна или параллельна грани (ребру) пирамиды, содержать какое-либо ребро или вершину.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

2.1. Как видно из предыдущего, при перемене плоскостей проекций мы ничем не связаны в выборе положения новой плоскости проекций кроме одного условия: новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна остающейся плоскости проекций. Поэтому возможно заменить, например, плоскость $П_2$ новой плоскостью $П_4$, расположив ее параллельно плоскости $П_2$, или плоскость $П_1$ плоскостью $П_5$ (рис. 13, *а*). При этом плоскость $П_4$ будет перпендикулярна плоскости $П_1$, а новая ось X_{14} // X_{12}. Видно, что при таком преобразовании новая горизонтальная проекция $A_5B_5C_5$ ничем не отличается от прежней проекции $A_1B_1C_1$, т. е. $\Delta A_5B_5C_5 = \Delta A_1B_1C_1$.

Сохраняются расстояния точек *A, B, C* от новой оси проекций.

Таким же образом вместо плоскости $П_1$ можно взять параллельную ей новую плоскость $П_5$*:* ни форма вертикальной проекции, ни расстояния точек *A, B, C* от новой оси проекций при этом не изменятся.

Итак, смещение плоскостей проекций параллельно самим себе не вызывает никакого изменения проекций. Вместе с тем это преобразование позволяет устанавливать плоскости проекций так, чтобы проецируемый предмет

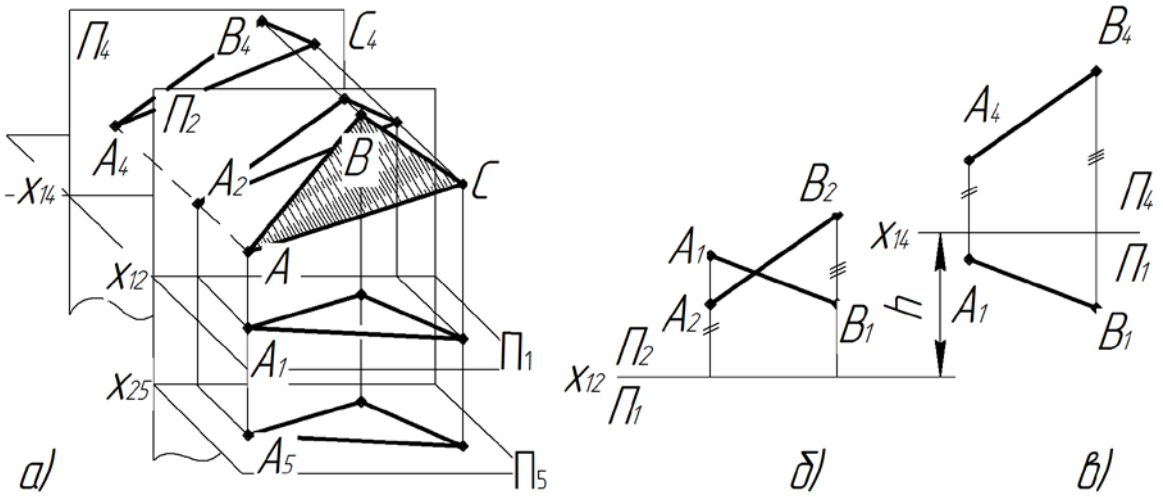


Рис. 13

всегда находился в *I* четверти пространства. Этим можно избежать наложения проекций и вообще упростить эпюру.

2.2. Пусть, например, дан отрезок *AB*, расположенный во *II* четверти (рис. 13, *б*). Отодвинув плоскость $П_4$ параллельно самой себе на достаточное расстояние *h*, достигается то, что этот отрезок окажется впереди плоскости $П_4$, т. е. в *I* четверти (рис. 13, *в*). Для выполнения этой операции на эпюре достаточно провести новую ось X_{14} // X_{12} и построить новую вертикальную проекцию A_4B_4, сохраняя прежние расстояния точек A_2 *и* B_2 от оси X_{12}, другими словами, сместить вертикальную проекцию на *h* вверх.

Другой пример такого же рода приведен на рис. 14. Здесь заданы проекции треугольника *ABC*, две вершины которого расположены в *IV* четверти и одна – в *I* четверти. Проекции накладываются одна на другую, что делает эпюру мало удобной для выполнения графических построений. Но, опустив плоскость $П_1$ на значение *h*, можно образовать новую систему плоскостей $П_2/П_4$, в которой этот треугольник будет уже в *I* четверти, что и показано на

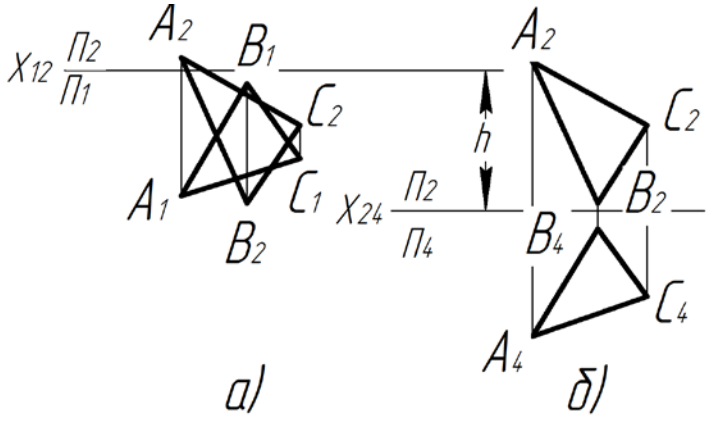
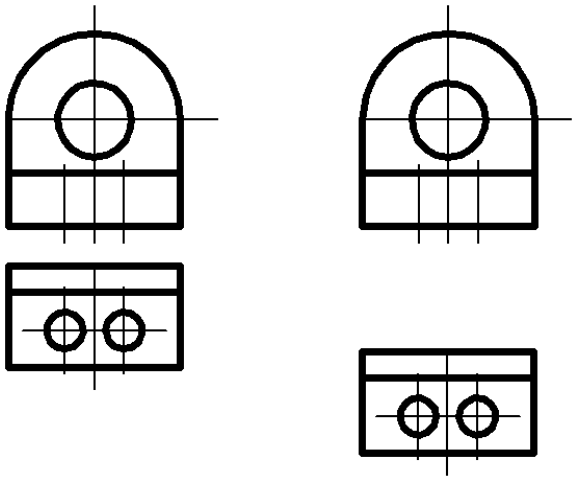


Рис. 14

рис. 14, *б*. Ось проекций сдвинута вниз на достаточное значение h в положение X_{24}. Вместе с ней сдвинута и горизонтальная проекция. В новой системе данный треугольник располагается в *I* четверти, и эпюра стала ясней и проще.

Значение h, на которое надо сместить ось, подчинено лишь одному условию: оно должно быть достаточно, чтобы проецируемая фигура оказалась в *I* четверти. В остальном оно произвольно. Поэтому практически можно совсем не наносить новую ось, а просто раздвинуть проекции по направлению проецирующих линий настолько, чтобы они не накладывались одна на другую, и фронтальная проекция была выше горизонтальной.



