С.А. ФРОЛОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издание второе, переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов машиностроительных специальностей вузов



МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1983

ББК 22.151.3я73
Ф91
УДК 515(075)

РЕЦЕНЗЕНТ:
кафедра начертательной геометрии и черчения
Московского автомеханического института

Фролов С. А.
Ф91 НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Учебник для втузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1983. — 240 с., ил.
В пер.: 1 р. 20 к.

Учебник полностью соответствует новой программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по начертательной геометрии для втузов (кроме архитектурных и строительных специальностей). Во втором издании учебника (1-е изд. 1978 г.) подчеркнута роль инвариантных свойств ортогонального проецирования в создании теоретической базы курса. Особое внимание уделено способам образования поверхностей и их заданию на эпюре Монжа. Материал по использованию ЭЦВМ для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме, оставлен в прежнем объеме. Иллюстрации выполнены в многокрасочном исполнении, что способствует лучшему восприятию и усвоению материала студентами.

Ф $\frac{1702040000\text{-}030}{038(01)\text{-}83}$ 30-83

ББК 22.151.3я73
515

ИБ 3961

Сергей Аркадьевич Фролов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор И. Г. Калашникова
Художественный редактор А. С. Вершинкин
Макет художника Е. И. Подмарьковой
Технические редакторы Л. П. Гордеева, Н. Н. Чистякова
Корректор Н. В. Давыдова

Переплет художника А. Г. Антоновой

Графики-иллюстраторы: В. Л. Богатырев, В. П. Новиков, В. Г. Целищев

Операторы Л. А. Яковлева, Л. В. Данилова

Подписано в печать 14.09.83. Формат 70×108/1/16
Бумага типографская № 1 Гарнитура Сенчури Печать офсетная Усл. печ. л. 21,0
Усл. кр.-отт. 83,48. Уч.-изд. л. 21,47. Тираж 140 000 экз. Заказ 1957. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение", 107076 Москва Б-76, Стромынский пер., 4

© Издательство "Машиностроение", 1978 г.
© Издательство "Машиностроение", 1983 г., с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 5

ПРЕДИСЛОВИЕ 6

ВВЕДЕНИЕ 7

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА 8

Глава I. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

§ 1. Некоторые свойства евклидова пространства 13
§ 2. Реконструкция евклидова пространства 14
§ 3. Центральное проецирование 17
§ 4. Параллельное проецирование 18
§ 5. Ортогональное проецирование 19
§ 6. Инвариантные свойства ортогонального проецирования 21
§ 7. Эпюр Монжа 26
§ 8. Неопределяемые понятия геометрии; ортогональные проекции точки, прямой, плоскости 29
Вопросы для самопроверки 45

Глава II. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 46

I. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ 48

§ 9. Способ параллельного перемещения 48
§ 10. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции 52
§ 11. Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекции (вращение вокруг линии уровня) 55
§ 12. Способ вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекции (совмещение) 57

II. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ 59

§ 13. Замена одной плоскости проекции 59
§ 14. Замена двух плоскостей проекций 61
§ 15. Сочетание способа плоскопараллельного перемещения со способом замены плоскостей проекции 62
§ 16. Другие способы преобразования ортогональных проекций 65
Вопросы для самопроверки 68

Глава III. ЛИНИЯ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 69

I. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

§ 17. Касательные и нормали к пространственной кривой 70

II. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

§ 18. Приближенные способы построения касательной и нормали к плоской кривой 73
§ 19. Кривизна плоской кривой 74
§ 20. Приближенный способ построения центра кривизны кривой в заданной точке 75
§ 21. Эволюта и эвольвента 75
§ 22. Классификация точек плоской кривой 76
§ 23. Ортогональные проекции линии 78
§ 24. Определение длины пространственной кривой по ее ортогональным проекциям 81
Вопросы для самопроверки 81

Глава IV. ПОВЕРХНОСТЬ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 82

§ 25. Образование поверхности и ее задание на эпюре Монжа 83
§ 26. Определитель поверхности 84
§ 27. Ортогональные проекции поверхности 86
§ 28. Классификация поверхностей 88

КЛАСС I

§ 29. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида (группа $А_I$) 91
§ 30. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида (группа $Б_I$) 93

КЛАСС II

§ 31. Линейчатые поверхности 94
§ 32. Линейчатые поверхности с тремя направляющими (группа $А_{II}$) . . 96
§ 33. Линейчатые поверхности с двумя направляющими (группа $Б_{II}$) . . 101
§ 34. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана) 102
§ 35. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы (группа $В_{II}$) 106
§ 36. Поверхности параллельного переноса (подкласс 1) 109
§ 37. Поверхности вращения (подкласс 2) 111
§ 38. Винтовые поверхности (подкласс 3) 114
Вопросы для самопроверки 117

Глава V. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 118

§ 39. Принадлежность точки линии ($A \in l$) 119
§ 40. Принадлежность точки поверхности ($A \in \alpha$) 120
§ 41. Принадлежность линии поверхности ($l \subset \alpha$) 124
§ 42. Пересечение линии с линией ($l \cap m$) 125
§ 43. Пересечение поверхности с поверхностью ($\alpha \cap \beta$) 126
§ 44. Пересечение плоскостей 128
§ 45. Пересечение поверхности плоскостью (построение сечения) 131
§ 46. Плоскость, касательная к поверхности 140
§ 47. Построение линии пересечения поверхностей (общий случай) . . . 147
§ 48. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей 148
§ 49. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных цилиндрических поверхностей 154
§ 50. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных конических поверхностей 156
§ 51. Построение линии пересечения поверхностей с помощью семейства вспомогательных сферических поверхностей 158
§ 52. Построение линии пересечения поверхностей второго порядка (частные случаи) 163
§ 53. Определение точек пересечения линии с поверхностью 165
Вопросы для самопроверки 172

Глава VI. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 173

§ 54. Построение взаимно перпендикулярных прямых, прямой и плоскости, плоскостей 174
§ 55. Определение расстояния между двумя точками 180
§ 56. Определение расстояния между точкой и прямой, между параллельными прямыми 181
§ 57. Определение расстояния между точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, между плоскостями и скрещивающимися прямыми 183
§ 58. О проекциях плоских углов 187
§ 59. Определение величины плоского угла по его ортогональным проекциям 189

§ 60. Определение угла между прямой и плоскостью 190
§ 61. Определение угла между плоскостями 192
§ 62. Определение угла между скрещивающимися прямыми 194
Вопросы для самопроверки 195

Глава VII. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 196

§ 63. Основные свойства развертки поверхностей 197
§ 64. Развертка поверхности многогранников 198
§ 65. Построение приближенных разверток развертывающихся поверхностей 201
§ 66. Условная развертка поверхностей 206
Вопросы для самопроверки 209

Глава VIII. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 210

§ 67. Стандартные аксонометрические проекции 212
§ 68. Примеры построения аксонометрических проекций геометрических фигур 215
§ 69. Решение позиционных задач на аксонометрических проекциях . . . 219
§ 70. Решение метрических задач на аксонометрических проекциях . . . 221
Вопросы для самопроверки 222

Глава IX. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 223

§ 71. О возможности использования ЭЦВМ для графического решения задач 223
§ 72. Основные вопросы проблемы автоматизации процесса графического решения задач 226
§ 73. Машинное чтение чертежа 227
§ 74. Метод машинного решения задач 228
§ 75. Составление машинных алгоритмов решения задач 231
§ 76. Определение рационального машинного алгоритма 239
Вопросы для самопроверки 240

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1973. 416 с.

2. Добряков А. И. Курс начертательной геометрии. М. — Л.: Госстройиздат, 1952. 484 с.

3. Климухин А. Г. Начертательная геометрия. М.: Стройиздат, 1973. 368 с.

4. Котов И. И. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1970. 382 с.

5. Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1977. 231 с.

6. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1969. 496 с.

7. Начертательная геометрия/ Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Пряишникова и др. М.: Высшая школа, 1963. 420 с.

8. Начертательная геометрия/ С. М. Колотов, М. Ф. Евстифеев, В. Е. Михайленко и др. Киев: Вища школа, 1975. 262 с.

9. Фролов С. А. Автоматизация процесса графического решения задач. Минск: Вышейшая школа, 1980. 255 с.

10. Фролов С. А. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1980. 141 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник предназначен для студентов технических вузов (кроме архитектурных и строительных специальностей).

Содержание учебника полностью соответствует новой (1979 г.) программе по начертательной геометрии.

Второе издание подверглось значительной переработке. При подготовке рукописи к изданию были учтены отзывы и предложения, полученные автором от читателей и относящиеся как к содержанию, так и объему некоторых разделов учебника, в частности: внесены изменения в систему обозначений проекций геометрических фигур; строже изложен вопрос, касающийся инвариантных свойств ортогонального проецирования, и более четко подчеркнута их роль в создании теоретической базы курса начертательной геометрии; подробнее изложен материал, связанный с определителем поверхностей, и уточнена построенная на его базе систематизация наиболее распространенных видов поверхностей; внесены уточнения в классификацию позиционных и метрических задач; включен новый материал, связанный с построением плоскости, касательной к поверхности; изложение способов преобразования ортогональных проекций дано в первой главе непосредственно за методом Монжа. Более раннее знакомство со способами преобразования ортогональных проекций позволяет использовать эти способы на всех этапах изложения курса.

Во втором издании полностью сохранен дидактический принцип изложения материала — от общего к частному, а не наоборот, как это имеет место в большинстве курсов начертательной геометрии.

Для облегчения чтения чертежей они выполнены линиями разных цветов. Кроме того, чтобы легче представить "игру" геометрических образов в пространстве, многие чертежи, построенные по правилам ортогонального проецирования, иллюстрируются наглядными изображениями.

Автор приносит искреннюю благодарность всем читателям, приславшим пожелания, направленные на улучшение содержания учебника.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные фигуры, представляющие собой совокупность точек, линий, поверхностей, изучаются по их проекционным изображениям на плоскости (или какой-либо другой поверхности).

Основными задачами начертательной геометрии являются: а) создание метода изображения геометрических фигур на плоскости (поверхности), б) разработка способов решения позиционных и метрических задач, связанных с этими фигурами, при помощи их изображений на плоскости (поверхности).

Начертательная геометрия по своему содержанию занимает особое положение среди других наук: она является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Начертательная геометрия является теоретической базой для составления чертежа — гениального изобретения человеческой мысли.

Чертеж — это своеобразный язык, с помощью которого, используя всего лишь точки, линии и ограниченное число геометрических знаков, букв и цифр, человек имеет возможность изобразить на поверхности, в частности на плоскости, геометрические фигуры или их сочетания (машины, приборы, инженерные сооружения и т. д.). Причем этот графический язык является интернациональным, он понятен любому технически грамотному человеку независимо от того, на каком языке он говорит.

Решение задач способами начертательной геометрии осуществляется графическим путем. Простейшей геометрической операцией, которую приходится выполнять в процессе решения, является определение точки пересечения двух линий. Вследствие того, что все геометрические построения осуществляются с помощью только линейки и циркуля, линиями, точку пересечения которых следует определять, являются прямые и окружности. Иными словами, путем проведения отрезков прямых и дуг окружностей (в редких случаях участков лекальных кривых) в определенной последовательности, устанавливаемой теоремами и правилами начертательной геометрии, можно решать сложные задачи из различных областей науки и техники.

Возможность расчленения процесса решения задач на выполнение элементарных, однотипных операций позволяет получить итерационные способы решения задач, которые легко и естественно могут быть автоматизированы с помощью вычислительной техники.

Использование начертательной геометрии является рациональным при конструировании сложных поверхностей технических форм с наперед заданными параметрами, применяемых в авиационной и автомобильной промышленности, при создании корпусов судов и судовых движителей и во многих других областях техники.

Достижения многомерной начертательной геометрии находят применение при исследовании диаграмм состояния многокомпонентных систем и сплавов в тех случаях, когда другие способы исследования оказываются чрезвычайно сложными и не обеспечивают требуемой точности.

Известна роль начертательной геометрии в архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве. Проекционные способы, разработанные в начертательной геометрии, дают возможность получать наглядные изображения проектируемых объектов и целых комплексов.

Благодаря начертательной геометрии появилась возможность изображать на плоскости рельеф земной поверхности и решать простыми графическими способами задачи, связанные с проектированием дорог, каналов, тоннелей, а также

определять объемы выполняемых при этом земляных работ.

Естественные науки достигают еще большего расцвета в тех случаях, когда изучаемые свойства сопровождаются доступными для человеческого восприятия наглядными геометрическими моделями.

Методы начертательной геометрии, позволяющие решать математические задачи в их графической интерпретации, находят широкое применение в физике, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Как и другие отрасли математики, начертательная геометрия развивает логическое мышление.

Приведенный далеко не полный перечень вопросов, которые составляют предмет исследования в начертательной геометрии, не оставляет сомнения, что начертательная геометрия входит в число фундаментальных дисциплин, составляющих основу инженерного образования.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

Для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записей геометрических предложений, алгоритмов решения задач и доказательства теорем в курсе используется *геометрический язык*, составленный из обозначений и символов, принятых в курсе математики (в частности, в новом курсе геометрии в средней школе).

Все многообразие обозначений и символов, а также связи между ними могут быть подразделены на две группы:

группа I — обозначения геометрических фигур и отношений между ними;

группа II — обозначения логических операций, составляющие синтаксическую основу геометрического языка.

Ниже приводится полный список математических символов, используемых в данном курсе. Особое внимание уделяется символам, которые применяются для обозначения проекций геометрических фигур.

Группа I

СИМВОЛЫ, ОБОЗНАЧАЮЩИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

А. Обозначение геометрических фигур

1. Геометрическая фигура обозначается — Ф.

2. Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:

$A, B, C, D, \ldots, L, M, N, \ldots$
1, 2, 3, 4, ..., 12, 13, 14, ...

3. Линии, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

$a, b, c, d, \ldots, l, m, n, \ldots$

Линии уровня обозначаются: h — горизонталь; f — фронталь.

Для прямых используются также следующие обозначения:

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[AB)$ — луч с началом в точке A;

$[AB]$ — отрезок прямой, ограниченный точками A и B.

4. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \zeta, \eta, \nu, \ldots$

Чтобы подчеркнуть способ задания поверхности, следует указывать геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\,(a \parallel b)$ — плоскость α определяется параллельными прямыми a и b;

$\beta\,(d_1\, d_2\, g\alpha)$ — поверхность β определяется направляющими d_1 и d_2, образующей g и плоскостью параллелизма α.

5. Углы обозначаются:

$\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B, а также $\angle\alpha^\circ, \angle\beta^\circ, \ldots, \angle\varphi^\circ, \ldots$

6. Угловая величина (градусная мера) обозначается знаком $\overset{\frown}{\ }$, который ставится над углом:

$\overset{\frown}{ABC}$ — величина угла ABC;

$\overset{\frown}{\varphi}^\circ$ — величина угла φ.

Прямой угол отмечается квадратом с точкой внутри $\boxdot$.

7. Расстояния между геометрическими фигурами обозначаются двумя вертикальными отрезками — $|\ |$.

Например:

$|AB|$ — расстояние между точками A и B (длина отрезка AB);

$|Aa|$ — расстояние от точки A до линии a;

$|A\alpha|$ — расстояние от точки A до поверхности α;

$|ab|$ — расстояние между линиями a и b;

$|\alpha\beta|$ — расстояние между поверхностями α и β.

8. Для плоскостей проекций приняты обозначения: π_1 и π_2,

где π_1 — горизонтальная плоскость проекций;

π_2 — фронтальная плоскость проекций.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей последние обозначают π_3, π_4 и т. д.

9. Оси проекций обозначаются: x, y, z, где x — ось абсцисс; y — ось ординат; z — ось аппликат.

Постоянную прямую эпюра Монжа обозначают k.

10. Проекции точек, линий, поверхностей, любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением верхнего индекса, соответствующего плоскости проекции, на которой они получены:

$A', B', C', D', \ldots, L', M', N', \ldots$ — горизонтальные проекции точек;

$A'', B'', C'', D'', \ldots, L'', M'', N'', \ldots$ — фронтальные проекции точек;

$a', b', c', d', \ldots, l', m', n', \ldots$ — горизонтальные проекции линий;

$a'', b'', c'', d'', \ldots, l'', m'', n'', \ldots$ — фронтальные проекции линий;

$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots, \zeta', \eta', \nu', \ldots$ — горизонтальные проекции поверхностей;

$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \ldots, \zeta'', \eta'', \nu'', \ldots$ — фронтальные проекции поверхностей.

11. Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что и горизонталь или фронталь, с добавлением подстрочного индекса $_{0\alpha}$, подчеркивающего, что эти линии лежат в плоскости проекции и принадлежат плоскости (поверхности) α.

Так: $h_{0\alpha}$ — горизонтальный след плоскости (поверхности) α;

$f_{0\alpha}$ — фронтальный след плоскости (поверхности) α.

12. Следы прямых (линий) обозначаются заглавными буквами, с которых начинаются слова, определяющие название (в латинской транскрипции) плоскости проекции, которую пересекает линия, с подстрочным индексом, указывающим принадлежность к линии.

Например: H_a — горизонтальный след прямой (линии) a;

F_a — фронтальный след прямой (линии) a.

13. Последовательность точек, линий (любой фигуры) отмечается подстрочными индексами $_{1, 2, 3, \ldots, n}$:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n;$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n;$$
$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n \text{ и т. д.}$$

Вспомогательная проекция точки, полученная в результате преобразования для получения действительной величины геометрической фигуры, обозначается той же буквой с подстрочным индексом $_0$:

$$A_0, B_0, C_0, D_0, \ldots$$

Аксонометрические проекции

14. Аксонометрические проекции точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами, что и натура с добавлением верхнего индекса ^{0}:

$$A^0, B^0, C^0, D^0, \ldots$$
$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \ldots$$
$$a^0, b^0, c^0, d^0, \ldots$$
$$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0, \ldots$$

15. Вторичные проекции обозначаются путем добавления верхнего индекса[1]:

$$A^{10}, B^{10}, C^{10}, D^{10}, \ldots$$
$$1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, 4^{10}, \ldots$$
$$a^{10}, b^{10}, c^{10}, d^{10}, \ldots$$
$$\alpha^{10}, \beta^{10}, \gamma^{10}, \delta^{10}, \ldots$$

Для облегчения чтения чертежей в учебнике при оформлении иллюстративного материала использованы несколько цветов, каждый из которых имеет определенное смысловое значение: линиями (точками) черного цвета обозначены исходные данные; зеленый цвет использован для линий вспомогательных графических построений; красными линиями (точками) показаны результаты построений или те геометрические элементы, на которые следует обратить особое внимание.

Б. Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
1	$\equiv$	Совпадают	$(AB) \equiv (CD)$ — прямая, проходящая через точки A и B, совпадает с прямой, проходящей через точки C и D
2	$\cong$	Конгруентны	$\angle ABC \cong \angle MNK$ — угол ABC конгруентен углу MNK
3	$\sim$	Подобны	$\Delta ABC \sim \Delta MNK$ — треугольники ABC и MNK подобны
4	$\parallel$	Параллельны	$\alpha \parallel \beta$ — плоскость α параллельна плоскости β
5	$\perp$	Перпендикулярны	$a \perp b$ — прямые a и b перпендикулярны
6	$\overset{\cdot}{-}$	Скрещиваются	$c \overset{\cdot}{-} d$ — прямые c и d скрещиваются
7	$\curlywedge$	Касательные	$t \curlywedge l$ — прямая t является касательной к линии l. $\beta \curlywedge \alpha$ — плоскость β касательная к поверхности α
8	$\rightarrow$	Отображаются	$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ — фигура Φ_1 отображается на фигуру Φ_2

Продолжение табл.

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
9	S	Центр проецирования. Если центр проецирования несобственная точка, то его положение обозначается стрелкой, указывающей направление проецирования	—
10	s	Направление проецирования	—
11	P	Параллельное проецирование	P_s^{α} — параллельное проецирование на плоскость α в направлении s

В. Обозначения теоретико-множественные

№ по пор	Обозначение	Содержание	Пример символической записи	Пример символической записи в геометрии
1	M, N	Множества	—	—
2	$A, B, C, \ldots$	Элементы множества	—	—
3	$\{\ldots\}$	Состоит из ...	$\Phi\{A, B, C, \ldots\}$	$\Phi\{A, B, C, \ldots\}$ — фигура Φ состоит из точек A, B, C, ...
4	$\varnothing$	Пустое множество	$L = \varnothing$ — множество L пустое (не содержит элементов)	—
5	$\in$	Принадлежит, является элементом	$2 \in N$ (где N — множество натуральных чисел) — число 2 принадлежит множеству N	$A \in a$ — точка A принадлежит прямой a (точка A лежит на прямой a)
6	$\subset$	Включает, содержит	$N \subset M$ — множество N является частью (подмножеством) множества M всех рациональных чисел	$a \subset \alpha$ — прямая a принадлежит плоскости α (понимается в смысле: множество точек прямой a является подмножеством точек плоскости α)
7	$\cup$	Объединение	$C = A \cup B$ — множество C есть объединение множеств A и B; $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$	$ABCD = [AB] \cup [BC] \cup [CD]$ — ломаная линия, $ABCD$ есть объединение отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$
8	$\cap$	Пересечение множеств	$M = K \cap L$ — множество M есть пересечение множеств K и L (содержит в себе элементы, принадлежащие как множеству K, так и множеству L). $M \cap N = \varnothing$ — пересечение множеств M и N есть пустое множество (множества M и N не имеют общих элементов)	$a = \alpha \cap \beta$ — прямая a есть пересечение плоскостей α и β $a \cap b = \varnothing$ — прямые a и b не пересекаются (не имеют общих точек)

Группа II

СИМВОЛЫ, ОБОЗНАЧАЮЩИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

№ по пор.	Обозначение	Содержание	Пример символической записи
1	$\wedge$	Конъюнкция предложений; соответствует союзу "и". Предложение $(p \wedge q)$ истинно тогда и только тогда, когда p и q оба истинны	$\alpha \cap \beta = \{ K : K \in \alpha \wedge K \in \beta \}$ Пересечение поверхностей α и β есть множество точек (линия), состоящее из всех тех и только тех точек K, которые принадлежат как поверхности α, так и поверхности β
2	$\vee$	Дизъюнкция предложений; соответствует союзу "или". Предложение $(p \vee q)$ истинно, когда истинно хотя бы одно из предложений p или q (т. е. или p, или q, или оба).	—
3	$\Rightarrow$	Импликация — логическое следствие. Предложение $p \Rightarrow q$ означает: "если p, то и q"	$(a \parallel c \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$ Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой
4	$\Leftrightarrow$	Эквивалентность. Предложение $(p \Leftrightarrow q)$ понимается в смысле: "если p, то и q; если q, то и p"	$A \in \alpha \Leftrightarrow A \in l \subset \alpha$. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит некоторой линии, принадлежащей этой плоскости. Справедливо также и обратное утверждение: если точка принадлежит некоторой линии, принадлежащей плоскости, то она принадлежит и самой плоскости
5	$\forall$	Квантор общности, читается: для всякого, для всех, для любого. Выражение $\forall(x) P(x)$ означает: "для всякого x имеет место свойство $P(x)$"	$\forall (\triangle ABC)(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ)$. Для всякого (для любого) треугольника сумма величин его углов при вершинах равна 180°
6	$\exists$	Квантор существования, читается: существует. Выражение $\exists (x) P(x)$ означает: "существует x, обладающее свойством $P(x)$"	$(\forall \alpha)(\exists a)[a \not\subset \alpha \wedge a \parallel \alpha]$. Для любой плоскости α существует прямая a, не принадлежащая плоскости α и параллельная плоскости α
7	$\exists 1$	Квантор единственности существования, читается: существует единственное (-я, -й)... Выражение $(\exists 1x)(Px)$ означает: "существует единственное (только одно) x, обладающее свойством Px"	$(\forall A, B)(A \neq B)(\exists 1a)(a \ni A, B)$ Для любых двух различных точек A и B существует единственная прямая a, проходящая через эти точки
8	$(\bar{Px})$	Отрицание высказывания (Px)	$a \overset{\bullet}{-} b \Rightarrow (\overline{\exists \alpha})(\alpha \supset a, b)$. Если прямые a и b скрещиваются, то не существует плоскости α, которая содержит их
9	$\backslash$	Отрицание знака	$[AB] \neq [CD]$ — отрезок $[AB]$ не равен отрезку $[CD]$. $a \not\parallel b$ — линия a не параллельна линии b

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

С позиции теории множеств любую геометрическую фигуру следует рассматривать как множество всех принадлежащих ей точек. Говоря иначе, всякая геометрическая фигура есть не пустое множество.