а *б*

Рис. 15

2.4. На технических чертежах ось проекций действительно никогда не наносят, а расстояние между проекциями выбирают произвольно, учитывая только свободу размещения, как показано на рис. 15. Изложенные соображения вполне оправдывают такой способ действий. Так как при этом проецируемый предмет всегда предполагается в *I* четверти, то отпадает надобность и в буквенных обозначениях. Нанесение осей проекций становится, однако, обязательным, если требуется задать численные координаты точек, принадлежащих изображаемому предмету. В этом случае оси координат могут быть проведены произвольно, в любом месте поля чертежа. Нанесение оси проекций необходимо также в том случае, если требуется построить следы прямых или плоскостей.

3. МЕТОД ВРАЩЕНИЯ

3.1. Метод вращения, как было выяснено в п. 1.2, по своей идее противоположен методу перемены плоскостей проекций, т. е. плоскости проекций при этом способе остаются неподвижными, положение же проецируемой фи-

гуры изменяется поворотом ее вокруг некоторой оси. Геометрически оба эти приема равнозначны, но на эпюре они выполняются по-разному.

Рассмотрим сначала один из возможных способов вращения: вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскости $П_1$ или $П_2$.

Основными элементами любого тела являются точки, и мы рассмотрим прежде всего изменение проекций точки при вращении ее вокруг таких осей. Рис. 16 дает наглядное представление об изменении проекций точки *M* при вращении ее вокруг оси *OO'*, перпендикулярной плоскости $П_2$.

В пространстве точка *M* будет описывать при этом окружность в плоскости, перпендикулярной оси *OO'* и одновременно параллельной плоскости $П_2$. Поэтому путь точки будет проецироваться на плоскость $П_1$ в виде прямой линии, параллельной оси X_{12}, а на плоскость $П_2$ – в виде окружности того же радиуса *R*. Если повернуть точку *M* на некоторый угол α в новое положение *M'*, то и фронтальная проекция ее повернется на тот же угол α, описав дугу M_2M_2', а горизонтальная проекция передвинется по прямой линии M_1M_1'.

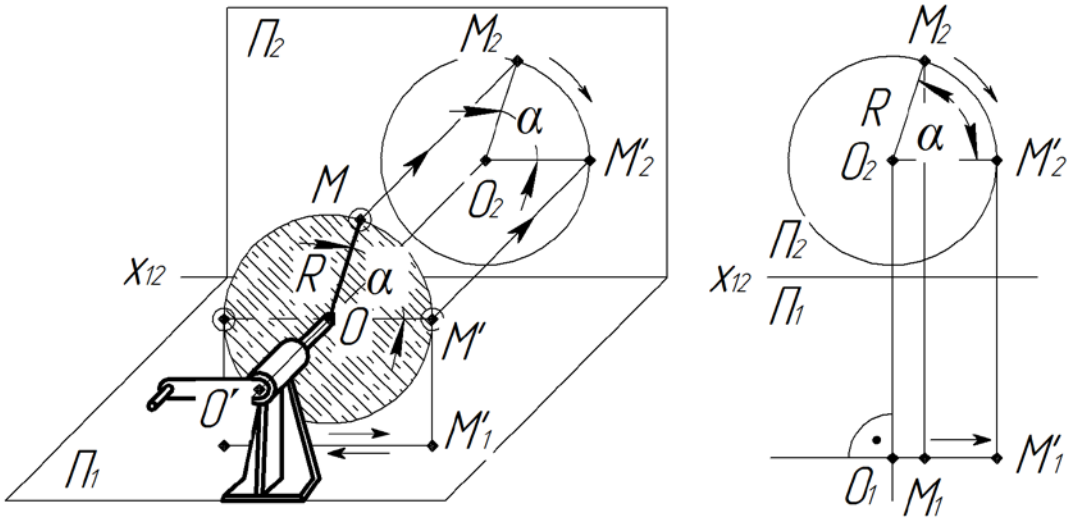


Рис. 16

Справа на рис. 16 показано изменение проекций точки *M* на эпюре.

Итак, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости $П_2$, вертикальная проекция точки перемещается по окружности с центром на оси вращения, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной оси вращения, т. е. параллельной оси X_{12}.

3.2. Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости $П_1$, поясняется наглядным изображением и эпюрой на рис. 17.

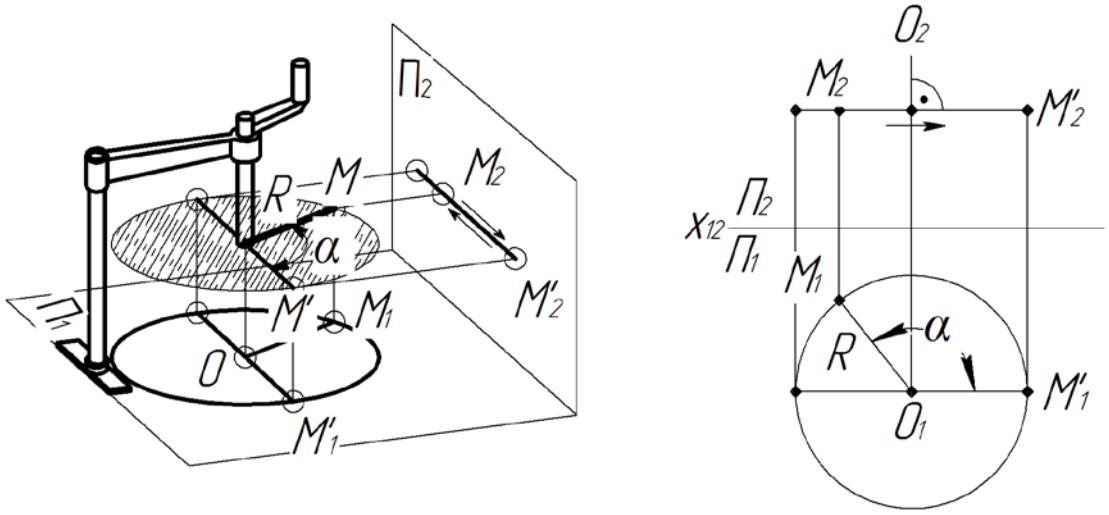


Рис. 17

Здесь вращение точки *M* совершается в плоскости, параллельной плоскости $П_1$. Поэтому окружность, по которой движется точка, проецируется на эту плоскость в натуральную величину, а на плоскость $П_2$ – в виде отрезка прямой, равного диаметру окружности.

Из рассмотрения чертежа можно сделать вывод: при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной плоскости $П_1$, горизонтальная проекция точки перемещается по окружности с центром на оси вращения, а фронтальная – по прямой, перпендикулярной оси вращения, т. е. параллельной оси X_{12}.

3.3. Уяснив эти два основных правила, нетрудно произвести на эпюре поворот линии, плоскости или фигуры. Пусть, например, требуется данный отрезок *AB* общего положения (рис. 18) повернуть так, чтобы он был параллелен плоскости $П_2$. Целесообразно выбрать ось вращения так, чтобы она проходила через один из концов отрезка, например, через точку *A*. Тогда эта точка как лежащая на самой оси вращения не будет изменять своего положения, и останется найти новые проекции только второй точки *B*.