Отображение геометрической фигуры на плоскость (или какую-либо другую поверхность) можно получить путем проецирования ее точек на эту плоскость (поверхность).

Прежде чем говорить о сущности метода проецирования, целесообразно рассмотреть некоторые свойства евклидова пространства*.

Известно, что эти свойства могут быть выражены при помощи системы аксиом и предложений, которые устанавливают зависимости и отношения между элементами пространства. Точки, прямые и плоскости евклидова пространства находятся в определенном взаимоотношении, которое может быть обозначено словом *принадлежность* или *инцидентность*. Термин инцидентность заменяет такие понятия, как "лежать на", "проходить через". Вместо выражений "точка A лежит на плоскости α", "прямая a проходит через точку B" можно употреблять выражения "точка A инцидентна (принадлежит) плоскости α", "точка B инцидентна (принадлежит) прямой a". В символической форме эти выражения можно записать $A \in \alpha$; $B \in a$.

Отношения принадлежности между элементами евклидова пространства могут быть выражены следующими предложениями:

1. Если точка A принадлежит прямой a, а прямая a принадлежит плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α:

$$A \in a \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha.$$

2. Две различные точки A и B всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой a или каждой прямой a принадлежат, по крайней мере, две точки A и B:

$$(\forall A, B)(A \neq B) \Rightarrow (\exists\, 1a)(a \ni A, B).$$

3. Три различные точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же и только одной плоскости:

$$(\forall A, B, C)(A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists\, 1\alpha)(\alpha \ni A, B, C).$$

4. Если две точки A и B, принадлежащие прямой a, принадлежат плоскости α, то прямая a принадлежит плоскости α:

$$(\forall A, B)(A \neq B)(A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha).$$

---

* Основные свойства трехмерного пространства, в котором мы живем, были изучены до нашей эры греческими геометрами.

Наиболее существенный вклад имели труды по геометрии трехмерного пространства великого геометра древности Евклида, изложенные им в "Началах" (III в. до нашей эры). По имени автора "Начал" геометрическому пространству, изучаемому в элементарной геометрии, присвоено название евклидова пространства.

Кроме приведенных выше, могут быть сформулированы и другие предложения принадлежности для элементов евклидова пространства. К таким предложениям, в частности, относятся:

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

6. Две плоскости могут принадлежать одной и той же прямой, но этого может и не быть.

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

Последние три предложения по существу перефразируют аксиому о параллельности. В самом деле, предложение 5 утверждает, что в евклидовой плоскости две прямые либо пересекаются (принадлежат одной точке), либо не имеют общей точки — в этом случае они называются параллельными. Аналогично, предложение 6 говорит о том, что в евклидовом пространстве две плоскости либо пересекаются (принадлежат одной прямой), либо они параллельны, а предложение 7 — о том, что прямая, не принадлежащая плоскости, либо пересекает ее (прямая и плоскость принадлежат одной точке), либо они параллельны.

§ 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Принятие аксиомы Евклида о параллельности при последующем изложении приводит к определенным трудностям, вызванным тем, что, рассматривая метод проекций, составляющий основу для изображения на плоскости геометрических фигур, расположенных в пространстве, мы обнаруживаем "неоднородность" евклидова пространства и погруженных в него геометрических фигур.

Действительно, пусть даны две прямые a и b, определяющие плоскость α (рис. 1). Возьмем в плоскости α произвольную точку S ($S \notin a \wedge b$). Через точку S проведем произвольную прямую l, которая пересечет прямую a в точке A^a, а прямую b в точке A^b. Проведем через точку S прямую l_1, пересекающую прямую a в точке B^a, а прямую b в точке B^b. Аналогично, прямые l_2, l_3, проведенные через точку S, пересекают прямые a и b соответственно в точках C^a и C^b, D^a и D^b.

Выполненные построения показывают, что мы каждый раз получаем две точки — одну на прямой a и одну, однозначно соответствующую ей точку, на прямой b. Так будет продолжаться до тех пор, пока в пучке

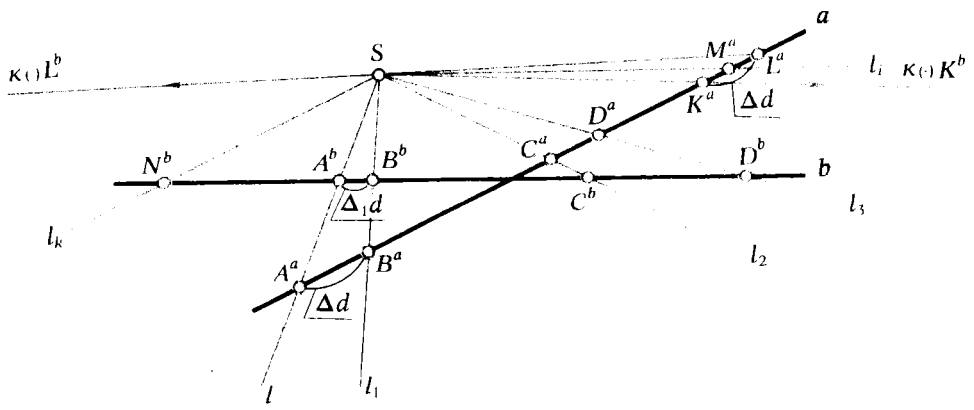


Рис. 1

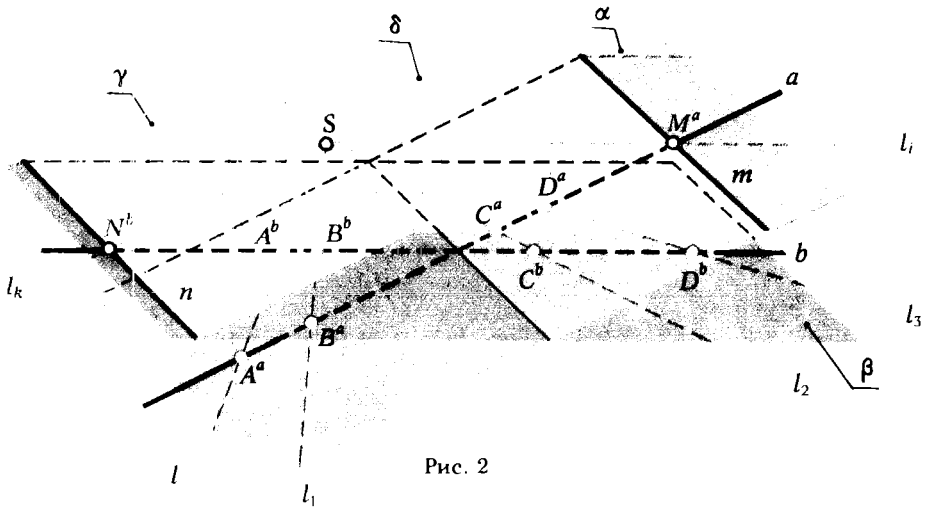


Рис. 2

прямых с центром в точке S не появится прямая l_i, параллельная прямой b. Эта прямая пересекает прямую a в точке M^a. Ввиду параллельности прямых l_i и b они не будут пересекаться, следовательно, не будет и точки M^b на прямой b, однозначно соответствующей точке M^a, т. е. выявленная ранее закономерность, состоящая в том, что каждой точке прямой a соответствует точка прямой b и наоборот, нарушается с появлением параллельной прямой. Кроме точки M^a появится еще одна точка N^b ($N^b \in b$), которая также будет отличаться от всех остальных точек прямой b (так как $l_k \parallel a$). Рис. 1 показывает, что мы оказываемся перед фактом, что прямые a и b (из-за аксиомы о параллельности) не являются однородными: каждая из них содержит точку (M^a и N^b соответственно), отличную от всех других точек, объединенных в прямые a и b.

Свойства евклидовой плоскости обнаруживают еще одно несоответствие, которое влечет за собой нарушение принципа взаимной непрерывности.

Действительно, если расстояние Δd между точками A^a и B^a прямой a — величина бесконечно малая (см. рис. 1), то и расстояние $\Delta_1 d$ между соответствующими этим точкам точками A^b и B^b прямой b будет также бесконечно малым.

Приведенные рассуждения будут справедливы и для другой пары соответственных точек (например, C^aD^a и C^bD^b).

Но если мы возьмем на прямой a две бесконечно близкие точки K^a и L^a, разделенные точкой M^a, то, как видно из чертежа, им будут соответствовать две бесконечно удаленные точки K^b и L^b прямой b.

Если мы обратимся к трехмерному евклидову пространству, то в нем появится множество точек, принадлежащих прямым m и n, по которым пересекаются плоскости α и β с плоскостями δ и γ, определяемыми пучками прямых, параллельных плоскостям α и β и принадлежащих точке S (рис. 2).

Становится очевидным, что евклидово пространство, свойства которого определяются, в частности, и аксиомой о параллельности, не может быть использовано для разработки метода центрального проецирования. Более того, мы оказываемся перед альтернативой: или принять на веру существование аксиомы о параллельности и, как следствие, признать неоднородность окружающего нас пространства, или считать, что пространство однородно, подвергнув сомнению существование аксиомы о параллельности.

Для того чтобы освободиться от указанных недостатков, необходимо трехмерное евклидово пространство подвергнуть реконструкции.

Из рис. 1 видно, что для того чтобы точка M^a не отличалась от остальных точек (A^a, B^a, C^a, D^a) прямой a, достаточно потребовать, чтобы параллельные прямые l_i и b пересекались; при этом точку их пересечения M^b будем считать бесконечно удаленной — несобственной точкой (в отличие от точек евклидова пространства, которые считаются собственными).

Таким образом, дополнение прямой несобственной точкой, в которой прямая пересекается с параллельной прямой, позволяет устранить недостаток, являющийся следствием аксиомы о параллельности.

Теперь мы можем утверждать, что любая точка прямой a будет иметь соответствующую ей точку на прямой b. Эта точка может быть как собственной, так и несобственной.

Наличие на прямой несобственной точки позволяет установить не только взаимно-однозначное соответствие между точками прямых a и b, но и ликвидирует и второе несоответствие, связанное с нарушением непрерывности в расположении точек, принадлежащих прямой. Точки K^b и L^b прямой b, соответствующие бесконечно близким точкам K^a и L^a прямой a, удалены в бесконечность, и расстояние между ними бесконечно большое.

В то же время расстояние между точками K^aM^a и L^aM^a прямой a бесконечно мало. Для того чтобы избежать разрыва прямой b, достаточно предположить, что расстояние между точками K^bM^b и L^bM^b так же бесконечно мало, как и между двумя другими бесконечно близкими точками K^bL^b. Это может произойти лишь в том случае, если прямая b будет замкнутой. Условная модель такой прямой показана на рис. 3.

На плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, каждая из которых имеет несобственную точку. Что же представляет из себя множество этих точек плоскости?

Так как каждая прямая плоскости имеет только одну несобственную точку, то она может пересекать множество этих несобственных точек только в одной точке, поэтому естественно считать множество несобственных точек плоскости несобственной прямой. Выясним также, что представляет собой множество несобственных точек пространства.

Представим две параллельные плоскости α и β (рис. 4). Проведем в каждой из них по одной прямой a и b так, чтобы $a \parallel b$. Эти прямые пересекутся в несобственной точке A_∞. Проведем в плоскости α прямую c, а в плоскости β прямую d, причем $c \parallel d$. Эти прямые пересекутся также в несобственной точке B_∞. Несобственные точки A_∞ и B_∞ определяют несобственную прямую l_∞. Так как точки A_∞ и B_∞ принадлежат как плоскости α, так и плоскости β, то несобственная прямая также принадлежит этим плоскостям. Следовательно, в евклидовом пространстве, дополненном несобственными точками, две параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной — несобственной прямой. Ранее было установлено, что множество несобственных точек пространства пересекаются прямой в одной несобственной точке. Теперь мы показали, что это же множество имеет с плоскостью одну общую несобственную прямую.

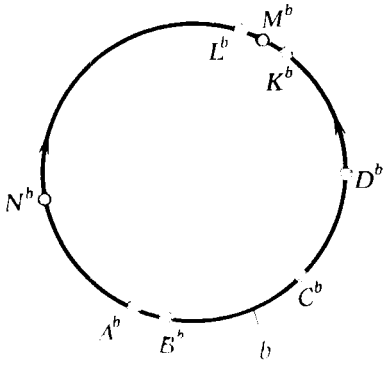


Рис. 3

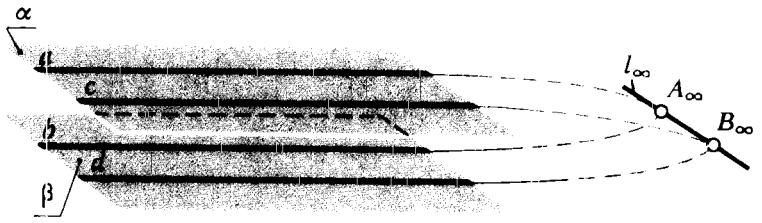


Рис. 4

Естественно считать множество несобственных точек пространства несобственной (бесконечно удаленной) плоскостью*.

Итак, для реконструкции евклидова пространства достаточно: дополнить множество точек прямой несобственной точкой, что приводит к дополнению евклидовой плоскости несобственной прямой, а трехмерное пространство — несобственной плоскостью.

Дополненные несобственными элементами евклидовы плоскость и пространство называют соответственно *проективной плоскостью* и *проективным пространством*.

Отмеченные ранее в пп. 5, 6, 7 (см. § 1, с. 14) свойства евклидова пространства для проективного пространства могут быть сформулированы иначе:

п. 5 — две прямые, принадлежащие одной плоскости, *всегда* принадлежат одной и той же и только одной точке;

п. 6 — две различные плоскости *всегда* принадлежат одной и той же и только одной прямой;

п. 7 — плоскость и не принадлежащая ей прямая *всегда* принадлежат одной и той же и только одной точке.

Во всех рассмотренных случаях точка и прямая могут быть как собственными, так и несобственными.

§ 3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Сущность центрального проецирования заключается в следующем: пусть даны плоскость π_1 и точка S ($S \notin \pi_1$ рис. 5). Возьмем произвольную точку A ($A \notin \pi_1$, $A \neq S$). Через заданную точку S и точку A проводим прямую (SA) и отмечаем точку A', в которой эта прямая пересекает плоскость π_1. Плоскость π_1 называют *плоскостью проекции*, точку S — *центром проекции***, полученную точку A' — *центральной проекцией точки* A на плоскость π_1, прямую (SA) — *проецирующей прямой*. Положения плоскости π_1 и центра S определяют аппарат центрального проецирования. Если он задан, то всегда имеется возможность определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскости проекции.

Действительно, пусть дана произвольная точка B (см. рис. 5); проведя проецирующую прямую (SB) и найдя точку ее встречи (пересечения) с плоскостью π_1, определяем центральную проекцию B' точки

---

* По аналогии с плоскостью евклидова пространства, в котором плоскость можно рассматривать как множество точек (собственных), которые пересекаются прямой в одной (собственной) точке и плоскостью по одной (собственной) прямой.

** В некоторых учебниках встречается определение точки S как полюса проекции или как вершины конической поверхности. В этих случаях проекции называют соответственно полярными или коническими.

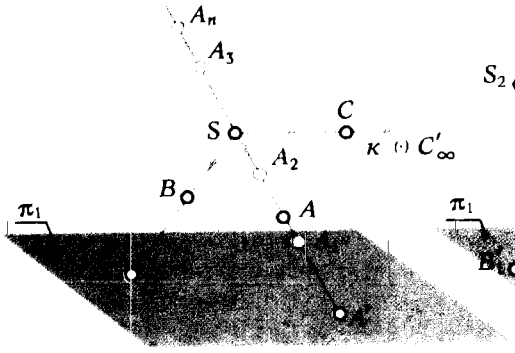


Рис. 5

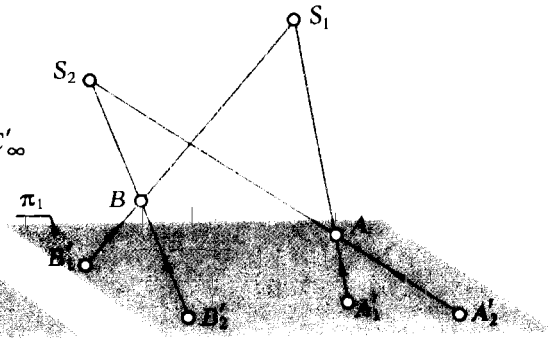


Рис. 6

B при данном аппарате проецирования (фиксированном положении π_1 и S).

В том случае, когда точка C принадлежит плоскости, проходящей через центр проекции и параллельной плоскости π_1, проецирующая прямая (SC) пересечет плоскость проекции в несобственной точке C'_∞. Таким образом, можно сделать вывод, что *при заданном аппарате проецирования каждая точка пространства имеет только одну центральную проекцию.* Это утверждение вытекает из того, что через две различные точки можно провести только одну прямую. К сожалению, обратное утверждение — каждой центральной проекции точки однозначно соответствует точка, не имеет места.

Из рис. 5 видно, что точка A' может быть центральной проекцией любой точки A_1, A_2, A_3, ... , A_n, принадлежащей прямой $(A'S)$. Поэтому *одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки в пространстве.*

Для определения положения точки необходимо иметь две ее центральные проекции, полученные из двух различных центров. Имея две центральные проекции точки A'_1 и A'_2, полученные из центров S_1 и S_2 (рис. 6), можно определить положение точки A в пространстве. Для этого достаточно провести прямые (A'_1S_1) и (A'_2S_2) и отметить точку их пересечения.

На рис. 6 показано также определение положения точки B по заданным проекциям B'_1 и B'_2.

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим частный случай центрального проецирования, когда центр проекции помещен в несобственной точке S^*_∞. В этом случае проекцией точки A на плоскость π_1 будет точка A', в которой проецирующая прямая $(S_\infty A)$ пересекает плоскость проекции π_1 (рис. 7).

Для нахождения проекции точки B следует провести прямую $(S_\infty B) \parallel (S_\infty A)$ и определить точку ее пересечения с плоскостью π_1. Очевидно, что при таком положении центра проекции и все остальные проецирующие прямые будут также параллельны $(S_\infty A)$. Множество всех прямых пространства, имеющих несобственную точку, образуют связ-

* На чертеже несобственная точка указывается направлением s.

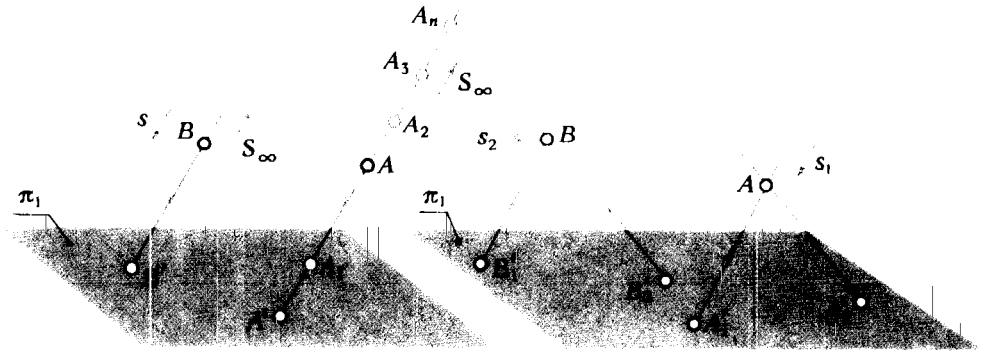


Рис. 7 Рис. 8

ку, центр которой — несобственная точка, совпадающая с центром проекции.

В связи с параллельностью проецирующих прямых рассматриваемый способ проецирования называется *параллельным*, а полученные с его помощью проекции — *параллельными проекциями*.

Аппарат параллельного проецирования полностью определяется положением плоскости проекции π_1 и направлением проецирования s.

Отмеченное раньше свойство центрального проецирования сохраняется и в данном случае. Применительно к параллельному проецированию оно может быть сформулировано:

каждая точка пространства, при заданном аппарате проецирования, будет иметь только одну параллельную проекцию.

Обратное утверждение, как и в случае центрального проецирования, не имеет места.

Действительно, точка A' (см. рис. 7) может быть параллельной проекцией любой точки A_1, A_2, A_3, ... , A_n, принадлежащей прямой $(A'S_\infty)$, поэтому одна параллельная проекция точки не позволяет судить о положении самой точки в пространстве.

Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две ее параллельные проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.

В этом случае положение точки A определяется пересечением прямых, проведенных через A'_1 и A'_2 параллельно соответствующим направлениям s_1 и s_2 (рис. 8).