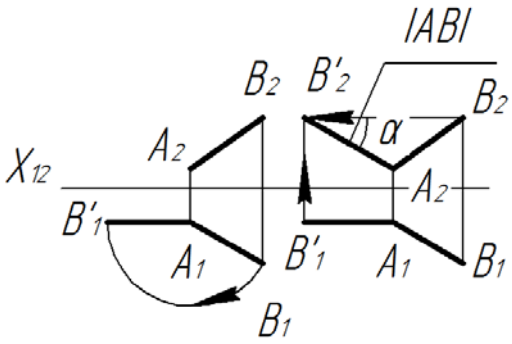


Рис. 18

Итак, вообразим ось вращения, перпендикулярную плоскости $П_1$ и проходящую через конец отрезка *A* (нет надобности наносить проекции этой оси на эпюре; достаточно подразумевать ее и иметь в виду, что горизонтальная проекция воображаемой оси есть точка, совпадающая с точкой *A)*. Повернем с помощью циркуля горизонтальную

проекцию A_1B_1 в положение A_1B_1' // X_{12}. Такое положение эта проекция и должна иметь, если требуется, чтобы прямая AB была параллельна плоскости $П_2$. Остается найти новую вертикальную проекцию отрезка после поворота. Проекция A_2 не меняет своего места. Проекция B_2' перемещается, как было установлено ранее, по прямой, параллельной оси X_{12}, оставаясь все время на общем перпендикуляре со своей горизонтальной проекцией. Когда эта последняя придет в положение B_1', проекция B_2 переместится в B_2'. Остается соединить точку B_2' и неподвижную проекцию A_2. Новые проекции отрезка AB в повернутом положении будут A_1 B_1' и A_2B_2'.

Так как отрезок AB теперь стал параллелен плоскости $П_2$, то его вертикальная фронтальная проекция дает натуральный его вид. Так методом вращения решается задача определения истинной длины отрезка прямой.

Одновременно определился и угол α, образуемый этой прямой с плоскостью $П_1$. Очевидно, можно найти истинную длину отрезка, повернув его в положение, параллельное плоскости $П_2$, на которую он и будет тогда проецироваться без искажения. Ось вращения для этой операции надо взять перпендикулярной плоскости $П_2$.

3.4. Аналогично перемене плоскостей проекций не всегда можно сразу, одним поворотом вокруг одной оси, прийти к решению задачи.

Например, если бы требовалось тот же отрезок AB поставить в положение, перпендикулярное одной из плоскостей проекций, то, сколько бы мы ни вращали его вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $П_1$ или к плоскости $П_2$, желаемого результата достигнуть не удастся. Для достижения его надо совершить два последовательных поворота отрезка вокруг двух разных осей, как показано на рис. 19.

На этой эпюре отрезок повернут сначала вокруг оси, проведенной через точку A и перпендикулярной плоскости $П_1$, до положения, параллельного плоскости $П_2$; затем сделан второй поворот вокруг оси, также проведенной через A, но перпендикулярной к плоскости $П_2$. В результате фронтальная проекция отрезка A_2B_2'' заняла положение перпендикулярное оси X_{12}, а горизонтальная превратилась в точку $A_1 = B_2''$, что и доказывает перпендикулярность отрезка AB к плоскости $П_1$.

3.5. На рис. 20, слева показано вращение плоскости, заданной следами. Задача состоит в том, чтобы сделать данную плоскость P проецирующей,

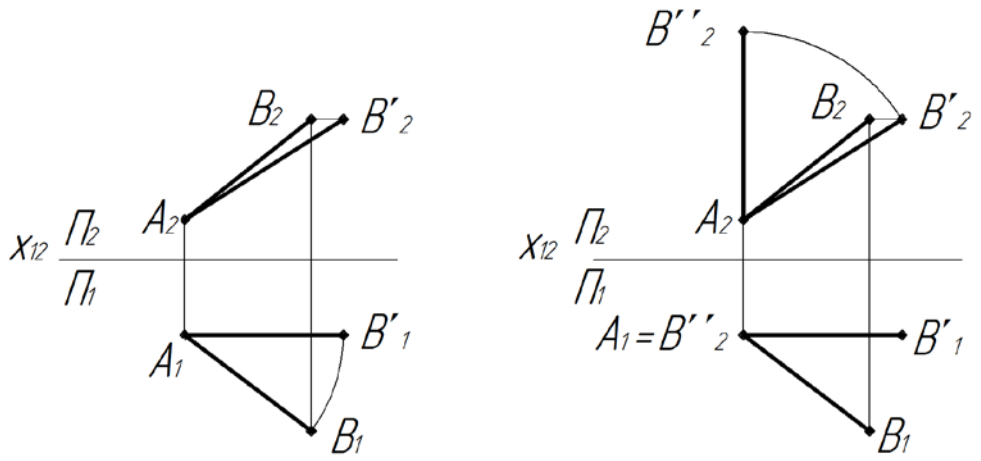


Рис. 19

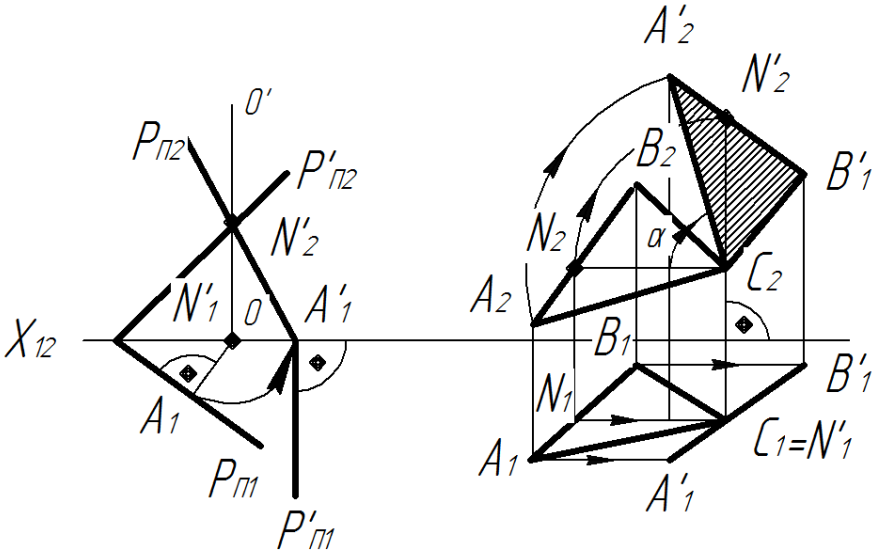


Рис. 20

например, поставить ее в положение, перпендикулярное плоскости $П_2$. Для упрощения построений ось вращения OO' выбрана так, что она лежит в самой плоскости $П_2$ и поэтому пересекает след $P_{П2}$ в некоторой точке N'_2. Эта точка не будет изменять своего положения при вращении плоскости вокруг оси OO'. Так как плоскость P должна стать фронтально проецирующей, то, нужно повернуть ее горизонтальный след $P_{П2}$ так, чтобы он стал перпендикулярным оси X_{12}. Для выполнения этой операции проведем $OA_1 \perp P_{П1}$ и повернем проведенный перпендикуляр вместе со следом $P_{П1}$ до горизонтального положения, т. е. до совпадения с осью X_{12}. Тогда точка A_1 переместится в A_2, и след $P_{П1}$ займет требуемое положение $P'_{П1}$ перпендикулярно X_{12}. Новое положение вертикального следа $P_{П2}$, найдем, соединив точку A'_1 с неподвижной точкой N'_2.