На рис. 8 показано также нахождение положения в пространстве точки B по известным ее параллельным проекциям B'_1 и B'_2.

§ 5. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования s перпендикулярно плоскости проекции, называется прямоугольным или ортогональным (от слова *orthogonios* — прямоугольный) проецированием.

Ортогональное проецирование находит широкое применение в инженерной практике для изображения геометрических фигур на плоскости.

Рис. 9 дает наглядное представление об ортогональном проецировании точки.

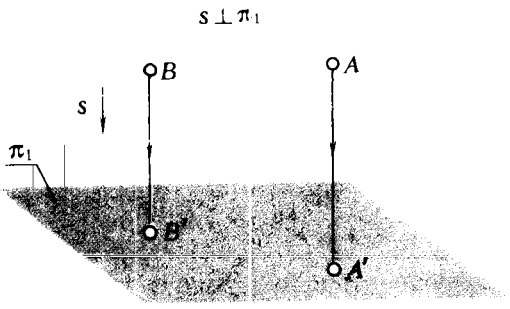


Рис. 9

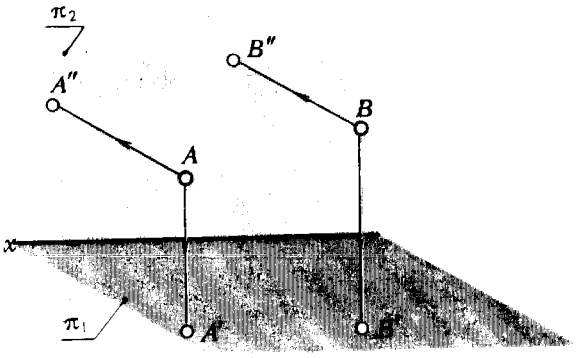


Рис. 10

Раньше отмечалось, что для решения обратной задачи — определения положения точки в пространстве по ее параллельным проекциям — необходимо иметь две параллельные проекции, полученные при двух направлениях проецирования.

Так как через точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную к плоскости, то, очевидно, в отличие от центрального и параллельного (косоугольного) проецирования (см. рис. 5 и 7) при ортогональном проецировании для получения двух проекций одной точки необходимо иметь две не параллельные плоскости проекции.

Выделим в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости π_1 и π_2. Спроецируем ортогонально точки $\{K, ...\}$ пространства на плоскость π_1, получим множество проекций точек $\{K', ...\}$, образующих поле проекций точек $\{K, ...\}$, которое условимся называть горизонтальной плоскостью проекций. При ортогональном проецировании множества точек пространства $\{K, ...\}$ на плоскость π_2 получим множество проекций точек $\{K'', ...\}$, образующих поле проекций точек $\{K, ...\}$, которое будем называть фронтальной плоскостью проекций.

На рис. 10 показаны точки пространства A и B и их ортогональные проекции A', A'' и B', B''. Здесь, как и в ранее рассмотренных случаях центрального проецирования (см. рис. 5) и параллельного проецирования (см. рис. 7), одной точке пространства соответствуют две точки — ее проекции.

Если положение плоскостей π_1 и π_2 фиксировано, *то каждой точке пространства будет соответствовать упорядоченная пара точек на полях проекций.*

Справедливым оказывается и обратное утверждение — *упорядоченной паре точек полей проекций соответствует единственная точка пространства.*

Отмеченное свойство является фундаментальным — составляющим основу построения проекционного чертежа.

Ортогональное проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием. К ним в первую очередь следует отнести:

а) простоту графических построений для определения ортогональных проекций точек;

б) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Отмеченные преимущества обеспечили широкое применение ортогонального проецирования в технике, в частности, для составления машиностроительных чертежей.

§ 6. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции в общем случае с искажением. При этом характер искажений зависит от аппарата проецирования и положения проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции. В частности, при ортогональном проецировании, если проецируемая фигура занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекции, ее проекция не сохраняет метрических характеристик оригинала — происходит искажение линейных и угловых величин.

Действительно, при ортогональном проецировании трапеции $ABCD$ на плоскость π_1, не параллельную плоскости трапеции (рис. 11), длины ее сторон, величины углов при вершинах, площадь и другие метрические характеристики оригинала на проекции $A'B'C'D'$ не сохраняются.

Наряду с этим между фигурой-оригиналом и ее ортогональной проекцией на плоскость существует определенная связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства проецируемой фигуры Ф сохраняются и на ее проекции Ф′.

Из рис. 11 видно, что точки A, B, C, D — вершины проецируемой трапеции (фигура Ф) проецируются в точки A', B', C', D' — вершины трапеции-проекции (фигура Ф′); отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ — стороны трапеции проецируются в отрезки $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'A']$ — стороны трапеции-проекции.

Параллельным основаниям $[AB] \parallel [DC]$ проецируемой трапеции соответствуют также параллельные основания $[A'B'] \parallel [D'C']$ трапеции-проекции.

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называются независимыми или инвариантными относительно выбранного способа проецирования.

Основу любой геометрии составляет система аксиом. Любое геометрическое определение и предложение (теорема), равно как и доказательства теорем, базируются на принятой системе аксиом.

При ортогональном проецировании — получении проекций геометрической фигуры по ее оригиналу или при решении обратной задачи — определении формы и размеров оригинала по его ортогональным проекциям базируются на инвариантных свойствах ортогонального проецирования:

1. *Ортогональная проекция точки есть точка:*

$$A \to A'$$

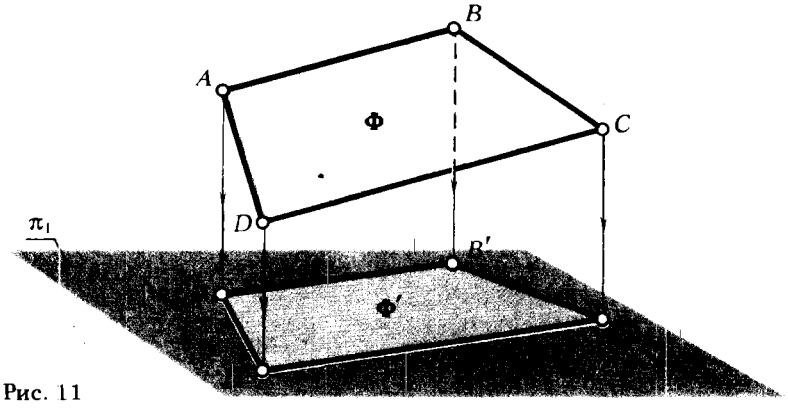


Рис. 11

2. *Если фигура* Φ_1 *принадлежит фигуре* Φ, *то ортогональная проекция фигуры* Φ'_1 *принадлежит ортогональной проекции фигуры* Φ'*:

$$\Phi_1 \subset \Phi \Rightarrow \Phi'_1 \subset \Phi'.$$

Из свойства 1 получаем:

1 а. *Ортогональная проекция прямой на плоскость есть прямая*, в частном случае, когда прямая перпендикулярна плоскости проекции, — точка (рис. 12 и 13):

$$(\forall l) \wedge (l \not\perp \pi_1) : l \to l'.$$

Действительно, возьмем на прямой l (рис. 12) ряд точек $1, 2, 3, \ldots, n$ и проведем через них проецирующие прямые $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, перпендикулярные плоскости π_1. Каждая из этих прямых пересечет плоскость π_1 в точках $1', 2', 3', \ldots, n'$.

Множество всех прямых $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, проходящих через нетождественные точки прямой l перпендикулярно к плоскости π_1, образуют проецирующую плоскость α, которая пересекается с плоскостью π_1 по прямой, поэтому точки $1', 2', 3', \ldots, n'$ (ортогональные проекции точек $1, 2, 3, \ldots, n$ прямой l) принадлежат одной прямой l' — ортогональной проекции прямой l.

На рис. 13 показан случай, когда прямая $l \perp \pi_1$. Из чертежа видно, что все прямые $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, проецирующие точки $1, 2, 3, \ldots, n$ прямой l, совпадают с этой прямой и пересекают плоскость π_1 в одной точке $1' \equiv 2' \equiv 3' \equiv \ldots \equiv n'$ — горизонтальной проекции прямой l'**.

Из свойства 2 следует:

2 а. *Если точка* A *принадлежит линии* l, *то ортогональная проекция точки* A' *принадлежит ортогональной проекции линии* l' (рис. 14):

$$A \in l \Rightarrow A' \in l'.$$

2 б. *Если линия* l *принадлежит поверхности* α, *то ортогональная проекция линии* l' *принадлежит ортогональной проекции поверхности* α' (рис. 15):

$$l \subset \alpha \Rightarrow l' \subset \alpha'.$$

---

* С позиции теории множеств это свойство можно сформулировать иначе: "если множество M принадлежит (является подмножеством) множеству N, то ортогональная проекция множества M' на плоскость принадлежит ортогональной проекции N' на эту же плоскость.

**На рис. 13 горизонтальная проекция прямой l' обозначена H_l, так как в этом случае $l' \equiv H_l$.

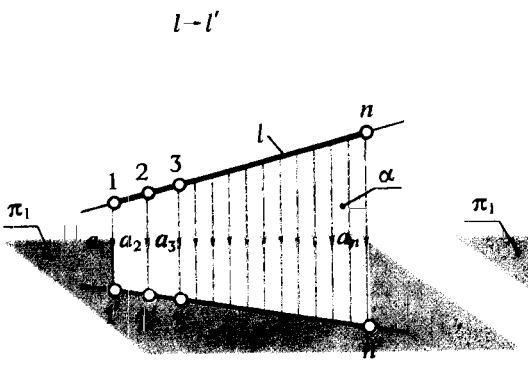


Рис. 12

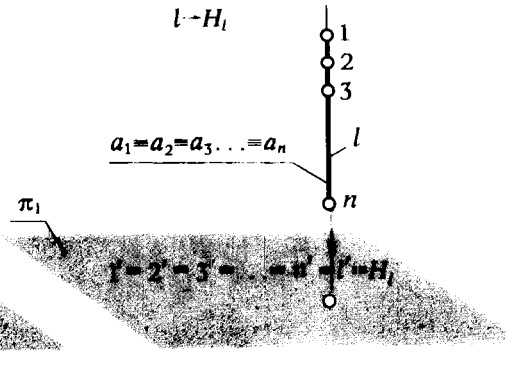


Рис. 13

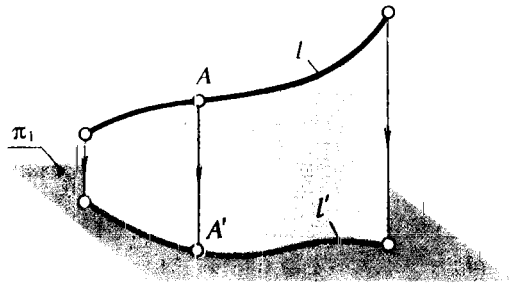


Рис. 14

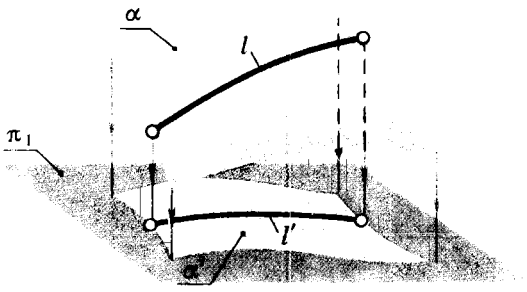


Рис. 15

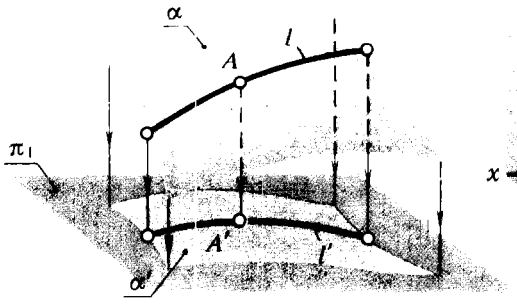


Рис. 16

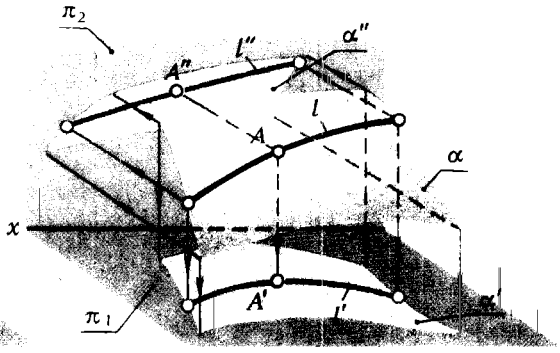


Рис. 17

2 в. *Если точка A принадлежит поверхности α, то ортогональная проекция точки A' находится на ортогональной проекции линии l', принадлежащей ортогональной проекции поверхности α'* (рис. 16):

$$A \in \alpha \Rightarrow A' \in l' \subset \alpha'.$$

В том случае, когда удовлетворяется условие принадлежности $A'' \in l''$ и $A'' \in l'' \subset \alpha''$ на другой плоскости проекции π_2 ($\pi_2 \nparallel \pi_1$), справедливы следующие утверждения:

$$A \in l \Leftrightarrow (A' \in l') \wedge (A'' \in l'');$$

$$A \in l \subset \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha'').$$

Поставленные здесь знаки эквивалентности между левой и правой частями показывают, что справедливы и обратные утверждения:

— если ортогональные проекции точки A (A' и A'') принадлежат соответственно ортогональным проекциям линии l (l' и l''), то точка A принадлежит линии l;

— если ортогональные проекции точки A (A' и A'') принадлежат соответствующим ортогональным проекциям линии l (l' и l''), которые, в свою очередь, принадлежат одноименным ортогональным проекциям поверхности α (α' и α''), то точка A принадлежит поверхности α (рис. 17).

2 г. *Если фигура Φ принадлежит плоскости α, перпендикулярной плоскости проекции π_1, то ортогональная проекция этой фигуры принадлежит линии пересечения плоскости α с плоскостью π_1 — горизонталь-*

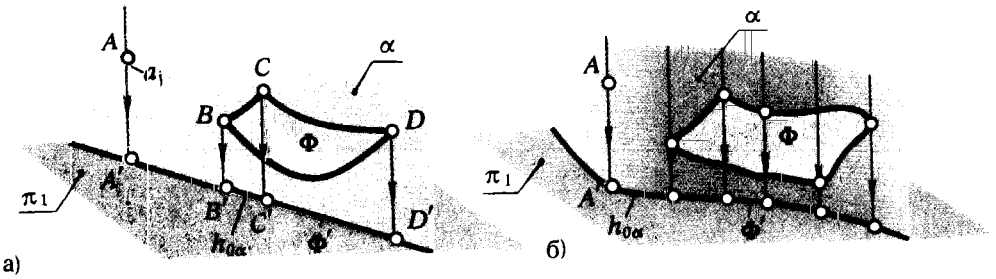


Рис. 18

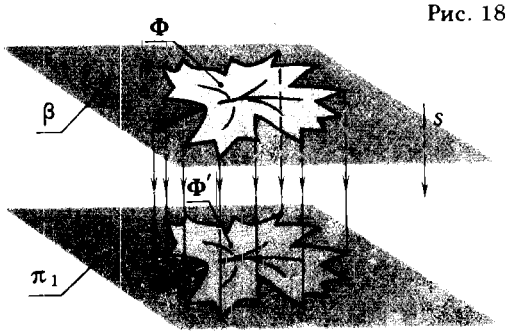


Рис. 19

ному следу $h_{0\alpha}$ *плоскости* α:

$$(\Phi \subset \alpha) \wedge (\alpha \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\alpha}.$$

В справедливости этого утверждения легко убедиться, рассматривая рис. 18,*а*. Пусть α — плоскость, перпендикулярная плоскости проекции π_1. Плоскость α можно рассматривать как состоящую из множества прямых $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, перпендикулярных π_1, каждая из которых пересекает плоскость π_1 в точке, принадлежащей прямой $h_{0\alpha}$.

Допустим, что в плоскости α задана точка A ($A \in \alpha$). Очевидно, горизонтальная проекция может быть найдена как результат пересечения прямой a_j с плоскостью π_1 ($a_j \ni A$ и $a_j \subset \alpha$ и $a_j \perp \pi_1$), но из свойства 1а (см. рис. 13) следует, что $a_j \cap \pi_1 = A' \in h_{0\alpha}$.

Если в плоскости α будет задана какая-либо фигура Φ, то, проецируя точки B, C, D, ... этой фигуры на плоскость π_1, мы каждый раз будем получать горизонтальные проекции этих точек, принадлежащие следу $h_{0\alpha}$ плоскости α. Совокупность горизонтальных проекций точек B', C', D', ... укажет горизонтальную проекцию фигуры Φ', т. е. $\Phi' \subset h_{0\alpha}$.

Из рис. 18,*б* видно, что отмеченное свойство сохраняется и в том случае, когда вместо плоскости будет взята произвольная горизонтально проецирующая поверхность.

2 д. *Если фигура* Φ *принадлежит плоскости* β, *параллельной плоскости проекции* π_1, *то ортогональная проекция этой фигуры на плоскость* π_1 *конгруентна самой фигуре* (рис. 19):

$$(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi.$$

В справедливости этого свойства ортогонального проецирования легко убедиться путем следующих рассуждений: представим, что плоскость β совпадает с плоскостью проекций π_1 (частный случай параллельности). Не вызывает сомнений, что ортогональная проекция фигуры Φ' на плоскость π_1 ничем не будет отличаться от самой фигуры Φ.

Если плоскость β будет перемещаться вдоль проецирующего луча s, оставаясь при этом параллельной своему первоначальному положению (плоскости π_1), то это не повлечет за собой изменения формы и размеров проецируемой фигуры.

2 е. Следует иметь в виду, что в том случае, когда проецируемой фигурой является прямой угол, для получения неискаженной ортогональной проекции этого угла достаточно, чтобы только одна из его

сторон была параллельна плоскости проекции (при условии, что другая сторона угла не перпендикулярна плоскости проекции).

Это свойство может быть записано:

$$(\widehat{ABC} = 90^\circ) \wedge ([BC] \parallel \pi_1, [BA] \not\perp \pi_1) \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^\circ.$$

Если $\angle ABC$ прямой и сторона BC этого угла параллельна плоскости проекций π_1, а сторона BA не перпендикулярна плоскости π_1, то ортогональная проекция угла на плоскость π_1 — $\widehat{A'B'C'} = 90^\circ$.

В большинстве учебников по начертательной геометрии это инвариантное свойство ортогонального проецирования предлагается в виде теоремы о частном случае проецирования прямого угла. Ниже приводится одно из возможных доказательств этой теоремы, взятое нами из учебника В. О. Гордона и М. А. Семенцова-Огиевского.

Положим, что сторона BC прямого угла ABC (рис. 20) параллельна плоскости проекции π_1. В этом случае прямая BC параллельна $B'C'$.

Пусть вторая сторона прямого угла, наклонная AB, пересекает свою проекцию $A'B'$ в точке K. Проведем в плоскости проекции через точку K прямую KL параллельно $B'C'$. Прямая KL также параллельна BC и $\angle B'KL$ получается прямым. Согласно теореме о трех перпендикулярах $\angle KBC$ также прямой. Следовательно, и $\angle A'B'C'$ будет прямым.

Отмеченные инвариантные свойства имеют чрезвычайно важное значение при решении позиционных (свойства 2 а ... 2 г) и метрических (свойства 2 д и 2 е) задач.

2 ж. *Если точка K есть результат пересечения прямых a и b, то ортогональная проекция этой точки K' определяется пересечением ортогональных проекций прямых a' и b'* (рис. 21).

К этому свойству можно прийти путем следующих рассуждений. Допустим нам даны две фигуры Φ_1 и Φ_2. Обозначим фигуру, получающуюся в результате их пересечения, Φ_3. Тогда $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$, но $\Phi_3 \subset \Phi_1$ и $\Phi_3 \subset \Phi_2$, на основании аксиомы 2 можно записать:

$$\Phi'_3 \subset \Phi'_1 \text{ и } \Phi'_3 \subset \Phi'_2,$$

т. е.

$$\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2 \Rightarrow \Phi'_3 = \Phi'_1 \cap \Phi'_2.$$

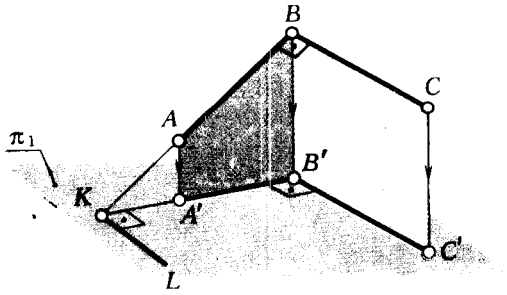


Рис. 20

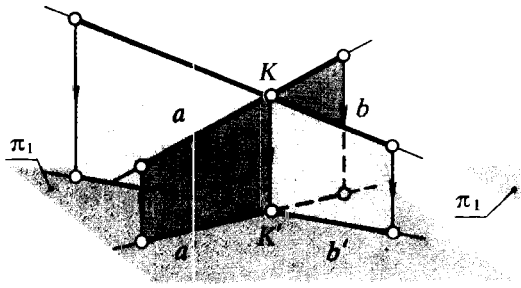


Рис. 21

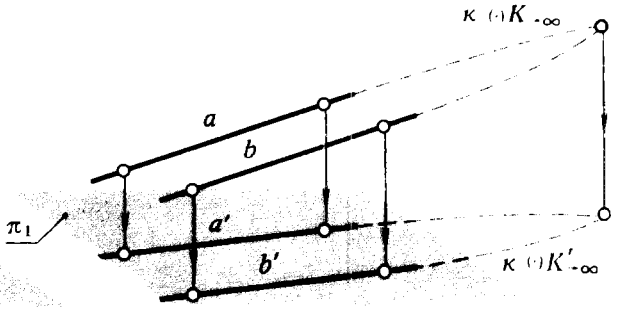


Рис. 22.

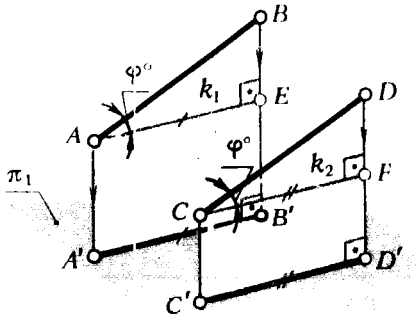


Рис. 23

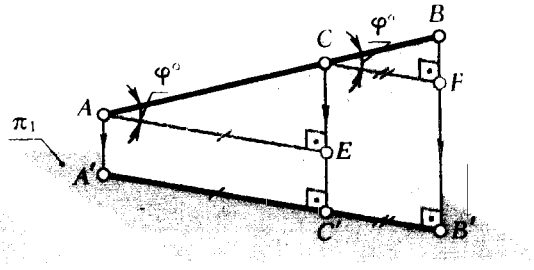


Рис. 24

Если в качестве фигуры Φ_1 будет задана прямая a, а вместо фигуры Φ_2 — прямая b (пересечение прямых a и b — точка K), то мы придем к заключению, которое требовалось доказать:

$$K = a \cap b \Rightarrow K' = a' \cap b'.$$

В том случае, когда $a \parallel b$, точкой пересечения прямых a и b будет бесконечно удаленная (несобственная) точка K_∞, которая при ортогональном проецировании на плоскость π_1 спроецируется также в несобственную точку K'_∞; следовательно, $a' \parallel b'$. Это свойство можно записать:

$$(a \parallel b) \wedge (a \not\perp \pi_1) \Rightarrow a' \parallel b'.$$

2 з. *Если прямые a и b параллельны между собой и не перпендикулярны плоскости проекции* π_1, *то параллельны и их ортогональные проекции на эту плоскость* (рис. 22). Приведенный инвариант позволяет сформулировать еще два свойства, инвариантные относительно ортогонального проецирования.

2 и. *Если отрезок* $[AB]$ *параллелен отрезку* $[CD]$, *то отношение длин отрезков равно отношению длин их ортогональных проекций* (рис. 23) *:

$$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

2 к. *Если точка C принадлежит отрезку* $[AB]$, *то отношение* $[AC]$ *к* $[CB]$ *равно отношению их проекций. Или иначе, если точка C делит отрезок в данном отношении, то и проекция C′ (или C″) делит проекции отрезка в том же отношении* (рис. 24) :

$$C \in [AB] \Rightarrow \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|}.$$

Справедливость двух последних утверждений ясна из рис. 23 и 24 и не нуждается в доказательстве.

§ 7. ЭПЮР МОНЖА

В машиностроении для того чтобы иметь возможность по чертежу судить о форме и размерах изображаемых предметов (деталей, узлов, машин, агрегатов), при составлении чертежей, как правило, пользуются не двумя, а несколькими плоскостями проекций.

Наиболее часто используются три плоскости проекции. В связи с тем, что начертательная геометрия призвана передавать результаты своих

* Имеется в виду, что отрезки не перпендикулярны плоскости проекции.

теоретических исследований для практического использования, ортогональное проецирование целесообразно рассматривать также в системе трех плоскостей проекций.

Положение в пространстве точки, а следовательно, и любой геометрической фигуры может быть определено, если будет задана какая-либо координатная система отнесения. Наиболее удобной для фиксирования положения геометрической фигуры в пространстве и выявления ее формы по ортогональным проекциям является декартова система координат*, состоящая из трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

Рис. 25 дает наглядное представление о макете, состоящем из трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Условимся называть:

плоскость π_1 — горизонтальной плоскостью проекции;

плоскость π_2 — фронтальной плоскостью проекции;

плоскость π_3 — профильной плоскостью проекции.

Линии пересечения плоскостей проекции образуют оси координат. Ось x называют осью *абсцисс*, ось y — осью *ординат* и ось z — осью *аппликат*. Точка пересечения осей принимается за начало координат и обозначается буквой O (первая буква латинского слова *Origo* — начало).

В Советском Союзе, как и в большинстве европейских стран (в отличие от США и некоторых стран Латинской Америки), принята правая система расположения плоскостей проекций. При этом положительными направлениями осей считают: для оси x — влево от начала координат, для оси y — в сторону зрителя от плоскости π_2, для оси z — вверх от плоскости π_1; противоположные направления осей считают отрицательными.

Плоскости проекции делят пространство на восемь частей — *октантов*. Октанты условно принято нумеровать, как это показано римскими цифрами на рис. 25.

Каждый октант представляет собой прямоугольный трехгранник, у которого гранями служат части плоскостей проекций (называемые полами), а ребрами — оси координат.

---

*Декарт (1596—1650) — французский математик и философ, предложивший систему координат для определения положения системы точек в пространстве.

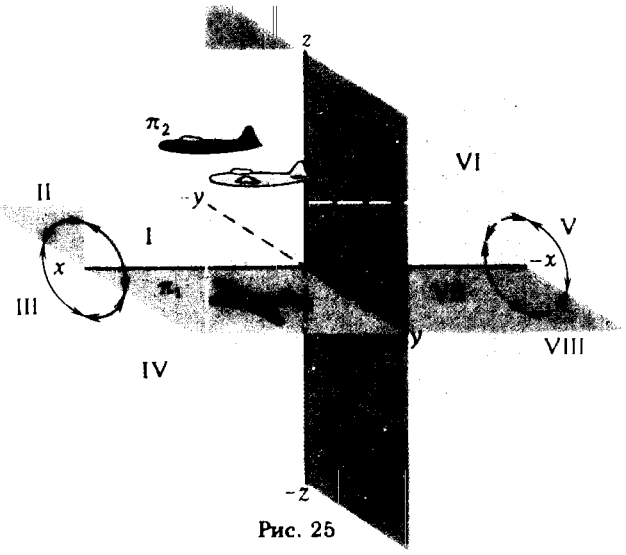


Рис. 25

Учитывая при отсчете координат точки отмеченные выше направления осей x, y и z, получим табл. 1 знаков координат.

Таблица 1

Октант	Знак координаты			Октант	Знак координаты		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	—	+	+
II	+	—	+	VI	—	—	+
III	+	—	—	VII	—	—	—
IV	+	+	—	VIII	—	+	—

Пользоваться пространственным макетом, показанным на рис. 25, для изображения ортогональных проекций геометрических фигур неудобно ввиду его громоздкости, а также из-за того, что на плоскостях π_1 и π_3 (показанных на макете) происходит искажение формы и размеров проецируемой фигуры.

Поэтому вместо изображения на чертеже пространственного макета пользуются *эпюром — чертежом, составленным из двух или трех связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры**.

Преобразование пространственного макета в эпюр осуществляется путем совмещения плоскостей π_1 и π_3 с фронтальной плоскостью проекции π_2. Для совмещения плоскости π_1 с π_2 поворачиваем ее на 90° вокруг оси x в направлении движения часовой стрелки (рис. 26).

На рис. 26, для наглядности, плоскость π_1 повернута на угол, чуть меньший 90° После совмещения горизонтальной плоскости поворачиваем вокруг оси z также на угол 90° профильную плоскость в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Вместе с полами

* Эпюр — от французского глагола *epurer* — улучшать, исправлять рисунок.

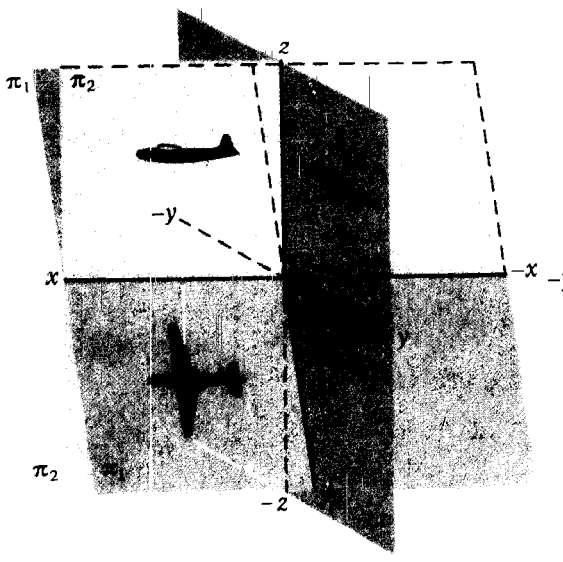


Рис. 26

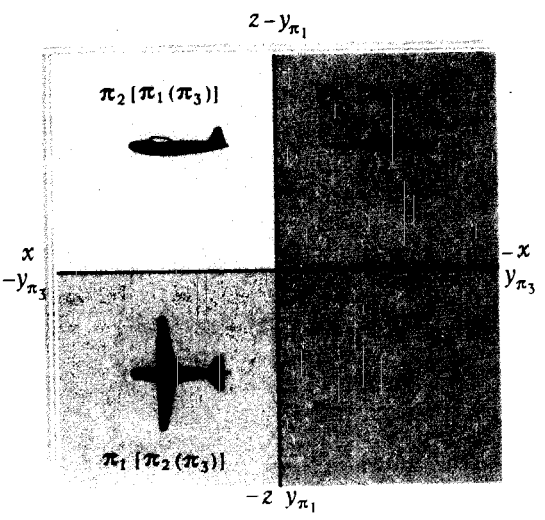


Рис. 27

плоскостей проекций будет перемещаться и ось y, при этом ось y, принадлежащая горизонтальной плоскости проекции, после поворота совпадает с осью z, а ось y профильной плоскости — с осью x. После преобразования пространственный макет примет вид, показанный на рис. 27. На этом рисунке указана также последовательность, в которой располагаются полы плоскостей проекций, так, запись π_2 [π_1 (π_3)] указывает, что в этой части эпюра (ограниченного положительным направлением осей x и z) ближе к нам находится верхняя левая пола фронтальной плоскости проекции, за ней располагается задняя левая пола горизонтальной плоскости проекции, далее — верхняя задняя пола профильной плоскости проекции.

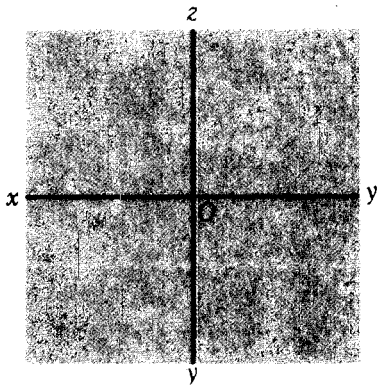


Рис. 28

Так как плоскости не имеют границ, в совмещенном положении (на эпюре) границы не показывают; нет необходимости оставлять надписи, указывающие положение пол плоскостей проекций; излишне также напоминать, где отрицательное направление осей проекций. Тогда, в окончательном виде, эпюр, заменяющий чертеж пространственного макета (см. рис. 25), примет вид, показанный на рис. 28. Плоская модель (эпюр) пространственного макета несет такую же информацию, какую содержит пространственный макет.

§ 8. НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ

К основным — неопределяемым — понятиям геометрии относятся: точка, прямая, плоскость, расстояние и множество; они не могут быть определены с помощью других, более простых (элементарных) понятий.

В то же время с помощью системы аксиом возможно установить отношения между отмеченными основными понятиями, которые в дальнейшем служат основанием для формулировки различных геометрических предложений (теорем), составляющих теоретическую базу геометрии. Учитывая особую роль, которую играют в геометрии, в том числе и геометрии начертательной, основные понятия, целесообразно начать изложение курса начертательной геометрии, связанного с использованием метода проецирования, с рассмотрения ортогональных проекций точки, прямой, плоскости и определения длины отрезка прямой (являющегося мерой расстояния), заданного ортогональными проекциями*.

По этой же причине проекции точки, прямой, плоскости и определение длины отрезка прямой рассматриваются вместе, несмотря на

---

* Рассмотрение проекций множества теряет всякий смысл, так как в геометрии имеют дело с множествами, элементами которых являются точки. В общем случае множество не имеет границ — оно представляет собой пространство, заполненное точками. Проекция такого множества покроет все поле проекции. Поэтому речь может идти только о проекциях конечного множества, образующего конкретную геометрическую фигуру. Проекции геометрических фигур будут рассмотрены в гл. III и IV.

то, что прямая относится к разделу линия, плоскость является представителем поверхностей, о которых речь будет идти позже, в гл. III и IV, а определение расстояния составляет содержание § 55 гл. VI.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

Точка, как математическое понятие, не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нульмерным образом, то говорить о его проецировании бессмысленно.

В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку можно принять шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о ее проекциях. Более того становится оправданным сделанное ранее (см. с. 13) определение геометрической фигуры как множества всех принадлежащих ей точек.

При построении ортогональных проекций точки следует руководствоваться первым инвариантным свойством ортогонального проецирования $A \to A'$.

Пусть даны в пространстве точка A и три взаимно перпендикулярные плоскости проекции (рис. 29,*а*). Положение точки в пространстве определяется тремя координатами (x, y, z), показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций. Чтобы определить эти расстояния, достаточно через точку A провести прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций, определить точки A', A'', A''' встречи этих прямых с плоскостями проекций и измерить величины отрезков $[AA']$, $[AA'']$, $[AA''']$, которые укажут соответственно значения аппликаты z, ординаты y и абсциссы x точки A.

Точки A', A'', A''' называют ортогональными проекциями точки A, при этом согласно принятым обозначениям (см. с. 9): A' — горизонтальная проекция точки A; A'' — фронтальная проекция точки A; A''' — профильная проекция точки A. Отрезки: $[AA'''] \cong [OA_x]$ — абсцисса точки A; $[AA''] \cong [OA_y]$ — ордината точки A; $[AA'] \cong [OA_z]$ — аппликата точки A.*

---

* Конгруентность отрезков $[AA'''] \cong [OA_x]$, $[AA''] \cong [OA_y]$, $[AA'] \cong [OA_z]$ следует из того, что параллелепипед $AA''A_zA'''A'A_xOA_y$ прямоугольный.

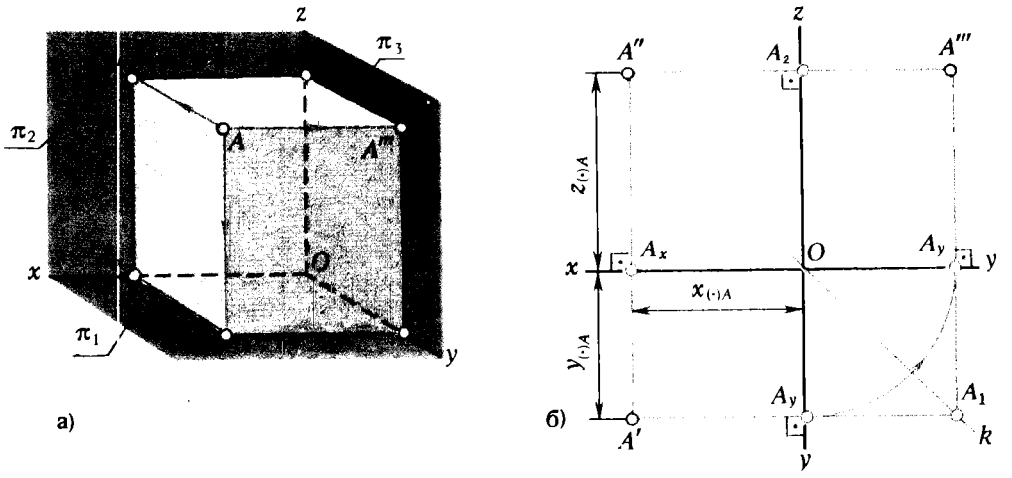


Рис. 29

Прямые (AA'), (AA''), (AA''') называются проецирующими прямыми.

При этом прямую (AA'), проецирующую точку A на горизонтальную плоскость проекций, называют *горизонтально проецирующей прямой.*

Аналогично: прямые (AA'') и (AA''') называют соответственно: *фронтально* (AA'') и *профильно* (AA''') *проецирующими прямыми.*

Две проецирующие прямые, проходящие через точку A, определяют плоскость, которую принято называть проецирующей.

Чтобы получить эпюр точки A, преобразуем пространственный макет, изображенный на рис. 29,*а*, так, как это было показано в предыдущем параграфе (см. рис. 26 и 27).

Фронтальная проекция точки A остается на месте, как принадлежащая плоскости π_2, которая не меняет своего положения при рассматриваемом преобразовании.

Горизонтальная проекция A' вместе с горизонтальной плоскостью проекции повернется по направлению движения часовой стрелки и расположится на одном перпендикуляре к оси x с фронтальной проекцией A''.

Профильная проекция A''' будет вращаться вместе с профильной плоскостью проекции и к концу преобразования займет положение, указанное на рис. 29,*б*. При этом A''' будет принадлежать перпендикуляру к оси z, проведенному через A'', и будет удалена от оси z на такое же расстояние, на какое горизонтальная проекция A' удалена от оси x.

Поэтому связь между горизонтальной и профильной проекциями точки может быть установлена с помощью двух ортогональных отрезков $[A'A_y]$ и $[A_yA''']$ и сопрягающей их дуги окружности с центром в точке пересечения осей x, y, z. Отмеченной связью пользуются для нахождения недостающей профильной (или горизонтальной) проекции.

Положение профильной (горизонтальной) проекции по заданным горизонтальной (профильной) и фронтальной проекциям может быть найдено и без проведения дуги окружности. В этом случае связь между горизонтальной и профильной проекциями может быть установлена с помощью ломаной линии $A'A_1A'''$ с вершиной A_1 на биссектрисе угла, образованного осями y, принадлежащими плоскостям π_1 и π_3.

Биссектрису OA_1 называют *постоянной прямой* k эпюра Монжа.

Чтобы определить положение точки A в пространстве, необходимо знать три ее координаты (x, y, z), равные длинам отрезков $[AA''']$, $[AA'']$, $[AA']$ (см. рис. 29,*а*). Величины этих отрезков могут быть легко определены на эпюре рис. 29,*б*:

$$[AA'''] \cong [A'A_y] \cong [A''A_z];$$
$$[AA''] \cong [A'A_x] \cong [A'''A_z];$$
$$[AA'] \cong [A''A_x] \cong [A'''A_y].$$

Попутно отметим, что горизонтальная проекция точки A определяется абсциссой x и ординатой y; ее фронтальная проекция — абсциссой x и аппликатой z, а профильная проекция — ординатой y и аппликатой z, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} A'(x, y); \\ A''(x, z); \\ A'''(y, z). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Из записи (1) следует:

1. *Точка в пространстве удалена:*

а) *от плоскости проекции* π_3 *на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки* A' *удалена от оси* y (или же фронтальная проекция A'' от оси z);

б) *от плоскости проекции* π_2 *на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки* A' *удалена от оси* x (или ее профильная проекция A''' от оси z);

в) *от плоскости проекции* π_1 *на такую же величину, на какую ее фронтальная проекция* A'' *удалена от оси* x (или ее профильная проекция A''' удалена от оси y).

2. *Две проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи):*

а) *горизонтальная и фронтальная — перпендикуляру к оси* x;

б) *горизонтальная и профильная — перпендикуляру к оси* y;

в) *фронтальная и профильная — перпендикуляру к оси* z.

3. Для ортогонального проецирования отмеченное ранее свойство (см. с. 19) может быть сформулировано: *положение точки в пространстве вполне определяется положением ее двух ортогональных проекций.* Как следствие из этого — по двум любым заданным ортогональным проекциям точки всегда можно построить недостающую ее третью ортогональную проекцию.

Действительно, сочетание любых двух ортогональных проекций точки всегда дает нам значения всех трех ее координат.

Пользуясь табл. 1, помещенной в § 7, и зная положительное и отрицательное направление осей, а также принимая во внимание свойства проекций точки (пп. 1, 2, 3), можно указать на эпюре проекции точки, если известны ее координаты, или определить, в каком октанте расположена точка и на какие расстояния она удалена от плоскостей проекций, если заданы хотя бы две ее ортогональные проекции.

ПРИМЕР. Даны координаты точек A $(-20, -20, +15)$ и B $(+15, +5, -10)$. Требуется найти положение проекций этих точек и определить, в каких октантах они находятся (рис. 30).

Для определения положения горизонтальной проекции A' точки A откладываем от начала координат на отрицательном направлении оси x (от точки O вправо) значение $x = -20$ мм и определяем точку A_x, а на отрицательном направлении оси y откладываем значение $y = -20$ (для плоскости π_1 отрицательное направление оси y совпадает с положительным направлением оси z) и определяем положение точки A_y.

Пересечение перпендикуляров, восставленных из точек A_x и A_y к соответствующим осям x и y, укажет положение горизонтальной проекции A' точки A.

Мы знаем, что фронтальная A'' и горизонтальная A' проекции точки принадлежат одному перпендикуляру к оси x (см. п. 2, с. 22) и то, что фронтальная проекция удалена от оси x на величину аппликаты z (в данном случае $z = +15$). Поэтому для определения положения A'' откладываем от точки A_x на перпендикуляре к оси x значение аппликаты $z = +15$.

Аналогично находим положение горизонтальной и фронтальной проекций точки B. Для этого на положительных направлениях осей x и y откладываем соответственно 15 и 5 мм. Эти координаты определяют положение B'. Фронтальная проекция принадлежит прямой линии связи, проходящей через B' перпендикулярно к оси x, и удалена от этой оси на заданное значение $z = -10$.

Приведенная в § 7 табл. 1 знаков координат точек, расположенных в разных октантах, позволяет легко определять, какому октанту принадлежит точка, если известны хотя бы две ее проекции.

Точка A находится в VI октанте пространства, так как она располагается за фронтальной плоскостью проекции (в зоне отрицательных значений ординаты y) выше горизонтальной (аппликата z — положительна) и правее профильной плоскости проекции (абсцисса x — отрицательна), т. е. в части пространства, ограниченной верхней правой полой плоскости π_2, задней правой полой плоскости π_1 и задней верхней полой профильной плоскости проекции π_3

Чтобы найти профильную проекцию точки, достаточно из A'' провести пря-

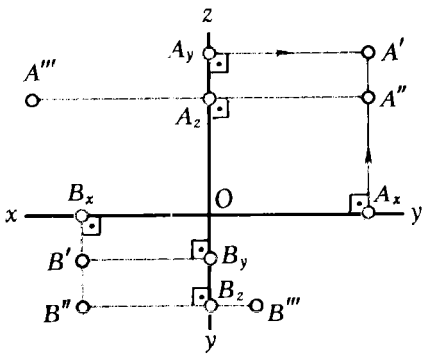


Рис. 30

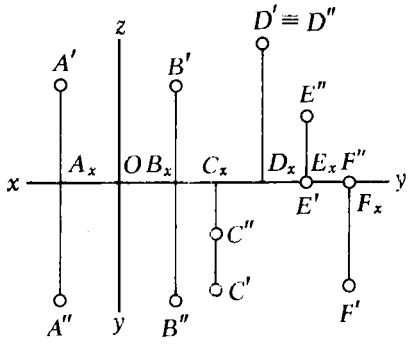


Рис. 31

мую, перпендикулярно к оси z, и отложить на ней от этой оси влево (по отрицательному направлению оси y, принадлежащей профильной плоскости проекции) значение $y = -20$ мм.

Точка B расположена в IV октанте, в котором координаты x и y — положительны, а координата z — отрицательна. На рис. 30 указано также положение профильной B''' проекции этой точки.