3.6. Если плоскость задана не следами, а как-нибудь иначе, то отсутствующие следы могут быть заменены горизонталями и фронталями плоскости.

На рис. 20, справа, плоскость задана треугольником *ABC*, и требуется преобразовать ее в горизонтально проецирующую, т. е. поставить в положение, перпендикулярное к плоскости $П_1$.

Проведем фронталь *CN* и повернем ее фронтальную проекцию C_2N_2 на угол α, т. е. до положения $C_2N'_2$ перпендикулярно оси X_{12}. Это и является признаком того, что вся плоскость, в которой лежит фронталь, стала теперь перпендикулярной плоскости $П_1$. Поворот выполнен вокруг оси, проходящей через вершину С и перпендикулярной к плоскости $П_2$. Остается повернуть на тот же угол α две другие вершины треугольника. Это можно сделать так, как показано на рис. 20, справа, т. е. так, чтобы прямая C_2N_2 стала перпендикулярной оси X_{12}. Повернув вертикальную проекцию треугольника в требуемое положение, надо найти затем новую горизонтальную его проекцию. Она должна получиться в виде прямой линии $A'_1B'_1$.

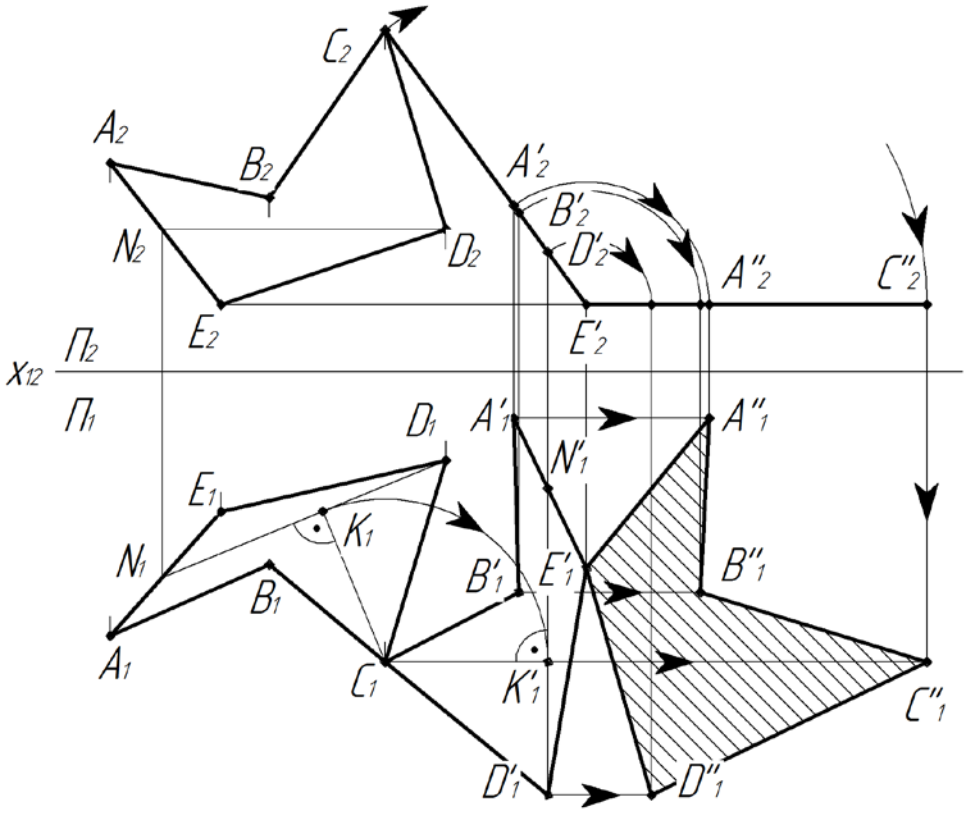


Рис. 21

3.7. Если бы далее, требовалось построить истинную фигуру треугольника, надо было бы выполнить второй поворот вокруг второй оси, перпендикулярной уже плоскости $П_1$, чтобы поставить фигуру в положение, парал-

лельное плоскости $П_2$. Тогда на этой плоскости и получилось бы неискаженное изображение фигуры.

Пример такого двойного последовательного поворота дан на рис. 21, где построена истинная фигура пятиугольника *ABCDE*. Первым поворотом плоскость пятиугольника поставлена в положение вертикально проецирующей, и его вертикальная проекция превращена в прямую линию.

Для этого проведена горизонталь *DN* и проекция ее D_1N_1 повернута вокруг точки *C* на угол α до положения, перпендикулярного к оси X_{12}. На тот же угол повернуты все вершины фигуры, т. е. вся горизонтальная проекция пятиугольника. Второе вращение выполнено вокруг оси, перпендикулярной плоскости $П_2$ и проходящей через вершину *E*. Фронтальная проекция пятиугольника переведена в положение, параллельное оси X_{12}. Соответствующая ей новая горизонтальная проекция пятиугольника $A_1''B_1''C_1''E_1'$ изображает его в натуральную величину.

4. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ОСЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ (ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЕЙ И ФРОНТАЛЕЙ)

4.1. Рассмотрим рис. 22. Он изображает ось OO_1 параллельную плоскости $П_1$, но не перпендикулярную плоскости $П_2$. Вращение точки *A*, связанной с осью радиусом *R*, происходит в пространстве по окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения и плоскости $П_1$. Эта окружность проецируется на плоскость $П_1$ в виде прямой линии $A_1'A_1$, образующей прямой угол с проекцией оси вращения. Следовательно, при повороте точки *A* вокруг оси OO_1, ее горизонтальная проекция будет передвигаться по прямой $A_1'A_1$ перпендикулярно OO_1, но эта прямая теперь уже не параллельна оси X_{12}, как это было раньше (п.п. 3.1, 3.2).

Так как окружность, которую описывает в пространстве точка *A*, не параллельна плоскости $П_2$, то она будет проецироваться на эту плоскость в искаженном виде (в виде эллипса). Следовательно, вертикальная проекция точки *A* будет перемещаться не по окружности, а по эллиптической кривой, точное построение которой представляет известные трудности. Однако при решении некоторых частных вопросов можно обойтись одной горизонтальной проекцией точки (или фигуры), не прибегая к построению ее вертикальной проекции. Допустим, что вращение точки *A* остановлено в тот момент, когда

она пришла в положение A' при котором радиус R параллелен плоскости $П_1$. В этом положении радиус проецируется на плоскость $П_1$ в натуральную величину. Значит, для нахождения горизонтальной проекции A'_1, достаточно отложить на прямой A'_1A_1, отрезок $A'_1N_1 = R$.

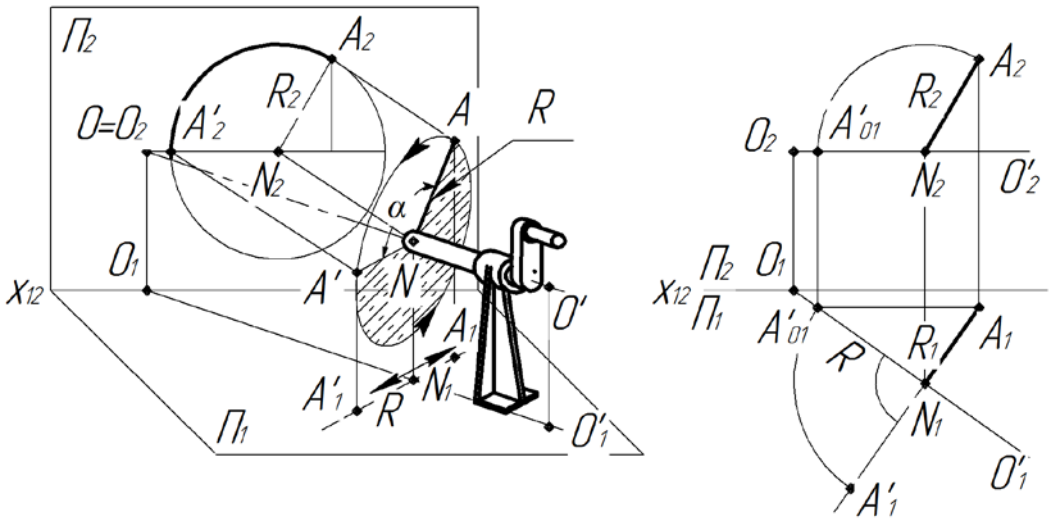


Рис. 22

На рис. 22 справа показано, как выполняются эти построения на эпюре. Здесь даны проекции A'_1 и A_1 произвольной точки и проекции оси, параллельной плоскости $П_1 - O'_1O_1$ и $O_2O'_2$. Требуется повернуть точку A вокруг оси OO' так, чтобы она совпала с горизонтальной плоскостью, проходящей через ось. Опустим из точки A перпендикуляр AN на ось и повернем его вместе с точкой A до положения, параллельного плоскости $П_1$. Тогда он проецируется на плоскость $П_1$ в натуральную величину. Ранее установлено, что проекция A_1 будет передвигаться по прямой A'_1A_1 перпендикулярно OO_1. Для нахождения на этой прямой точки A'_1, надо отложить отрезок A'_1N_1, равный радиусу вращения. Но на эпюре нет истинного размера радиуса R, есть только его проекции A_1N_1 и A_2N_2. Следовательно, необходимо предварительно построить натуральный вид R по его проекциям. Это может быть сделано любым из известных способов.

Воспользуемся для этой цели способом вращения. Повернем вертикальную проекцию A_2N_2 до положения, параллельного оси X_{12}. При этом горизонтальная проекция A_2 будет перемещаться по прямой, параллельной оси X_{12}, и придет в точку A_{01}. Таким образом $A_{01}N_1 = R$. Отложив этот отрезок на прямой A'_1A_1, найдем искомую проекцию A'_1.

Аналогично выполняется вращение точки вокруг фронтали.

4.2. Изложенный метод имеет ограниченное применение.

Им выгодно пользоваться для определения истинных углов между прямыми и истинной формы плоских фигур.

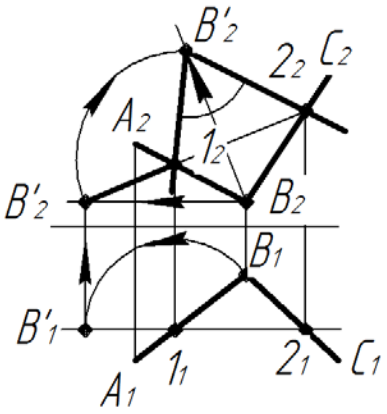


Рис. 23

На рис. 23 показано применение этого способа для нахождения истинного угла *ABC* между двумя пересекающимися прямыми. За ось вращения принята фронталь, проведенная в плоскости угла. Чтобы данный угол проецировался без искажения на одну из плоскостей проекций, надо повернуть его в положение, параллельное этой плоскости. При вращении вокруг проведенной оси точки 1_1,1_2 и 2_1,2_2, лежащие на самой оси, останутся неподвижными, точка же B_2 будет передвигаться по прямой B_2B_2' перпендикулярно 1_2–2_2. Тогда плоскость угла станет параллельной плоскости $П_2$, угол *B*, а также отрезки его сторон 1*B* и 2*B* спроецируются на эту плоскость в натуральном виде. Определим натуральный размер одного из этих отрезков, например, 1*B*. Это можно сделать любым известным способом. На рис. 23 использован способ вращения. Далее, засекая прямую B_2B_2' из точки 1_2 дугой радиуса B_2'–1_2, найдем точку B_2', в которую переместится фронтальная проекция вершины угла *B*. Остается соединить полученную точку с неподвижными точками 1_2 и 2_2. Угол 1_2–B_2'–2_2 дает искомый угол *ABC*.

4.3. Несмотря на разнообразие способов построения вспомогательных изображений, облегчающих решение задач графическими средствами, в основе всех этих способов лежат два главных принципа:

– изменение направления проецирования, т. е. использование в качестве вспомогательного средства косоугольного проектирования;

– изменение относительного положения проецируемого предмета и плоскостей проекций.

Первый из этих методов используют чаще всего художники и архитекторы для построения теней предметов.

Второй способ, изменение относительного положения проектируемого предмета и плоскостей проекций, может быть осуществлен в свою очередь двумя путями:

– поворотом самого проецируемого предмета в более удобное положение (метод вращения и его разновидности);

– перемещением плоскостей проекций (метод перемены плоскостей проекций).

Возможно также и сочетание различных методов.

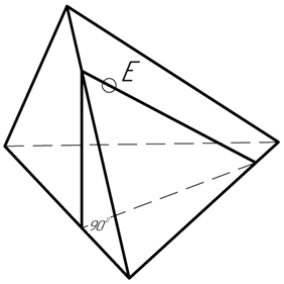
Совокупность рассмотренных графических приемов составляет далеко не весь рабочий инструментарий начертательной геометрии.