На рис. 31 показаны горизонтальные и фронтальные проекции точек A, B, C, D, E, F. Зная положительные и отрицательные направления осей, можно без труда определить октант, которому принадлежит точка; так, точка A находится в третьем октанте пространства, а точка B, симметричная точке A относительно плоскости π_3, принадлежит седьмому октанту. Точка C находится в восьмом октанте, так как значения абсциссы x и аппликаты z — отрицательны, а значение ординаты y — положительно.

На рис. 31 показаны проекции D' и D'' точки D. Для этой точки характерно равенство аппликаты z и ординаты y, поэтому точка D удалена на одинаковое расстояние от плоскостей π_1 и π_2 ($|D'D_x| = |D''D_x|$), т. е. она принадлежит биссекторной плоскости шестого и восьмого октантов. На рис. 31 указаны также проекции точек E и F. Точка E принадлежит фронтальной плоскости проекции π_2 (ордината $y_{(\cdot)E} = 0$), а точка F — горизонтальной плоскости проекции π_1 ($z_{(\cdot)F} = 0$).

В тех случаях, когда нет необходимости в определении положения точки (или любой геометрической фигуры) относительно системы плоскостей проекций, можно не указывать на эпюре осей проекций. Иными словами, для безосного чертежа плоскости проекции принимаются неопределенными до параллельного переноса (т. е. могут перемещаться параллельно самим себе).

В инженерной практике при составлении чертежей, когда требуется определить форму и размеры геометрической фигуры или взаимное расположение совокупности геометрических фигур, обычно оси проекций не указывают. Отсутствие на чертеже осей не мешает определять третью проекцию любой точки по двум ее заданным проекциям, если указаны три проекции какой-либо другой точки.

ПРИМЕР. Даны три проекции точки A (A', A'', A'''), а также горизонтальная и фронтальная проекции точки B (B' и B''). Требуется найти профильную проекцию B''' (рис. 32). Через горизонтальную проекцию точки A' проводим прямую, параллельную линии связи ($A''A'''$), а через профильную проекцию A''' проводим прямую, параллельную линии связи ($A'A''$), и отмечаем точку их пересечения A_1. Через точку A_1 проводим постоянную прямую k. Прямая k проводится как биссектриса угла $A'A_1A'''$.

Зная положение постоянной прямой, легко найти недостающую профильную

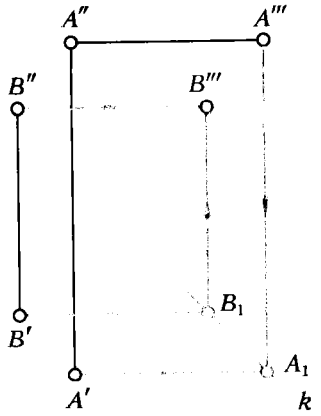


Рис. 32

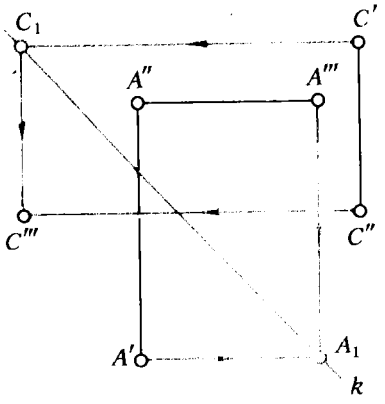


Рис. 33

проекцию точки B. Для этого через B' проводим горизонтальную прямую, отмечаем точку B_1 ее пересечения с постоянной прямой k. Через точку B_1 проводим вертикальную прямую. Точка ее пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через B'', определяет искомую профильную проекцию B'''.

Постоянная прямая позволяет решать задачу по определению третьей проекции точки по двум заданным независимо от того, в каком октанте находится точка.

ПРИМЕР. Даны три проекции точки $A(A', A'', A''')$, а также горизонтальная и фронтальная проекции точки $C(C'$ и $C'')$, расположенной в VI октанте (рис. 33). Требуется определить C'''.

Через данную проекцию A' проводим горизонтальную прямую и отмечаем точку A_1 пересечения ее с вертикальной прямой, проведенной через A'''. Через точку A_1 проводим постоянную прямую k.

Для определения третьей проекции точки C достаточно через точку C' провести горизонтальную прямую, а из точки C_1 пересечения ее с постоянной прямой k — вертикальную прямую. Точка пересечения этой вертикали с горизонтальной прямой, проведенной через C'', укажет положение искомой проекции C'''. Если на безосном чертеже потребуется указать оси, то это всегда можно сделать (с точностью до параллельного переноса). Для этого одну из осей, например x, проводим произвольно, следя лишь за тем, чтобы она была перпендикулярна линии связи, соединяющей горизонтальную и фронтальную проекции точки. Тогда ось z определится как прямая, перпендикулярная к оси x в точке пересечения оси x с постоянной прямой k.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ

При построении проекции прямой следует исходить из инвариантного свойства **1а** (см. § 6) ортогонального проецирования:

$$(\forall\, l)\wedge(l \not\perp \pi_1) : l \to l'.^*$$

При ортогональном проецировании на плоскость прямая, не перпендикулярная плоскости проекции, проецируется в прямую.

Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух не тождественных точек, принадлежащих этой прямой.

$[AB]$, определяющий прямую l (рис. 34,*а*), занимает произвольное (общее) положение по отношению к плоскостям проекций (углы нак-

---

* Естественно, будут справедливы и следующие утверждения:

1) $(\forall l)\wedge(l \not\perp \pi_2) : l \to l''$; 2) $(\forall l)\wedge(l \not\perp \pi_3) : l \to l'''$.

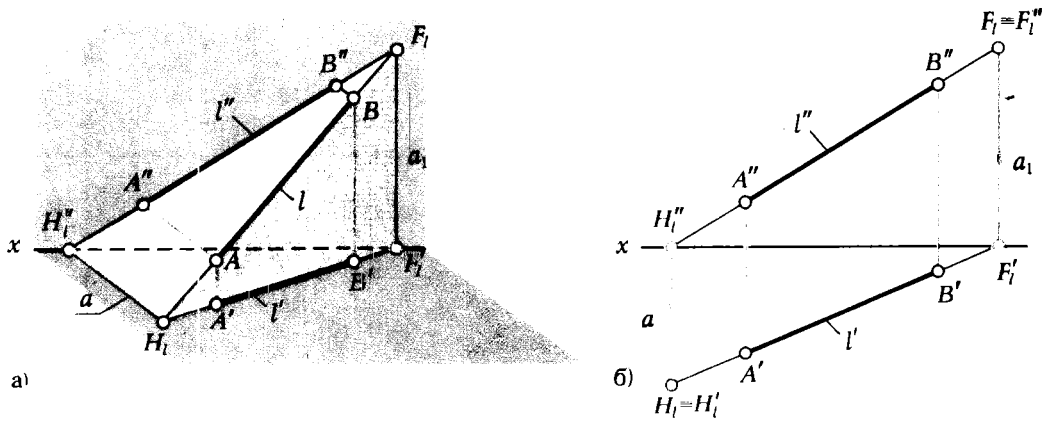


Рис. 34

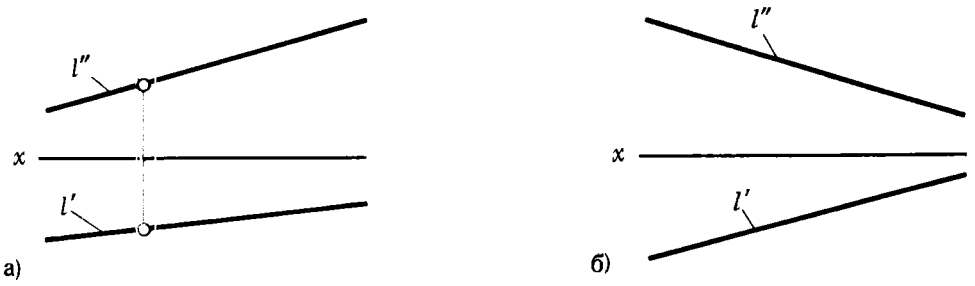


Рис. 35

лона прямой l к плоскостям проекций — произвольные, но отличные от 0 и 90°). Такая прямая называется *прямой общего положения*.

На эпюре проекции прямой общего положения составляют с осями проекций также произвольные углы (рис. 34,*б*). Прямую на эпюре можно задать не только проекциями ее отрезка (см. рис. 34,*б*), но и проекциями некоторой произвольной части прямой, не указывая концевых точек этой части. При этом можно ограничиться обозначением проекции только одной буквой, отнеся ее к какой-либо точке прямой (рис. 35,*а*) или к прямой (точнее ее проекции) в целом (рис. 35,*б*).

Следы прямой

Прямая общего положения пересекает все основные плоскости проекции. *Точку пересечения* (встречи) *прямой с плоскостью проекции называют следом прямой.*

В зависимости от того, с какой плоскостью проекции происходит встреча прямой l, следы обозначают и называют: H_l — горизонтальный след прямой l; F_l — фронтальный след прямой l. H_l', H_l'', F_l', F_l'' — соответственно горизонтальная и фронтальная проекции следов H_l и F_l. Следует иметь в виду, что $H_l \equiv H_l'$; $F_l \equiv F_l''$.

Установим правило нахождения следов прямой. Для примера рассмотрим определение H_l (см. рис. 34,*б*). Горизонтальный след — точка, принадлежащая как прямой l, так и плоскости проекции π_1 ($H_l = l \cap \pi_1$), поэтому $H_l'' \in l''$ и $H_l' \in x$, следовательно, $H_l' = l'' \cap x$. Горизонтальная проекция $H_l' \in l'$ (так как $H_l \in l$). Поэтому для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1) отметить точку пересечения фронтальной проекции прямой с осью x ($l'' \cap x = H_l''$);

2) через полученную точку провести прямую a, перпендикулярную оси x ($a \perp x$);

3) пересечение перпендикуляра a с горизонтальной проекцией прямой укажет положение горизонтального следа H_l ($a \cap l' = H_l$).

Таким образом, алгоритм определения горизонтального следа прямой l может быть записан: $H_l = (l'' \cap x = H_l'')$; $(a \perp x, a \ni H_l'')$; $a \cap l'$.

Для определения фронтального следа прямой вместо $l'' \cap x$ выполняется операция $l' \cap x = F_l'$, а прямая $a_1 \perp x$ проводится через точку F_l'. Последняя операция заключается в нахождении $F_l'' = a_1 \cap l''$.

Частные случаи расположения прямой

Кроме рассмотренного общего случая (см. рис. 34,*а*, *б*), существуют следующие частные случаи расположения прямой по отношению к заданной системе плоскостей проекций:

А. Прямая параллельна плоскости проекции.

Б. Прямая перпендикулярна плоскости проекции.

В. Прямая принадлежит плоскости проекции (частный случай параллельности).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

А. *Прямая, параллельная плоскости проекции* (горизонталь, фронталь)*.

1. *Горизонталь — прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекции:* $h \parallel \pi_1$.

Все точки горизонтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости π_1. Поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси x. Горизонтальная проекция может занимать любое положение (рис. 36,*а* и *б*). $\forall A \in h$; $z_{(\cdot)A}$ — const, поэтому $h'' \parallel x$.

2. *Фронталь — прямая, параллельная фронтальной плоскости проекции:* $f \parallel \pi_2$.

Все точки фронтали удалены на одинаковое расстояние от фронтальной плоскости π_2. Поэтому горизонтальная проекция любой фронтали параллельна оси x. Фронтальная проекция может занимать любое положение (рис. 37,*а* и *б*). $\forall B \in f$; $y_{(\cdot)B}$ — const, поэтому $f' \parallel x$.

Б. *Прямая, перпендикулярная плоскости проекции* (проецирующая прямая).

---

* Горизонталь и фронталь называют также линиями уровня.



Рис. 36.

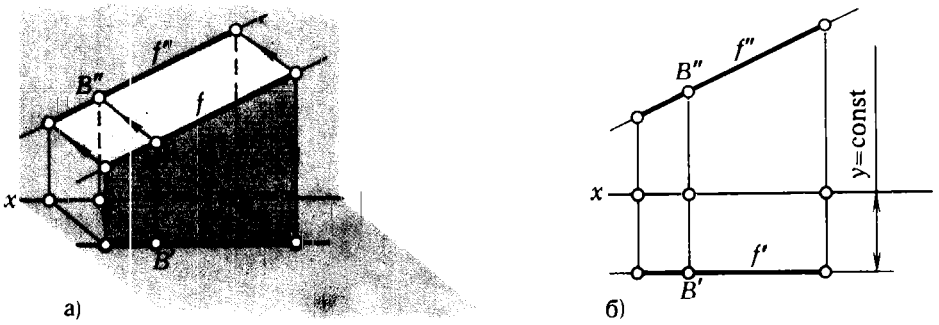


Рис. 37

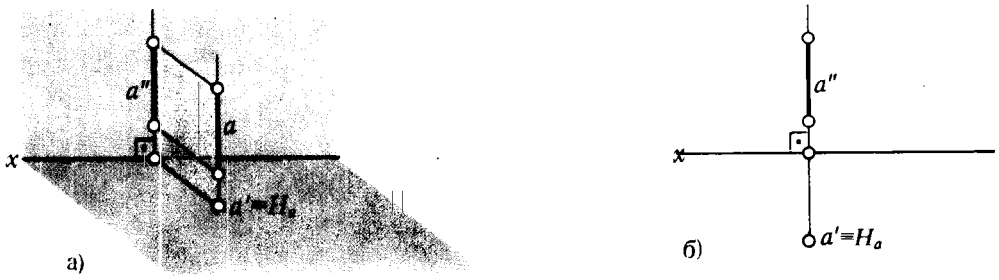


Рис. 38

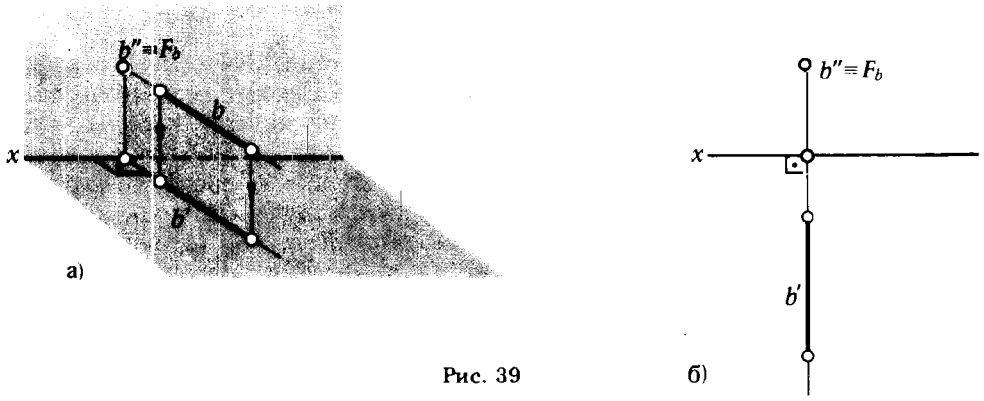


Рис. 39

1. *Горизонтально проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции:* $a \perp \pi_1$.

Такая прямая проецируется на плоскость π_1 в точку; ее фронтальная проекция перпендикулярна оси x (рис. 38,*а* и *б*): a' — точка, a'' — прямая $\perp x$.

2. *Фронтально проецирующая прямая — прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции:* $b \perp \pi_2$.

Эта прямая проецируется на плоскость π_2 в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси x (рис. 39,*а* и *б*): b'' — точка, b' — прямая $\perp x$. Прямые a и b являются частными случаями соответственно фронтали и горизонтали.

В. *Прямая, принадлежащая плоскости проекции.*

Характерным признаком для эпюра, на котором изображена такая прямая, будет принадлежность одной из проекций прямой оси.

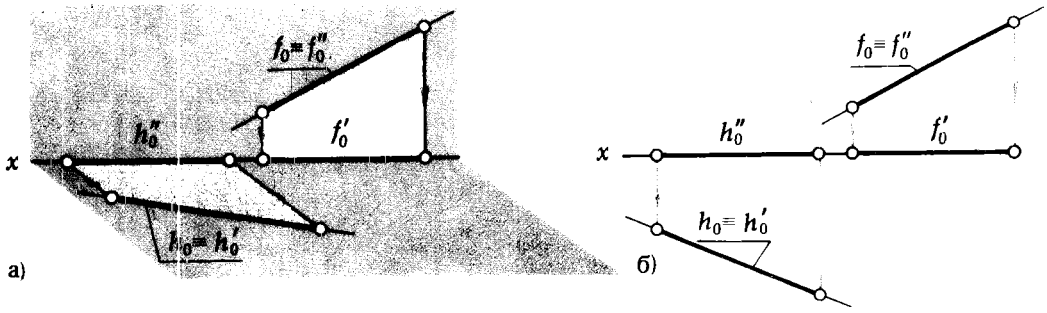


Рис. 40

На рис. 40,*а* и *б* показаны проекции прямых h_0 и f_0. Прямая h_0 принадлежит горизонтальной плоскости проекции: $h_0 \subset \pi_1$. Прямая f_0 принадлежит фронтальной плоскости проекции: $f_0 \subset \pi_2$. Прямые h_0 и f_0 являются нулевыми горизонталью и фронталью.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПЛОСКОСТИ

Плоскость является простейшей поверхностью. Положение плоскости в пространстве однозначно определяется тремя различными точками A, B, C, не принадлежащими одной прямой. Поэтому для задания плоскости на эпюре Монжа достаточно указать проекции:

а) трех различных, не принадлежащих одной прямой точек (рис. 41,*а*);

б) прямой и не принадлежащей ей точки (рис. 41,*б*);

в) двух прямых, пересекающихся в собственной (рис. 41,*в*) или несобственной (рис. 41,*г*) точке.

Плоскость может быть задана также проекциями отсека плоской фигуры Ф (рис. 41,*д*). В некоторых случаях бывает целесообразным задавать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекции. Такой вариант задания плоскости называют **заданием плоскости следами**. На рис. 42,*а* показана плоскость α. Эта плоскость пересекает ось проекции в точке X_α, а плоскости проекции по прямым $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$. Прямую, по которой плоскость пересекает плоскость проекции, называют **следом плоскости**. При этом различают:

$h_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_1$ — *горизонтальный след плоскости* α;

$f_{0\alpha} = \alpha \cap \pi_2$ — *фронтальный след плоскости* α.

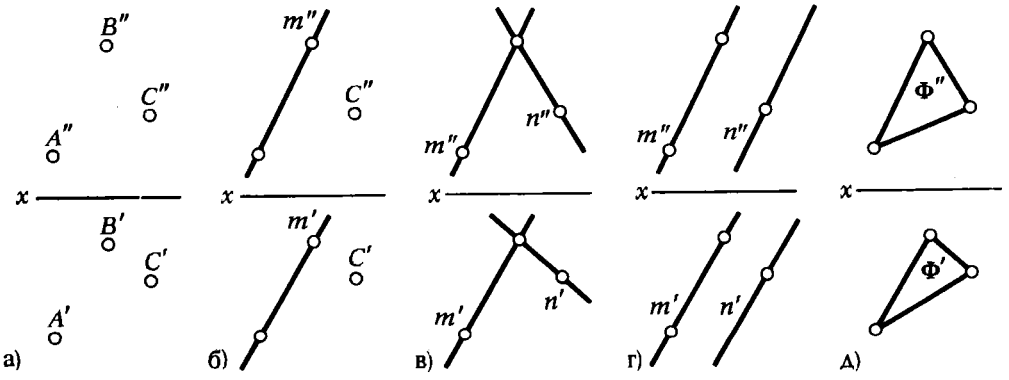


Рис. 41

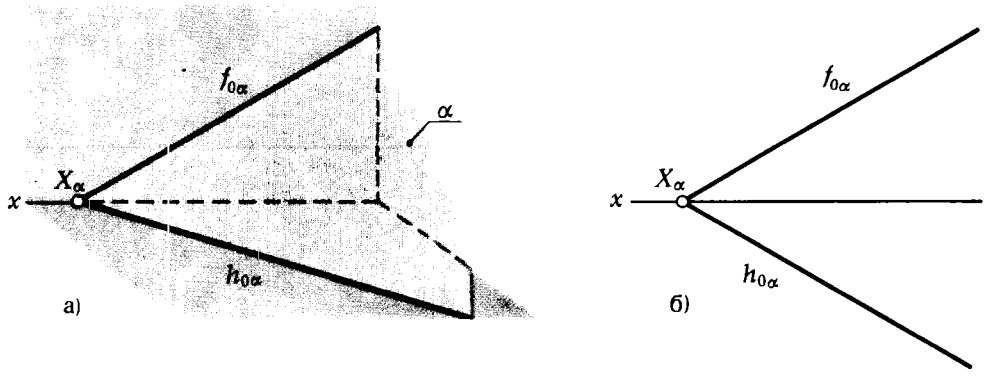


Рис. 42

Точку $X_\alpha = x \cap \alpha$ пересечения оси x с плоскостью α называют **точкой схода следов** (в этой точке сходятся два следа).

На рис. 42,*б* показано задание плоскости следами. Сопоставляя между собой наглядное изображение (рис. 42,*а*) и его плоскостную модель — эпюр Монжа (рис. 42,*б*), мы видим, что задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими вариантами ее изображения на эпюре:

во-первых, сохраняется наглядность изображения, что позволяет легко представить положение плоскости в пространстве;

во-вторых, при задании плоскости следами требуется указать только две прямые вместо четырех (см. рис. 41,*в, г*) или шести (см. рис. 41,*д*).

Показанная на рис. 42 плоскость α занимает общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций — произвольные, но отличные от 0 и 90°). Такая плоскость называется *плоскостью общего положения*.

Из рис. 42,*б* видно, что на эпюре Монжа следы плоскости общего положения составляют с осью проекции также произвольные углы.

Частные случаи расположения плоскости

Кроме рассмотренного общего случая (см. рис. 42), плоскость по отношению к плоскостям проекций может занимать следующие частные положения:

А. Перпендикулярное к плоскости проекции.

Б. Параллельное плоскости проекции.

Рассмотрим эти случаи.

А. *Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекции.* Такие плоскости называют *проецирующими*, при этом различают:

1. *Горизонтально проецирующую плоскость* $\beta \perp \pi_1$.

2. *Фронтально проецирующую плоскость* $\gamma \perp \pi_2$.

Рис. 43, 44 дают наглядное представление о проецирующих плоскостях и их задании на эпюре Монжа, причем плоскость β задана следами, γ — параллельными прямыми (m и n).