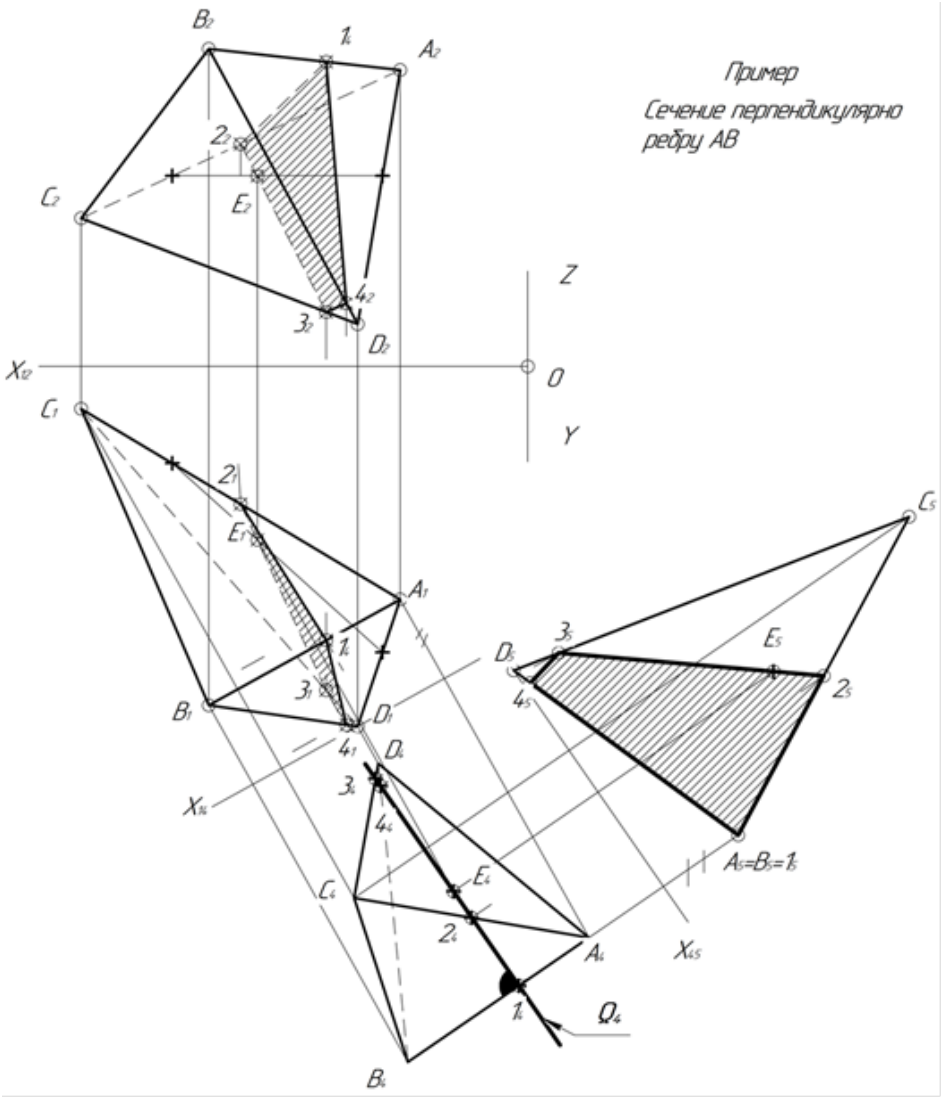
ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Плоскость Ω перпендикулярна ребру *AB*

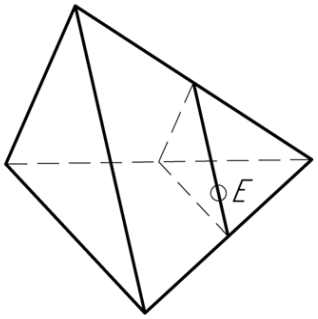
Построить сечение четырехгранной пирамиды *ABCD* плоскостью Ω при различных вариантах задания ее положения так, чтобы плоскость проходила через точку Е, принадлежащую заданной грани пирамиды.

Для решения этой задачи необходимо сделать замену плоскости $П_2$ на $П_4$ так, чтобы ребро *AB* стало параллельно $П_4$ ($A_1B_1 // П_4$). Тогда плоскость Ω будет проецирующей. Проведем $Ω_4$ через E_4 перпендикулярно A_4B_4. На пересечении $Ω_4$ с ребрами пирамиды дадут сечение, натуральный вид которого найдем в новой системе $П_4/П_5$ на новой плоскости $П_5 // Ω_4$.