Б. *Плоскость, параллельная плоскости проекции.*

Эти плоскости называют плоскостями уровня, причем *плоскость* $\delta \parallel \pi_1$ *называют горизонтальной*, а *плоскость* $\epsilon \parallel \pi_2$ — *фронтальной*. Рис. 45,*а* дает представление о горизонтальной плоскости δ, а на рис. 46,*а* показана фронтальная плоскость ϵ. На рис. 45,*б* и 46,*б* эти плоскости заданы на эпюре Монжа.

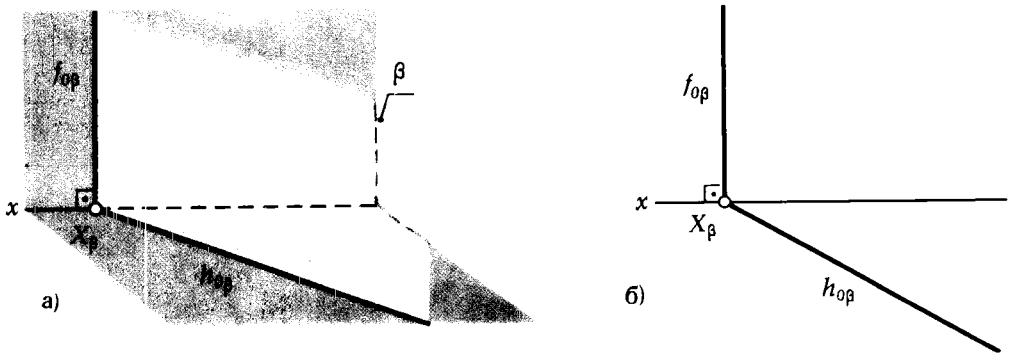


Рис. 43

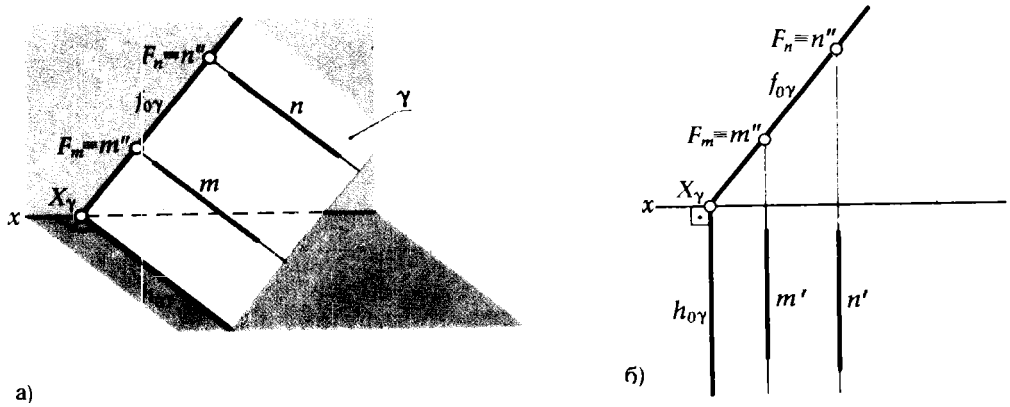


Рис. 44

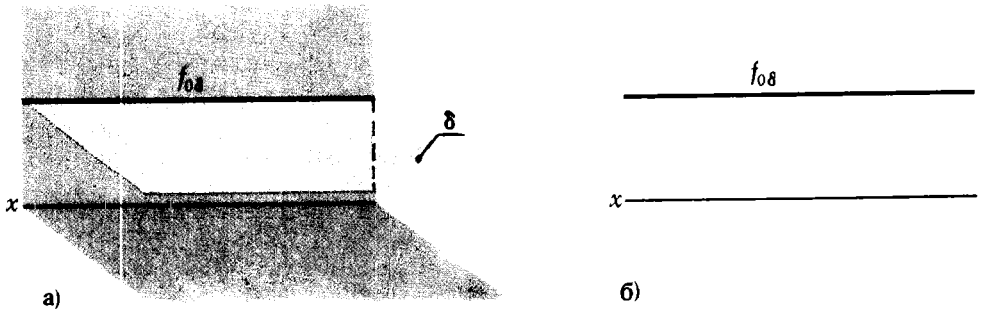


Рис. 45

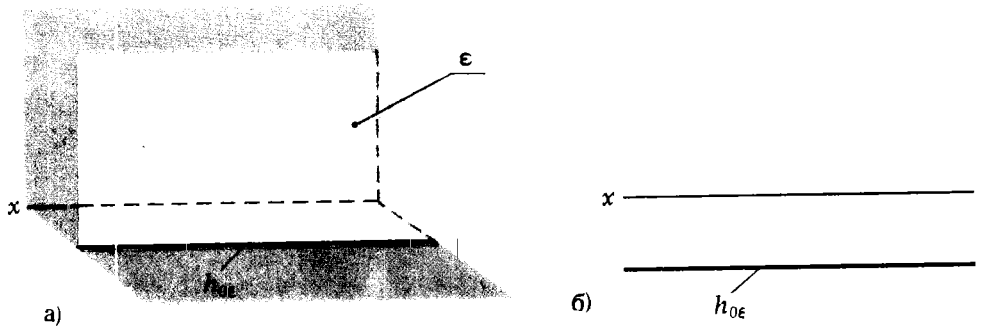


Рис. 46.

Главные линии плоскости

Главными линиями плоскости называют:

1. *Горизонталь — прямую, принадлежащую плоскости и параллельную горизонтальной плоскости проекции.*

2. *Фронталь — прямую, принадлежащую плоскости и параллельную фронтальной плоскости проекции.*

3. *Линию наибольшего наклона — прямую, принадлежащую плоскости и перпендикулярную к горизонтали или фронтали этой плоскости.*

На рис. 47,*а* показаны горизонталь h и фронталь f плоскости α. Рис. 47,*б* и *в* иллюстрируют задание этих линий на эпюре Монжа. Из рис. 47,*б*, *в* видно, что горизонталь плоскости параллельна ее горизонтальному, а фронталь — фронтальному следу.

Характерные особенности проекций горизонтали и фронтали приведены ниже:

	Проекция: горизонтальная	Проекция: фронтальная
Горизонталь	Параллельна $h_{0\alpha}$	Параллельна оси x
Фронталь	Параллельна оси x	Параллельна $f_{0\alpha}$

Представление о линии наибольшего наклона плоскости дает рис. 48, на котором показана прямая c — линия наибольшего наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекции. В некоторых учебниках ее называют также линией наибольшего ската.

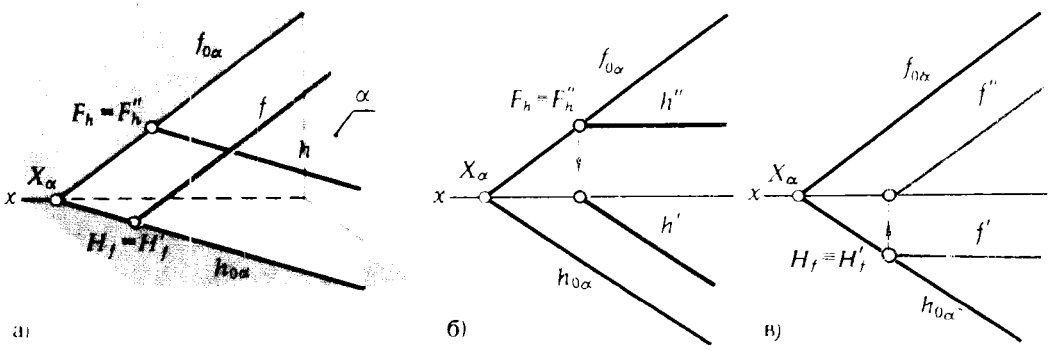


Рис. 47

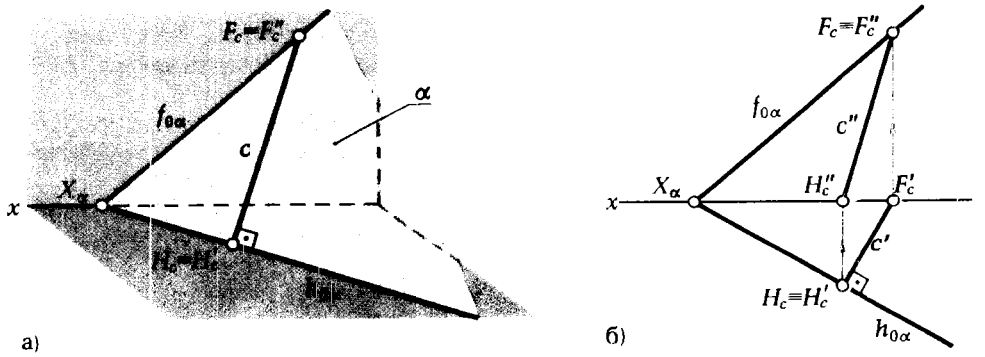


Рис. 48

Отличительной особенностью линии наибольшего наклона прямой к плоскости π_1 является перпендикулярность ее горизонтальной проекции горизонтали h' плоскости α или ее горизонтальному следу $h_{0\alpha}$.

У прямой d — линии наибольшего наклона плоскости α к плоскости проекции π_2 — фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости f' или ее фронтальному следу $f_{0\alpha}$. Рис. 48,*а* показывает прямую c — линию наибольшего ската плоскости α; на рис. 48,*б* эта линия задана на эпюре Монжа. На рис. 49 показана прямая d — линия наибольшего наклона плоскости β ($a \parallel b$) к плоскости проекции π_2. Так как плоскость β задана параллельными прямыми и направление фронтального следа плоскости $f_{0\beta}$ нам не известно, то для определения направления фронтальной проекции прямой d необходимо построить фронтальный след плоскости $f_{0\beta}$ или фронтальную проекцию фронтали этой плоскости.

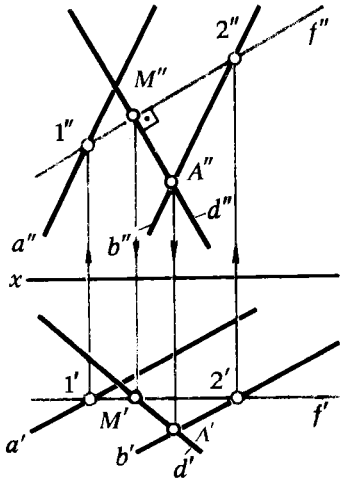


Рис. 49

На рис. 49 проведена фронталь f (f', f'') плоскости β (ее построение проще, чем определение фронтального следа плоскости β). Затем через произвольную точку A'' ($A \in \beta$) проведена фронтальная проекция d'' ($d'' \perp f''$). Отмечена точка $M'' = d'' \cap f''$. По A'' и M'' найдены A' и M'. Эти две точки указывают положение горизонтальной проекции прямой d' — линии наибольшего наклона плоскости β к плоскости проекции π_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Расстояние между двумя точками A и B определяется длиной отрезка прямой, заключенного между этими точками.

Из инвариантных свойств ортогонального проецирования следует, что ортогональная проекция отрезка будет конгруентна оригиналу лишь в том случае, когда он параллелен плоскости проекции (см. § 6, свойство 2д):

$$([AB] \parallel \pi_1) \Leftrightarrow [A'B'] \cong [AB].$$

Аналогично:

$$([AB] \parallel \pi_2) \Leftrightarrow [A''B''] \cong [AB].$$

Во всех остальных случаях отрезок проецируется на плоскость проекции с искажением. При этом ортогональная проекция отрезка всегда будет меньше его длины.

Для установления зависимости между длиной отрезка прямой и длиной его проекций рассмотрим рис. 50,*а*. В прямоугольной трапеции $ABB'A'$ (углы при вершинах A' и B' — прямые) боковыми сторонами являются отрезок AB и его горизонтальная проекция $A'B'$, а основаниями — отрезки AA' и BB', по величине равные удалениям концов A и B отрезка от горизонтальной плоскости проекции π_1.

Проводим в плоскости трапеции $ABB'A'$ через точку A прямую AB_1, параллельную горизонтальной проекции отрезка AB. Получим прямоугольный треугольник ABB_1, у которого катет $AB_1 \cong A'B'$, а катет BB_1 равен разности аппликат концов отрезка ($|BB'| - |AA'|$). Гипо-

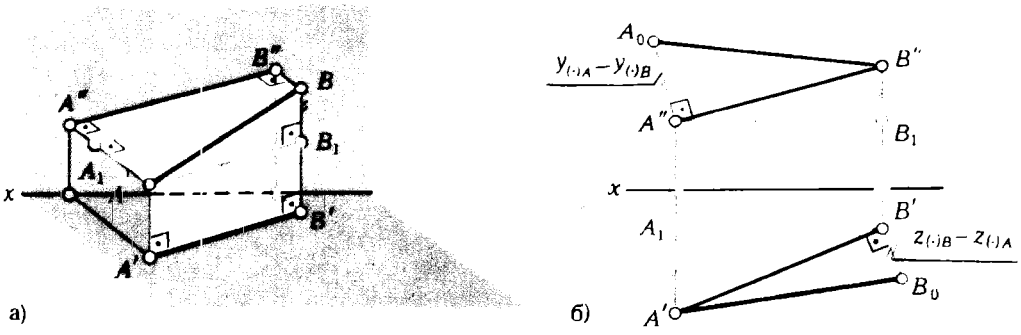


Рис. 50

тенуза этого треугольника равна длине отрезка AB.

$$|AB|^2 = |A'B'|^2 + (|BB'| - |AA'|)^2.$$

Зависимость между длиной отрезка и его фронтальной проекцией может быть установлена с помощью треугольника AA_1B, в котором гипотенуза равна длине отрезка, один из катетов — фронтальной проекции отрезка, а другой — разности удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекции:

$$|AB|^2 = |A''B''|^2 + (|AA''| - |BB''|)^2.$$

Приведенные примеры показывают, что для графического определения на эпюре Монжа длины отрезка достаточно построить прямоугольный треугольник, взяв за один его катет горизонтальную (фронтальную) проекцию отрезка, а за другой катет — разность удалений концов отрезка от горизонтальной (фронтальной) проекции.

На рис. 50,*б* показано определение действительной величины отрезка AB с помощью построения треугольника $A'B'B_0$. На этом же чертеже приведен второй вариант решения задачи — путем построения треугольника $A''B''A_0$ на базе фронтальной проекции отрезка.

Построение прямоугольного треугольника не единственный графический способ определения длины отрезка. В дальнейшем будут показаны различные способы преобразования ортогональных проекций, с помощью которых можно получить более экономичные решения.

С помощью прямоугольного треугольника можно решать задачу на построение на эпюре проекции отрезка наперед заданной длины.

ПРИМЕР. На прямой общего положения a отложить от точки A вправо отрезок длиной 25 мм (рис. 51).

РЕШЕНИЕ:

1. Отмечаем на прямой a произвольную точку 1 ($1'$, $1''$);
2. Определяем длину отрезка $[A1]$;
3. На прямой $(A'1_0)$ от точки A откладываем отрезок $A'B_0$ длиной 25 мм.
4. Из точки B_0 опускаем перпендикуляр на прямую a'. $[A'B']$ является горизонтальной проекцией отрезка заданной длины.

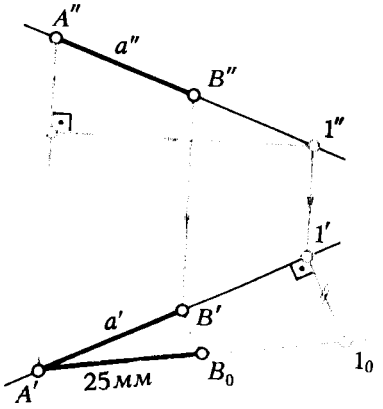


Рис. 51

При последующем изложении материала нам часто придется обращаться к параллельным прямым и плоскостям. В связи с этим целесообразно не только показать задание на эпюре Монжа точки, прямой, плоскости, но и выяснить условия, которые должны быть выполнены для изображения параллельных прямых, плоскостей, прямой и плоскости.

В расширенном евклидовом пространстве (пространстве, дополненном несобственными точками и прямыми) две прямые, прямая и плоскость, две плоскости всегда пересекаются. Различие по сравнению с обычным евклидовым пространством состоит лишь в том, что точка пересечения прямых или прямой и плоскости и прямая, являющаяся результатом пересечения двух плоскостей, могут быть как собственными, так и несобственными. В последнем случае прямые, прямая и плоскость, плоскости считаются параллельными.

Изображение на эпюре Монжа параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей базируется на инвариантном свойстве 2з (см. § 6) ортогонального проецирования.

1. Параллельные прямые.

Если $a \parallel b$, то $a \cap b$ в несобственной точке K_∞, следовательно, ее проекции K'_∞ и K''_∞ будут также несобственными. Поэтому $a' \parallel b'$ и $a'' \parallel b''$, т. е. у параллельных прямых параллельны их одноименные проекции.

2. Параллельность прямой и плоскости.

Если $a \cap \alpha = K_\infty$ — несобственная точка (иначе $a \parallel \alpha$), то ее проекции будут также несобственными точками K'_∞ и K''_∞. Поэтому $a' \parallel \alpha'$ и $a'' \parallel \alpha''$.

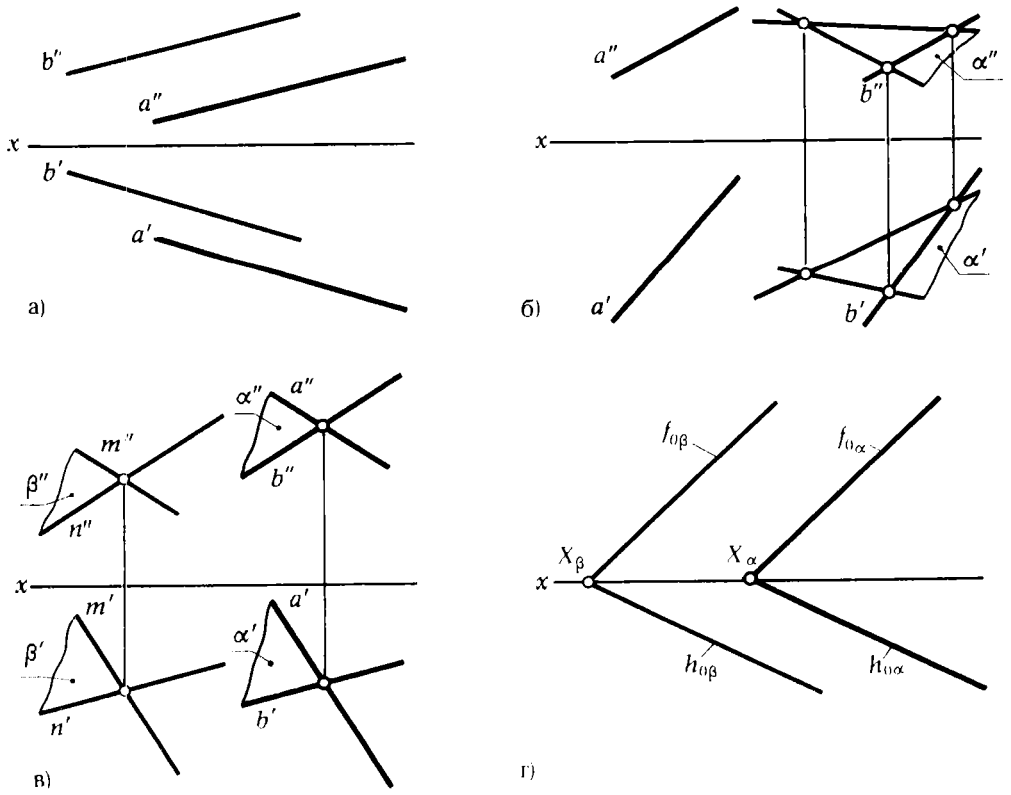


Рис. 52

Известно, что прямая, параллельная плоскости, должна быть параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости. Поэтому, чтобы задать на эпюре Монжа прямую a, параллельную плоскости α, необходимо и достаточно в плоскости α "взять" произвольную прямую b и провести $a \parallel b$ по правилу, изложенному в п. 1.

3. Параллельные плоскости.

Две плоскости параллельны, если в одной из них можно провести две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым другой плоскости. Поэтому, чтобы задать на эпюре Монжа плоскость $\alpha\,(a \cap b)$, параллельную плоскости $\beta\,(m \cap n)$, достаточно указать проекции пересекающихся прямых a и b, соответственно параллельных прямых m и n.

В частности, если плоскости заданы следами, то у параллельных плоскостей будут параллельны их одноименные следы. На рис. 52 показаны эпюры: параллельных прямых $a \parallel b$ (рис. 52,*а*); параллельных прямой a и плоскости α (рис. 52,*б*); параллельных плоскостей α и β (рис. 52,*в* и *г*). На рис. 52,*в* плоскость $\alpha\,(a \cap b)$, плоскость $\beta\,(m \cap n)$, на рис. 52,*г* плоскости заданы следами.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит реконструкция трехмерного евклидова пространства?
2. Что такое несобственные элементы пространства?
3. Сформулируйте основные отношения принадлежности между элементами евклидова пространства.
4. Перечислите основные способы метода проекции.
5. Какие преимущества присущи ортогональному проецированию по сравнению с косоугольным проецированием?
6. Укажите основные инвариантные свойства ортогонального проецирования.
7. Каким образом пространственная фигура из трех взаимно перпендикулярных плоскостей преобразуется в плоскую модель?
8. Какой октант имеет отрицательное направление всех осей?
9. Какими полами плоскостей проекций ограничены II, III, VI, VII октанты?
10. Как обозначаются проекции точки, прямой, плоскости на плоскостях проекций?
11. Как по отношению к осям проекций располагаются проекции точек, находящихся в I, II, III, ... , VIII октантах?
12. Какие знаки имеют координаты x, y, z точки, находящейся в I, II, III, ... , VIII октанте?
13. Какие координаты на эпюре определяют горизонтальную и фронтальную проекции точки?
14. В каких октантах значения координат точки отрицательны, в каких положительны?
15. Как определить положение третьей проекции точки на безосном чертеже, если известны две ее проекции и три проекции другой точки?
16. Дайте определение и способы нахождения следов прямой и плоскости.
17. Какие линии плоскости называются главными, перечислите характерные особенности проекций этих линий на эпюре Монжа.
18. Какие прямые и плоскости называются проецирующими, в чем состоит отличительная особенность их ортогональных проекций?

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Трудоемкость и, как следствие, точность графического решения задач часто зависят не только от сложности задач, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры, входящие в условия задачи, по отношению к плоскостям проекций.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

ПРИМЕР 1. Требуется определить точку пересечения ("встречи") линии l с плоскостью α (рис. 53).