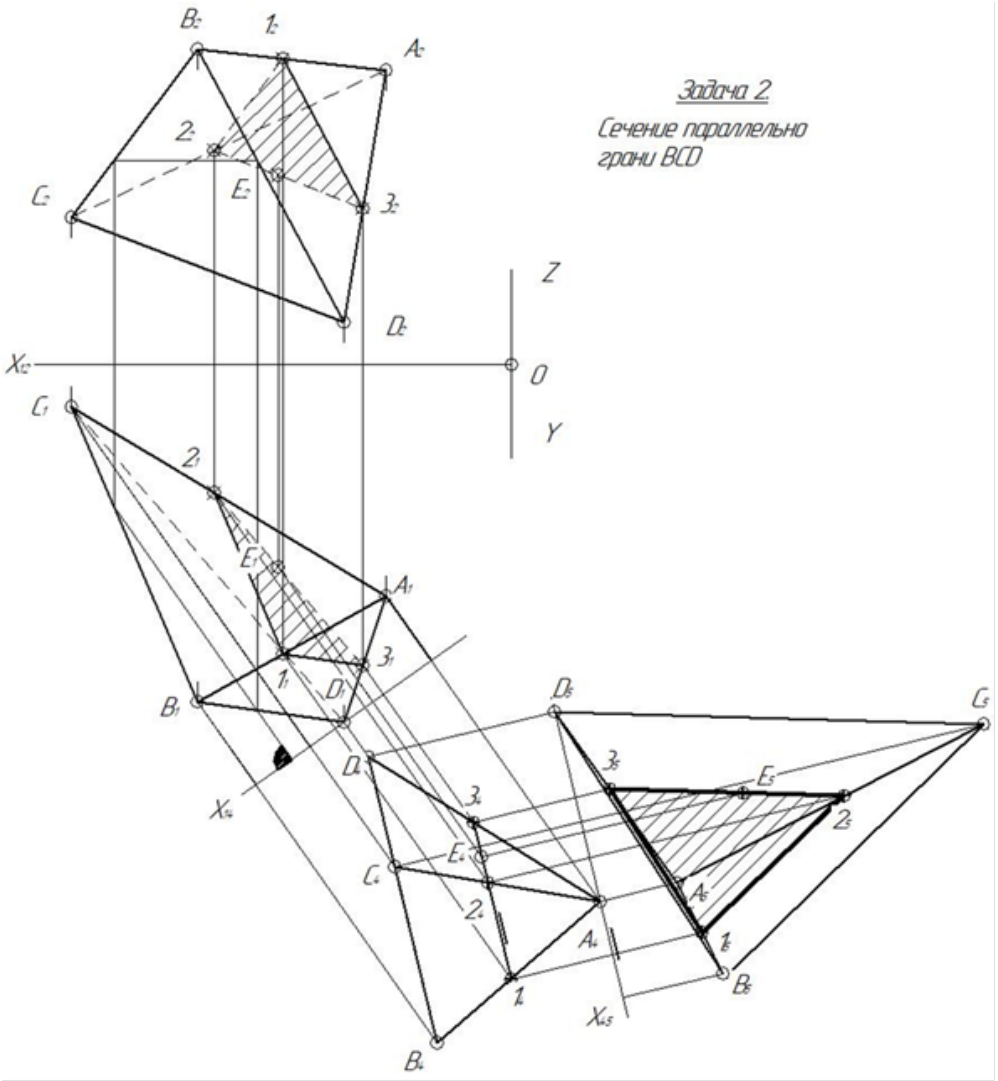




2. Секущая плоскость параллельна грани

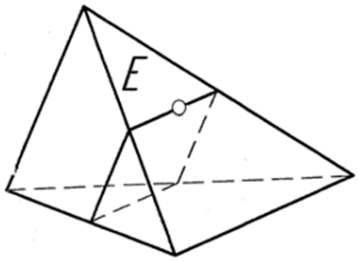


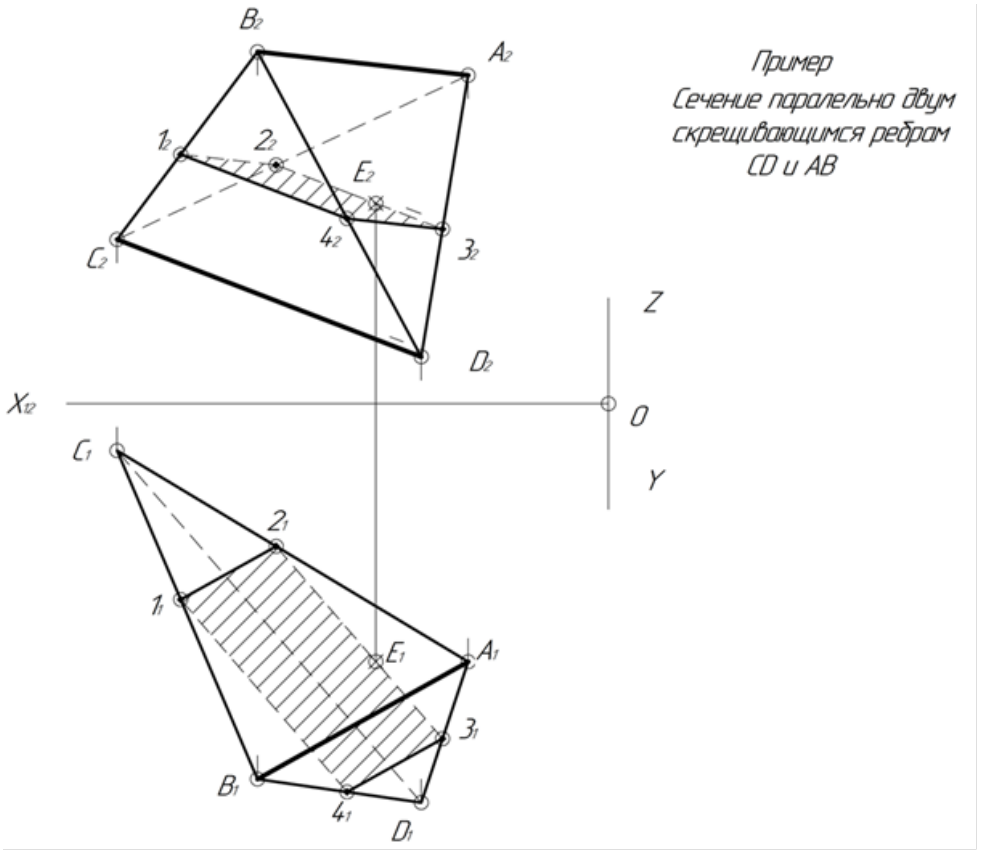
Так как сечение Ω параллельно грани, следовательно, стороны сечения должны быть параллельны соответствующим ребрам на фронтальной и горизонтальной проекции, как следует из инвариантных свойств параллельных прямых.



3. Секущая плоскость Ω параллельна двум скрещивающимся ребрам

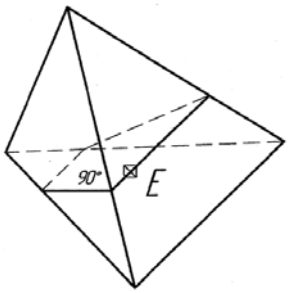
Чтобы построить сечение Ω, достаточно через точку Е провести прямую параллельную ребру, лежащему в грани, которой принадлежит точка Е, а затем из полученных точек провести прямые в прилегающих гранях параллельно второму ребру и соединить полученные точки. Это и будет искомое сечение.

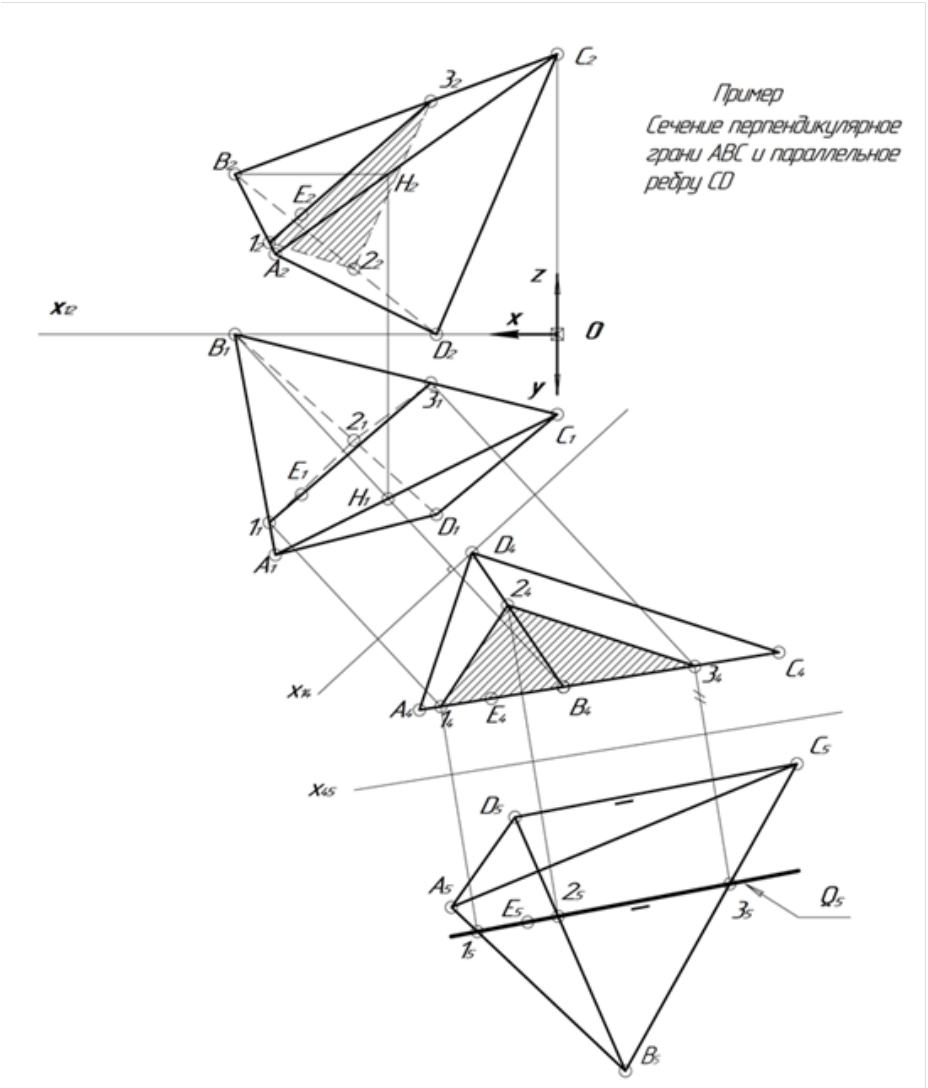




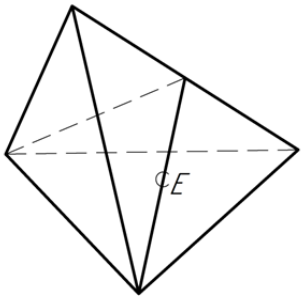
4. Секущая плоскость Ω перпендикулярна Σ и параллельна стороне в грани Σ

Чтобы решить задачу, нужно перевести грань в положение, параллельное новой плоскости проекций, т. е. необходимо сделать две замены плоскостей: сначала $П_2$ на $П_4$, где X_{14} перпендикулярна проекции горизонтали грани H_1B_1 (т.е. перпендикулярна грани ABC), затем $П_4$ на $П_5$, где $Ω_5$ параллельна проекции ребра C_5D_5 (т. е. параллельна ребру CD).

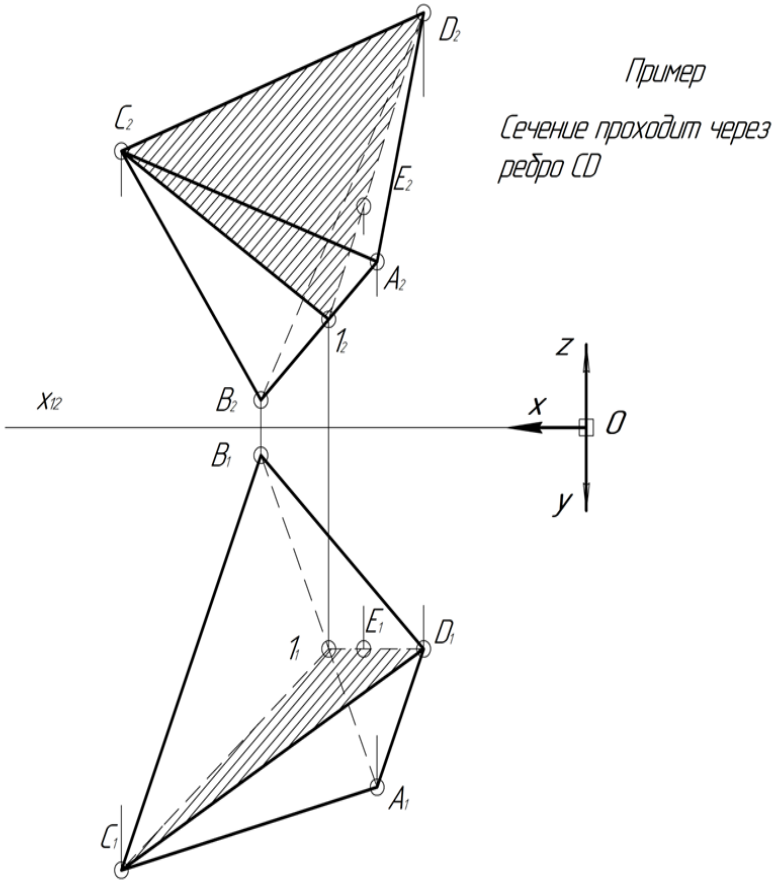




5. Секущая плоскость Ω проходит через ребро вне грани Σ

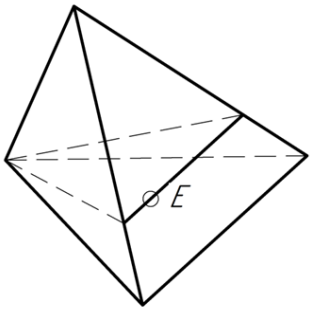


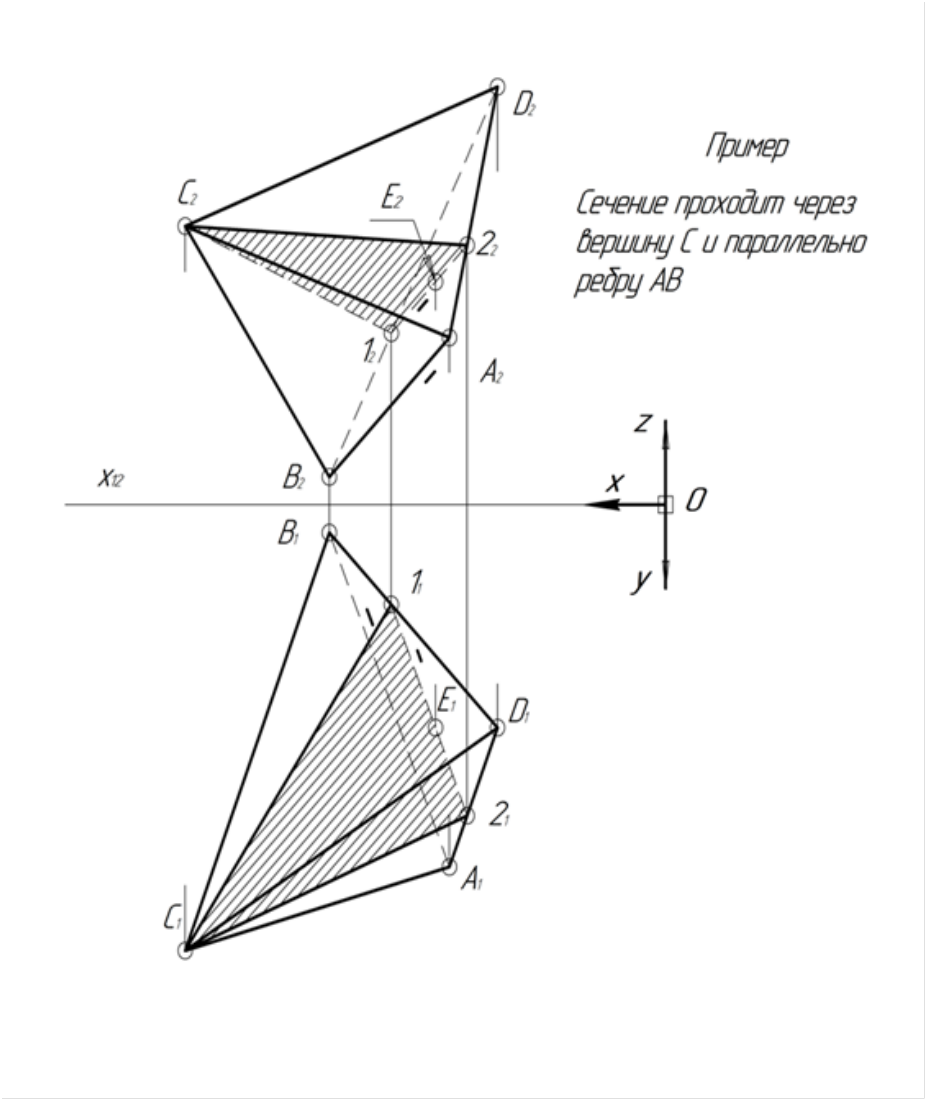
Чтобы построить сечение Ω, необходимо через точку *E* провести прямую, которая соединяется с заданным ребром.



6. Секущая плоскость Ω параллельна ребру через вершину вне Σ

Чтобы построить сечение Ω, необходимо через точку *E* провести прямую, параллельно ребру, а затем соединить с вершиной.





Содержание

1. Методы построения вспомогательных проекций 3
1.1. Общие понятия 3
1.2. Метод перемены плоскостей проекций 4
2. Параллельное смещение плоскостей проекций 14
3. Метод вращения 16
4. Вращение вокруг осей, параллельных плоскостям проекций (вокруг горизонталей и фронталей) 22
Приложения 26

Лысков Алексей Иванович
Максимова Ольга Вениаминовна
Бурлуцкая Наталья Борисовна

Сечение пирамиды

Учебно-методическое пособие

Редактор О. Р. Крумина

Подписано в печать 12.05.22. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 2,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 92 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197022, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5Ф