Так как и линия l, и плоскость α занимают произвольное положение как по отношению друг к другу, так и относительно плоскостей проекций, то ответить на поставленный вопрос непосредственно по пространственному изображению или по ортогональным проекциям (эпюру Монжа) без дополнительных графических построений не представляется возможным.

В то же время ситуация, заданная на рис. 54,а, позволяет сразу, без каких-либо дополнительных построений, получить ответ.

Для решения задачи используем инвариантное свойство 2г (см. § 6).

Точка K, в которой линия l пересекает плоскость α, как принадлежащая горизонтально проецирующей плоскости, будет иметь горизонтальную проекцию K' на горизонтальном следе плоскости $h_{0\alpha}$: $K' = l' \cap h_{0\alpha}$. Зная положение K', определяем K''.

На рис. 54,б приведено решение этой задачи на эпюре Монжа.

ПРИМЕР 2. Определить длины сторон ΔABC и величины углов при его вершинах.

Очевидно, если плоскость ΔABC (плоскость α) занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций (рис. 55), или перпендикулярное к какой-либо плоскости (рис. 56), то для решения поставленной задачи необходимо выполнить определенные графические построения. В то же время ответ на поставленные вопросы может быть получен без каких-либо графических построений непосредственно из ортогональных проекций, если плоскость ΔABC параллельна плоскости проекции (рис. 57,а,б). Это утверждение базируется на инвариантном свойстве 2д (см. § 6).

Приведенные примеры показывают, что проецируемая фигура может занимать по отношению к плоскости проекции или произвольное, или частное положение. В первом случае, как правило, получаются проекции, неудобные для решения задач. В то же время решение задачи значительно упрощается, когда мы имеем дело с частным расположением геометрических фигур относительно плоскости проекции (см. рис. 54 и 57). Наиболее выгодным частным положением проецируемой фигуры (в случае ортогонального проецирования), при котором получаются проекции фигуры, удобные для решения задач, следует считать:

а) положение, ***перпендикулярное*** к плоскости проекции, — при решении позиционных задач (см. рис. 54)*;

---

* Определения и деление задач на позиционные и метрические см. в гл. V и VI.

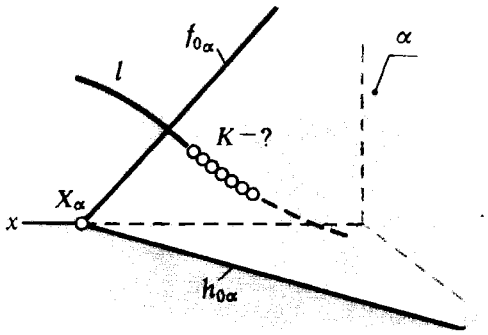
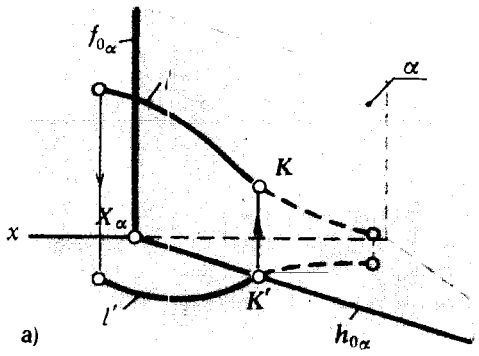


Рис. 53



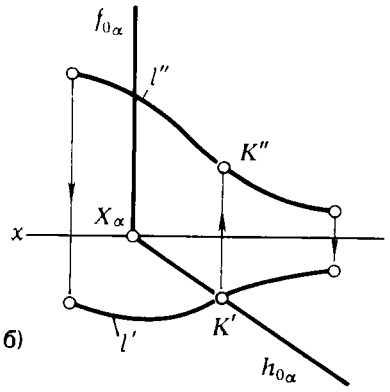


Рис. 54

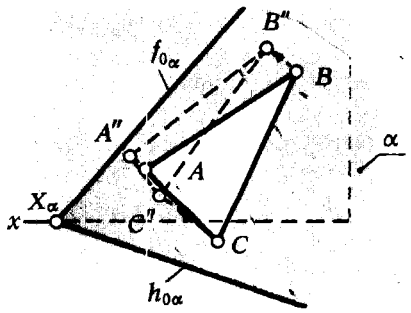


Рис. 55

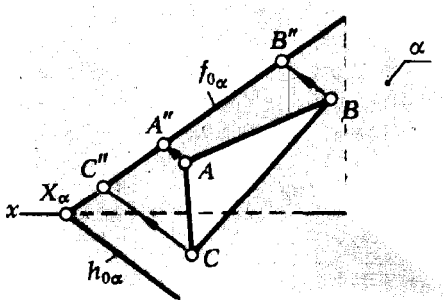
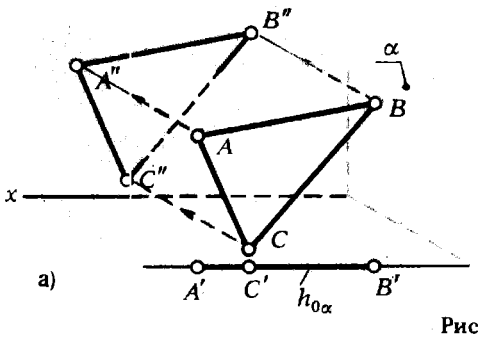


Рис. 56



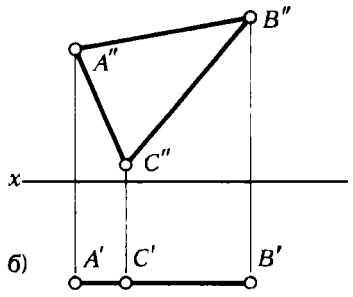


Рис. 57

б) положение, *параллельное* плоскости проекции, — для решения метрических задач (см. рис. 57).

В связи с этим, естественно, возникает вопрос, каким путем можно получить удобные проекции для решения поставленной задачи по заданным неудобным ортогональным проекциям?

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществить изменением взаимного положения проецируемой фигуры и плоскости проекции. При ортогональном проецировании это может быть достигнуто двумя путями:

во-первых, перемещением в пространстве проецируемой фигуры так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения в пространстве;

во-вторых, выбором новой плоскости проекции, по отношению к которой проецируемая фигура, не меняющая своего положения в пространстве, окажется в частном положении.

Первый путь лежит в основе способа *плоскопараллельного перемещения;* второй — составляет теоретическую базу способа *замены плоскостей проекций.* Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

I. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций способом плоскопараллельного перемещения осуществляется путем перемещения геометрической фигуры в новое положение так, чтобы траектории перемещения ее точек находились в параллельных плоскостях.

В зависимости от положения этих плоскостей по отношению к плоскостям проекций и вида кривой (траектории перемещения точки) различают несколько способов плоскопараллельного перемещения:

1. Способ параллельного перемещения.

Плоскости — носители траекторий перемещения точек параллельны плоскости проекции. Траектория — произвольная плоская линия.

2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции.

Плоскости — носители траекторий перемещения точек параллельны плоскости проекции. Траектории — дуги окружностей, центры которых находятся на оси, перпендикулярной плоскости проекции.

3. Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекции (вращение вокруг линий уровня).

4. Способ вращения вокруг оси, принадлежащей плоскости проекции (вращение вокруг следа плоскости).

Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

§ 9. СПОСОБ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Для параллельного перемещения (переноса) справедливо утверждение, которое может быть выражено в виде следующей теоремы:

при параллельном переносе геометрической фигуры относительно плоскости проекции проекция фигуры на эту плоскость хотя и ме-

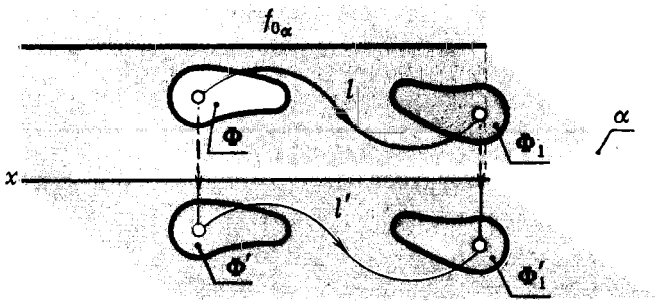


Рис. 58

няет свое положение, но остается конгруентной проекции фигуры в ее исходном положении.

Докажем эту теорему для случая, когда проецируемая фигура плоская и ее плоскость принадлежит плоскости уровня $\Phi \subset \alpha$, плоскость $\alpha \parallel \pi_1$ (рис. 58). В этом случае на основании инвариантного свойства 2д (см. § 6) горизонтальная проекция Φ' будет конгруентна самой фигуре Φ ($\Phi' \cong \Phi$).

При перемещении фигуры Φ в новое положение Φ_1 фигура Φ_1 будет конгруентна Φ, так как:

а) расстояние между точками фигуры не меняется;

б) в процессе перемещения фигура Φ все время остается в плоскости α.

В силу параллельности плоскостей α и π_1 $\Phi_1' \cong \Phi_1$, но $\Phi_1 \cong \Phi$, а $\Phi \cong \Phi'$, следовательно, $\Phi_1' \cong \Phi'$. Доказанная теорема будет справедлива и в случае, когда геометрическая фигура занимает произвольное положение относительно плоскости проекции.

Отметим еще два свойства параллельного перемещения:

1. При всяком перемещении точки в плоскости, параллельной плоскости проекции π_1, ее фронтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

2. В случае произвольного перемещения точки в плоскости, параллельной π_2, ее горизонтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

Справедливость отмеченных свойств может быть легко показана на простом примере.

Возьмем плоскость α, параллельную горизонтальной плоскости проекции π_1 (рис. 59). Пусть точка $A \in \alpha$ переместится из положения A в A_1 ($A \to A_1$), двигаясь в плоскости α по произвольной траектории (l_1, l_2 или l_3). Очевидно, фронтальная проекция точки A'' переместится в A_1'', при этом $[A''A_1'']$ принадлежит следу $f_{0\alpha}$, который параллелен оси x ($[A''A_1''] \subset f_{0\alpha} \parallel x$).

На рис. 59,*б* показано перемещение точки $B \in \beta \parallel \pi_2$. Из чертежа видно, что горизонтальная проекция траектории перемещения точки B из первоначального положения в новое B_1 представляет $[B'B_1'] \subset h_{0\beta} \parallel x$ и не зависит от вида линии — траектории перемещения точки из положения B в B_1.

Пользуясь приведенной теоремой и отмеченными своиствами, легко построить новые проекции геометрической фигуры по заданным ее ортогональным проекциям, и, в частности, такие ее проекции, которые

соответствуют отмеченным выше (см. с. 48) частным положениям проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции.

Проследим на примерах использование способа параллельного перемещения для перевода произвольно расположенной геометрической фигуры в частное положение.

ПРИМЕР 1. $[AB]$ прямой общего положения a перевести в положение, параллельное плоскости π_2 (рис. 60).

У $[AB]$, параллельного плоскости π_2, горизонтальная проекция должна быть параллельна оси x. Поэтому переводим $[A'B']$ в новое положение $[A'_1B'_1]$, параллельное оси x. Перемещение отрезка в новое положение осуществляем так, чтобы любые его точки двигались в плоскостях, параллельных плоскости π_1. При таком перемещении новая горизонтальная проекция конгруентна исходной $[A'_1B'_1] \cong [A'B']$ (на основании теоремы с. 49).

Фронтальные проекции точек отрезка $[A''B'']$ будут перемещаться в новое положение по прямым, параллельным оси x (свойство 1, с. 49).

На рис. 60 графические построения выполнены в указанной ниже последовательности:

1) через произвольную точку A'_1 провели прямую a'_1, параллельную оси x;

2) отложили на ней от точки A'_1 отрезок $[A'_1B'_1] \cong [A'B']$;

3) из точек A'_1 и B'_1 восставили перпендикуляры к оси x и нашли точки пересечения их с соответствующими горизонтальными прямыми, проведенными через точки A'' и B''.

Полученные точки A''_1, B''_1 являются концами фронтальной проекции отрезка $[A_1B_1]$, параллельного плоскости π_2.

Для перевода отрезка прямой, произвольно расположенной в пространстве, в положение, параллельное плоскости π_2, потребовалось выполнить только одно перемещение отрезка параллельно плоскости проекции. Для перевода отрезка из общего положения в проецирую-

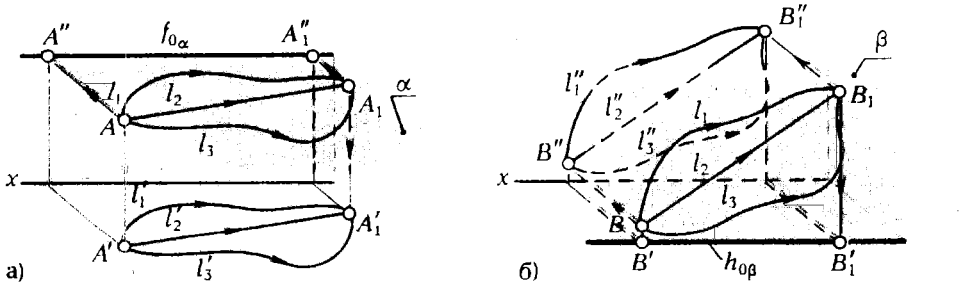


Рис. 59

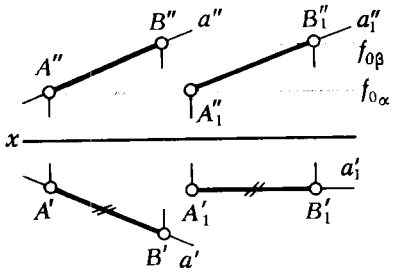


Рис. 60

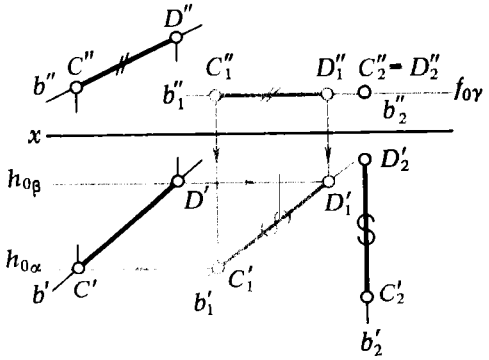


Рис. 61

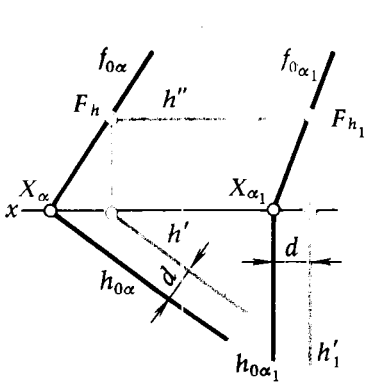


Рис. 62

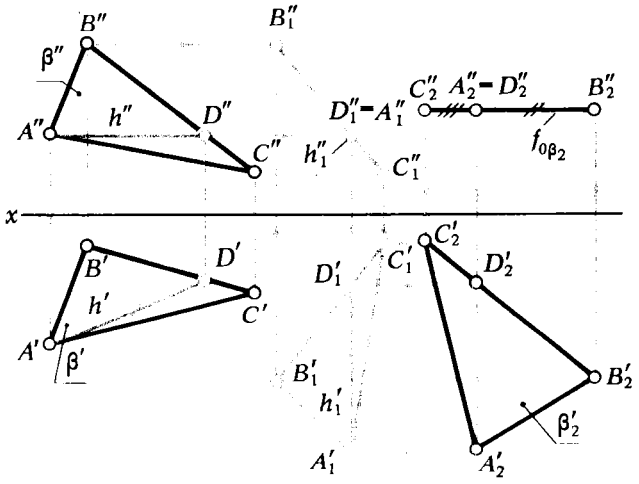


Рис. 63

щее необходимо последовательно выполнить два его перемещения параллельно плоскостям проекции: вначале перевести отрезок в положение, параллельное плоскости π_1 (или π_2) путем перемещения параллельно плоскости π_2 (или π_1), затем перевести отрезок в положение, перпендикулярное π_2 (или π_1).

ПРИМЕР 2. $[CD]$ прямой общего положения b перевести в положение $\perp \pi_2$ (рис. 61).

На рис. 61 $[CD]$ вначале переведен в положение $\| \pi_1$ ($[C_1D_1]$), затем перемещением параллельно плоскости π_1 — в положение $\perp \pi_2$ ($[C_2D_2]$).

Зная характер геометрических построений, которые необходимо выполнить для перемещения отрезка из общего положения в проецирующее, можно легко перевести плоскость, произвольно расположенную в пространстве, в частное положение (параллельное или перпендикулярное плоскости проекции).

На рис. 62 показан перевод плоскости общего положения α ($h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$) в новое α_1 ($h_{0\alpha_1}$, $f_{0\alpha_1}$), при этом $\alpha_1 \perp \pi_2$.

Как видно из чертежа, перевод плоскости α в положение α_1 осуществлен с помощью горизонтали h, которая переведена в положение $h_1 \perp \pi_2$, поэтому и $\alpha_1 \perp \pi_2$. Следует обратить внимание на то, что расстояние d остается постоянным:

$$|h_{0\alpha}h'| = |h_{0\alpha_1}h'_1|.$$

Рис. 63 дает представление о преобразовании ортогональных проекций ΔABC, определяющего плоскость общего положения β, в проекции $\Delta A_2B_2C_2$, задающего плоскость $\beta_2 \| \pi_1$.

Геометрические построения выполнены в последовательности, указанной индексами, поставленными у проекций точек справа внизу. Выполненные на эпюре построения соответствуют перемещению плоскости в пространстве вначале $\| \pi_1$ во фронтально-проецирующее положение ($\Delta A_1B_1C_1$), затем перемещением $\| \pi_2$ плоскость треугольника переведена в положение $\| \pi_1$ ($\Delta A_2B_2C_2$).

§ 10. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции, является частным случаем параллельного перемещения. Отличие от общего случая состоит лишь в том, что за траекторию перемещения точки берется не произвольная линия, а дуга окружности, центр которой находится на оси вращения, а радиус равен расстоянию между точкой и осью вращения.

Проследим, как будет изменяться положение точки A при ее вращении вокруг оси i, перпендикулярной плоскости π_2 (рис. 64). Точка A перемещается по дуге окружности в плоскости α ($\alpha \perp i$ и, следовательно, $\alpha \parallel \pi_2$), поэтому эта окружность проецируется на плоскость π_2 без искажения, а на плоскость π_1 — в отрезок прямой, параллельной оси x (рис. 64,*б*).

Таким образом, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекции, фронтальная проекция точки перемещается по окружности с центром на фронтальной проекции оси вращения, а горизонтальная — по прямой, параллельной оси x.

Вращение точки вокруг оси $i \perp \pi_1$ иллюстрирует рис. 65,*а*. Точка B перемещается в новое положение B_1 по окружности, принадлежащей

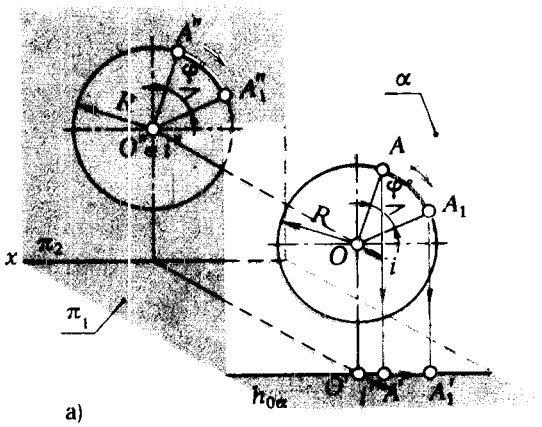


Рис. 64

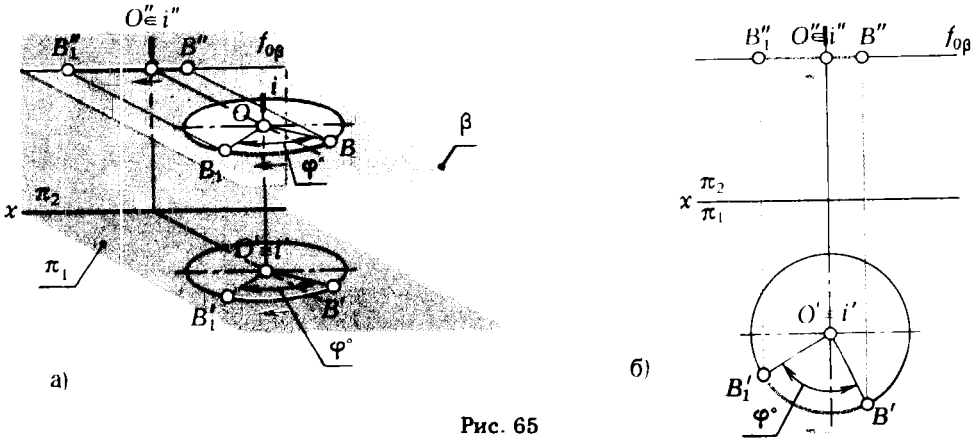


Рис. 65

плоскости $\beta \perp i$. Так как $i \perp \pi_1$, то $\beta \parallel \pi_1$. Поэтому при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекции, ее горизонтальная проекция перемещается по окружности, центр которой принадлежит горизонтальной проекции оси вращения, а фронтальная проекция точки — по прямой, параллельной оси x (рис. 65,*б*).

Выяснив характер проекций траекторий перемещения точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции, легко осуществить перемещение любой геометрической фигуры из заданного положения в частное путем ее поворота вокруг оси $i \perp \pi_1$ (или π_2).

В качестве примера покажем на эпюре Монжа, как осуществляется перемещение отрезка произвольной прямой в частное положение путем вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. $[AB]$ прямой общего положения a перевести в положение, параллельное π_2 (рис. 66).

Чтобы осуществить такое перемещение, достаточно повернуть $[AB]$ вокруг оси $i \perp \pi_1$ на $\angle\varphi^\circ$.

Величину угла $\widehat{\varphi}^\circ$ выбирают такой, чтобы после поворота $[A'_1B'_1]$ занял положение $\parallel$ оси x.

Так как точка B принадлежит оси вращения, то она не будет менять своего положения в процессе преобразования. $B_1 \equiv B$, следовательно, $B'_1 \equiv B'$ и $B''_1 \equiv B''$. Для нахождения точки A''_1 необходимо из A'_1 восставить перпендикуляр к оси x и отметить точку его пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через A''.

ПРИМЕР 2. $[CD]$ прямой общего положения b перевести в положение $\perp \pi_2$ (рис. 67).

Чтобы осуществить перемещение отрезка из общего положения в проецирующее, необходимо последовательно выполнить два вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций.

После первого вращения отрезок переводится в положение, параллельное плоскости π_1 (или π_2), и лишь после этого вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции π_1 (или π_2) перемещают отрезок в положение, перпендикулярное плоскости π_2 (или π_1).

На рис. 67 $[CD]$ вначале вращением вокруг $i_1 \perp \pi_2$ переведен в положение $\parallel \pi_1$ ($[C'_1D''_1] \parallel x$), затем вращением вокруг $i_2 \perp \pi_1$ $[C_1D_1]$ перемещен во фронтально проецирующее положение ($[C'_2D'_2] \perp x$)*.

---

* Для упрощения геометрических построений здесь, как и во всех других случаях использования способа вращения, ось вращения следует выбирать так, чтобы она пересекала вращаемую прямую.

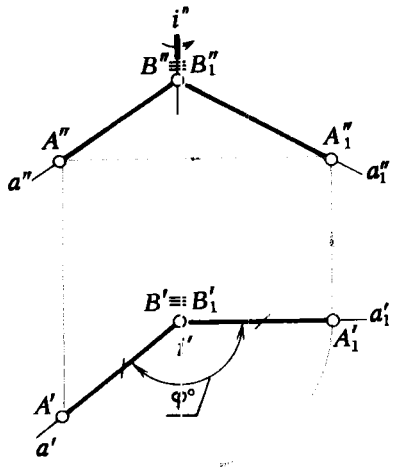


Рис. 66

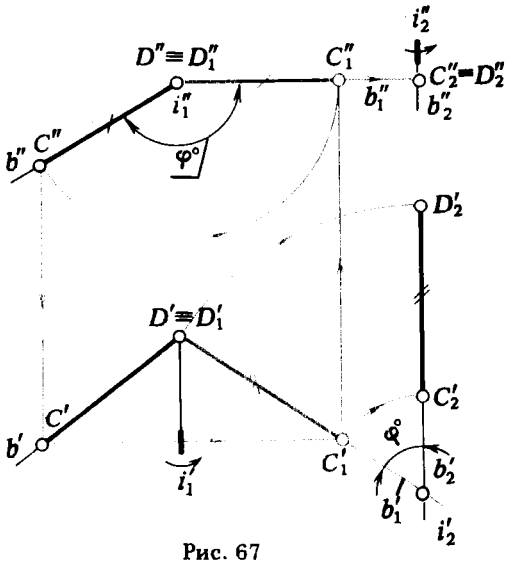


Рис. 67

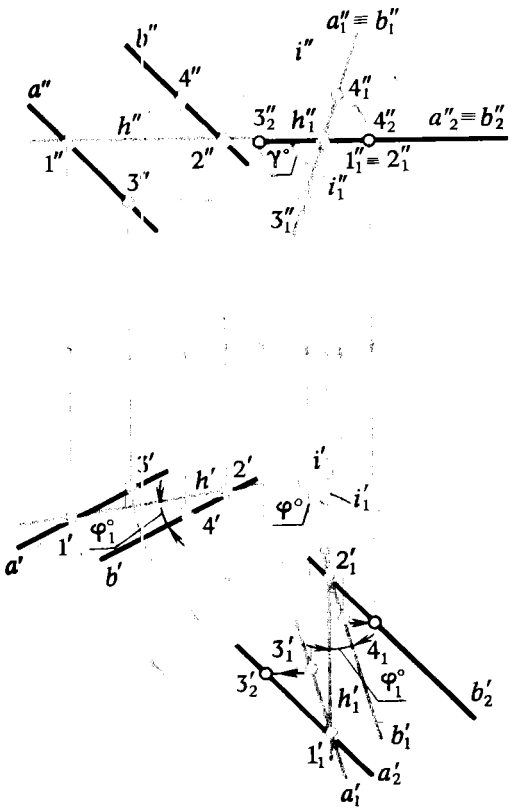


Рис. 68

В случае перевода плоскости общего положения в частное задача решается аналогично только что рассмотренным примерам.

Чтобы плоскость, произвольно расположенная в пространстве, заняла проецирующее положение, достаточно вращением перевести прямую, принадлежащую этой плоскости, в положение, перпендикулярное плоскости проекции. Количество графических построений, которые необходимо выполнить для такого перемещения, может быть сокращено, если взять не произвольную прямую, а горизонталь или фронталь плоскости. Уменьшение графических построений в этом случае происходит благодаря тому, что перевод горизонтали или фронтали в проецирующее положение можно осуществить за один поворот, а не за два, как это пришлось бы делать, если поворачивать прямую общего положения.

На рис. 68 плоскость общего положения α, заданная параллельными прямыми a и b, поворотом вокруг оси $i \perp \pi_1$ переведена во фронтально проецирующее положение. Новые проекции прямых a_1 и b_1 найдены с помощью горизонтали h.

Геометрические построения, приведенные на рис. 68, выполняем в следующем порядке:

1. В плоскости α проводим горизонталь h (h', h'').

2. Вращением вокруг оси i, проходящей через горизонталь h и перпендикулярную плоскости π_1, переводим h (h', h'') в положение h_1 $(h'_1, h''_1) \perp \pi_2$.

3. При повороте горизонтали на $\angle \varphi°$ на такой же угол повернется все множество точек этой плоскости, поэтому для определения нового положения проекций прямых a_1 и b_1 достаточно повернуть вокруг оси i точки $1, 3$ и $2, 4$ $(3 \in a, 4 \in b)$ на тот же $\angle \varphi°$*.

4. По горизонтальным проекциям $1'_1$, $3'_1$ и $2'_1$, $4'_1$ определяем их фронтальные проекции.

Если необходимо перевести плоскость в положение $\parallel \pi_1$, то это легко сделать, повернув фронтальные проекции прямых a'_1 и b'_1 вокруг оси $i_1 \perp \pi_2$ на угол $\gamma°$ так, чтобы a''_2 и b''_2 заняли положение, параллельное оси x.

---

* Новое положение a'_1 и b'_1 можно определить и иначе: через $1'_1$ и $2'_1$ провести прямые a'_1 и b'_1, составляющие с прямой h'_1 такой же угол, какой a' и b' составляют с h'.

§ 11. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ (ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИИ УРОВНЯ)

Эффективным приемом, упрощающим решение задач, связанных с определением метрических характеристик плоских фигур, является способ вращения этих фигур вокруг их линий уровня. Путем такого вращения можно плоскость, которой принадлежит рассматриваемая фигура, повернуть в положение, параллельное плоскости проекции. В этом случае ортогональная проекция любой принадлежащей плоскости фигуры будет конгруентна оригиналу и, следовательно, позволит определить все метрические характеристики проецируемой фигуры непосредственно по ее проекции без каких-либо дополнительных построений.

Очевидно, вращая плоскость вокруг горизонтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости π_1, и получить неискаженный вид горизонтальной проекции. Вращение плоскости вокруг фронтали позволяет перевести ее в положение, параллельное плоскости π_2, что обеспечит получение неискаженного вида фронтальной проекции.

Каждая точка плоскости при ее вращении перемещается по окружности, принадлежащей плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Центр окружности будет находиться на оси вращения, а величина радиуса вращения равна расстоянию от точки до оси вращения. Если за ось вращения взята горизонталь, то окружность, представляющая траекторию движения точки, будет проецироваться на плоскость π_1 в отрезок прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали. На плоскость π_2 окружность проецируется в эллипс, построение которого можно не делать. Точка пересечения горизонтальных проекций горизонтали и горизонтальной проекции окружности определяет горизонтальную проекцию центра вращения.

Аналогично, при вращении плоскости вокруг фронтали любая точка, принадлежащая плоскости, перемещается по окружности, которая проецируется на плоскость π_2 в отрезок прямой, перпендикулярной фронтальной проекции фронтали. Фронтальная проекция центра вращения определяется пересечением фронтальных проекций фронтали и окружности.

Вращение точки вокруг горизонтали показано на рис. 69. Точка A при вращении вокруг горизонтали h будет перемещаться по окружности c, плоскость которой β перпендикулярна оси вращения h. Чтобы переместить точку в новое положение путем поворота ее вокруг h, необходимо найти положение центра вращения и определить величину радиуса вращения. Центр вращения O находится в точке пересечения оси вращения h с плоскостью β. Чтобы определить величину радиуса вращения OA, необходимо построить в плоскости π_1 прямоугольный $\Delta O'A'A_0^*$. Для этого принимаем горизонтальную проекцию $O'A'$ за катет прямоугольного треугольника; второй катет должен быть равен разности аппликат концов отрезка OA: $|z_{(\cdot)A} - z_{(\cdot)O}| = |A1|$. Гипотенуза $\Delta O'A'A_0$ $O'A_0 = R$. Новое, после поворота, положение точки A_1' находится в месте пересечения дуги окружности, проведенной из горизонтальной

---

* Величину отрезка $[OA]$ можно определить и другим путем, например, вращением его вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции; плоскопараллельным перемещением или, как это будет показано в § 13, с помощью замены плоскости проекции.

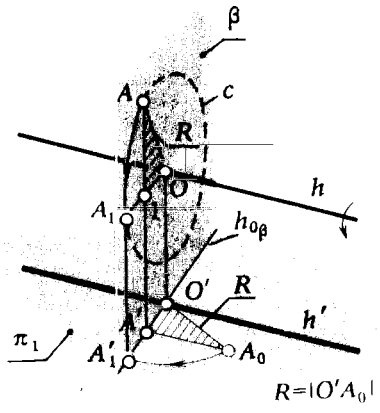


Рис. 69

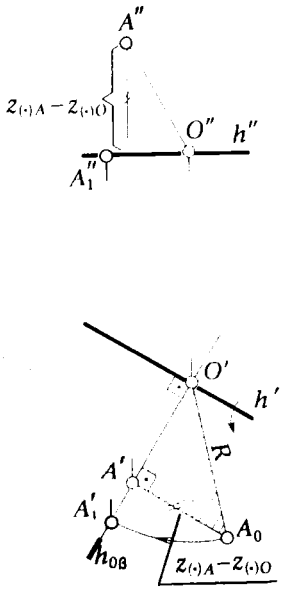


Рис. 70

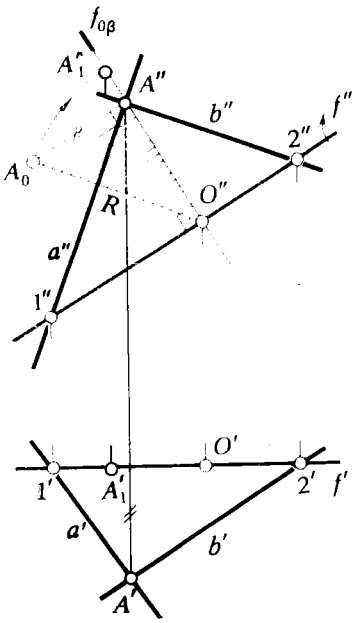


Рис. 71

проекции центра вращения O' радиусом, равным $|O'A_0|$, с горизонтальным следом $h_{0\beta}$ плоскости β.

На рис. 70 описанные выше построения выполнены на эпюре Монжа. Характер и последовательность геометрических построений, которые необходимо выполнить для перемещения плоскости, произвольно расположенной в пространстве, в положение, параллельное плоскости проекции π_2, вращением вокруг линии уровня, показаны на рис. 71, на котором плоскость α, заданная пересекающимися прямыми a и b, переведена вращением вокруг своей фронтали f в положение, параллельное плоскости π_2.

Плоскость α однозначно определяется также тремя точками *1*, *2* и *A*. Так как точки *1* и *2* принадлежат фронтали f, которая принята за ось вращения, то они не меняют своего положения в процессе преобразования. Поэтому, чтобы задать новое положение плоскости $\alpha_1 \parallel \pi_2$, достаточно осуществить поворот только одной точки *A*. Ниже приводится последовательность геометрических построений, которые необходимо выполнить для поворота точки *A*:

1) провести горизонтальную проекцию фронтали плоскости α — $f'(1', 2')$;

2) пользуясь точками $1'$, $2'$, найти точки $1''$, $2''$, определяющие фронтальную проекцию фронтали f'';

3) найти проекции центра вращения (O', O''), для чего через A'' провести прямую, перпендикулярную к f'', и отметить точку пересечения перпендикуляра с f'' — точку O'';

4) определить величину радиуса вращения, как гипотенузу прямоугольного треугольника $O''A''A_0$, у которого катет $A''A_0 = |y_{(\cdot)A} - y_{(\cdot)O}|$;

5) из центра O'' провести дугу радиусом $O''A_0$, точка пересечения которой с прямой $O''A''$ укажет положение A_1''.

Точка A_1 совместно с прямой f (точками *1*, *2*) определяет плоскость $\alpha_1 \parallel \pi_2$.

§ 12. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ОСИ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ (СОВМЕЩЕНИЕ)

Совмещение является частным случаем вращения плоскости вокруг горизонтали и фронтали. При совмещении за ось вращения принимается не произвольная горизонталь или фронталь плоскости, а ее горизонтальный или фронтальный след (нулевые горизонталь или фронталь). В этом случае в результате поворота плоскости она совпадает (совмещается) с плоскостью проекции π_1, если вращение осуществляется вокруг горизонтального следа плоскости, либо с π_2 при вращении вокруг ее фронтального следа.

Совмещение так же, как и вращение вокруг горизонтали или фронтали, применяется, когда требуется определить истинный вид фигур, принадлежащих плоскости, или построить в плоскости общего положения фигуру заданной формы и размеров.

Сущность способа совмещения можно уяснить из рассмотрения рис. 72,*а*. Плоскость общего положения α вращается вокруг следа $h_{0\alpha}$ до совпадения ее с горизонтальной плоскостью проекции. При этом преобразовании след $h_{0\alpha}$, как ось вращения, останется на месте. Поэтому для нахождения совмещенного положения плоскости достаточно найти совмещенное положение только одной принадлежащей ей точки (не лежащей на следе $h_{0\alpha}$).

В качестве такой точки целесообразно (для упрощения графических построений) взять точку A, принадлежащую фронтальному следу.

Точка A ($A'A''$) при вращении вокруг оси $h_{0\alpha}$ будет перемещаться по дуге окружности, принадлежащей плоскости β, перпендикулярной к оси вращения.

Графические построения, которые необходимо выполнить на эпюре Монжа для определения положения точки A, приведены на рис. 72,*а* (как видно из рисунка, они аналогичны построениям, выполненным на рис. 70). Совмещенное с плоскостью проекции положение фронтального следа $f_{0\alpha_1}$ определяется точками X_α и A'_1.

Следует иметь в виду, что любая геометрическая фигура плоскости α при ее совмещении с плоскостью проекции π_1 проецируется в конгруентную фигуру. Поэтому $[X_\alpha A'']$, указывающий расстояние от точки схода следов X_α до A'', принадлежащей фронтальному следу, конг-

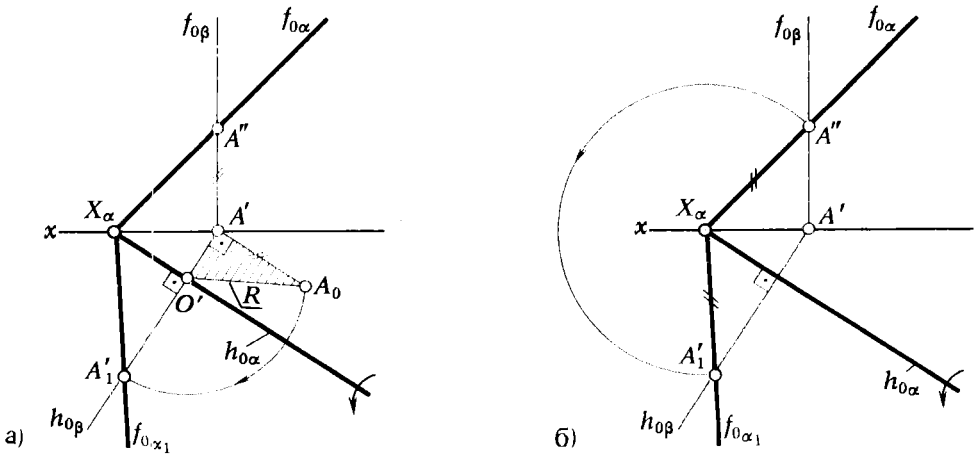


Рис. 72

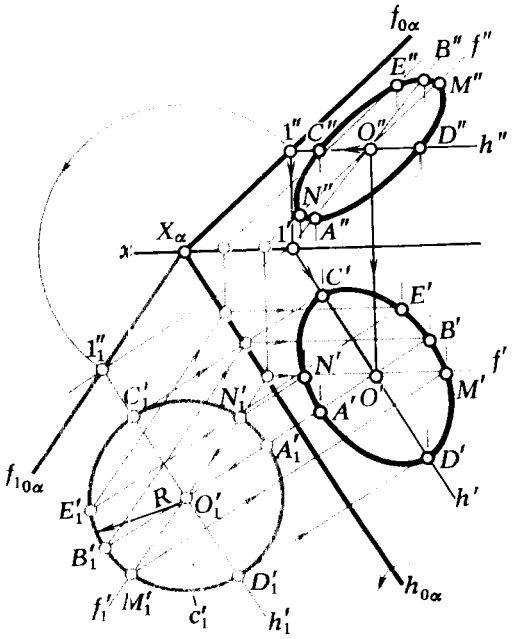


Рис. 73

руентен $[X_\alpha A_1']$ на совмещенном положении следа $f_{0\alpha_1}$. В связи с этим положение точки A_1', а следовательно, и следа $f_{0\alpha_1}$ можно определить, не пользуясь центром и радиусом вращения. Для этого достаточно из точки X_α (рис. 72,*б*) описать дугу радиусом, равным расстоянию $|X_\alpha A''|$, до ее пересечения с прямой (горизонтальным следом $h_{0\beta}$ плоскости β, в которой будет перемещаться точка A), проведенной через A' перпендикулярно к $h_{0\alpha}$. Через полученную точку пройдет фронтальный след плоскости $f_{0\alpha_1}$ при совмещении его с плоскостью π_1.

В § 9 ... 12 мы познакомились с различными способами перевода геометрической фигуры, занимающей общее положение в пространстве, в частное положение. Иногда приходится решать обратную задачу, связанную с построением проекций плоской фигуры заданной формы и размеров, принадлежащей плоскости общего положения.

Решение такой задачи можно выполнить, используя способ совмещения.

План решения задачи следующий:

1) совмещаем плоскость, которой должна принадлежать фигура, с какой-либо плоскостью проекции;

2) строим (вычерчиваем) на совмещенном положении плоскости требуемую фигуру;

3) "поднимаем" (поворачиваем) плоскость вместе с изображенной на ней фигурой в пространство.

Графические построения, которые надо выполнить, чтобы "поднять" плоскость в пространство, аналогичны построениям, выполняемым при совмещении плоскости с плоскостью проекции, только выполняются они в обратной последовательности.

В качестве иллюстрации покажем решение задачи на построение проекций окружности c, принадлежащей плоскости общего положения α, если известно положение ее центра O и величина радиуса R (рис. 73).

Графические построения осуществляем в последовательности, указанной в приведенном выше плане решения.

Плоскость α совмещаем с плоскостью π_1 так же, как это было сделано на рис. 72,*б*. Затем через точку O (O', O'') проводим фронталь $f(f', f'')$ и горизонталь $h(h', h'')$ плоскости α и находим их совмещенное положение f_1' $(f_1' \parallel f_{1\,0\alpha})$ и h_1' $(h_1' \parallel h_{0\alpha})$. Центр окружности $O \in f$, поэтому для определения положения центра достаточно через горизонтальную проекцию O' провести прямую, перпендикулярную оси вращения $h_{0\alpha}$, и отметить точку ее пересечения с совмещенной фронталью (горизонталью).

Из центра O_1' проводим окружность c_1' заданным радиусом R. Отмечаем точки N_1', M_1', C_1', D_1', в которых f_1' и h_1' пересекают окружность c_1'. По M_1' находим M' ($M \in f$, следовательно, $M' \in f'$); M_1' перехо-

дит в M' по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения $h_0\alpha$. Дуга этой окружности проецируется на π_1 в $[M'_1M']$.

Аналогично находим точки N', C', D' — концы двух диаметров окружности. На рис. 73 показано также нахождение произвольных точек A', B', E'.

II. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций способом замены плоскостей проекций достигается путем перехода от заданных плоскостей проекций к новым. Новая плоскость проекции выбирается перпендикулярной к одной из старых. Проецируемые геометрические фигуры при этом не меняют своего положения в пространстве.

При выборе положения новой плоскости проекции следует руководствоваться тем, что по отношению к новой плоскости проецируемая фигура должна занимать частное положение, обеспечивающее получение проекций, наиболее удобных для решения поставленной задачи. В некоторых случаях бывает достаточно заменить только одну плоскость проекции π_1 на π_3 или π_2 на π_3. Если замена одной плоскости проекции не обеспечивает требуемого вида вспомогательной проекции, производят замену двух плоскостей. При этом переход от исходной системы плоскостей проекций $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_2\,\frac{\pi_4}{\pi_3}$ может быть осуществлен по одной из следующих схем:

$$x\,\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\,\frac{\pi_2}{\pi_3} \rightarrow x_2\,\frac{\pi_4}{\pi_3}$$

или

$$x\,\frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1\,\frac{\pi_3}{\pi_1} \rightarrow x\,\frac{\pi_3}{\pi_4}.$$

Приведенные схемы показывают, что мы одновременно можем менять только одну плоскость проекций π_1 (или π_2); другая плоскость π_2 (или π_1) остается неизменной. После того как будут определены новые фронтальные (или горизонтальные) проекции, можно переходить ко второй системе, заменяя плоскость π_2 (или π_1) новой плоскостью. Наличие одной плоскости проекции, которая не меняет своего положения, позволяет использовать ее как связующее звено между старыми (исходными) проекциями и новыми*.

§ 13. ЗАМЕНА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Пусть в системе плоскостей $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ дана точка A и указаны ее проекции A' и A'' (рис. 74,*а*). Проследим, как изменится положение проекций точки A, если плоскость π_2 заменить новой плоскостью π_3, перпендикулярной к π_1. Горизонтальная плоскость проекции не меняет

---

* Следует иметь в виду, что В. Л. Тороховым предложен способ замены плоскостей π_1 и π_2 одновременно двумя взаимно перпендикулярными плоскостями π_3 и π_4, что позволяет осуществить непосредственный переход от $x\,\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_2\,\frac{\pi_3}{\pi_4}$, минуя промежуточное звено $x_1\,\frac{\pi_3}{\pi_1}$ или $x_1\,\frac{\pi_2}{\pi_3}$. Подробно с этим способом можно познакомиться в книге С. А. Фролова "Методы преобразования ортогональных проекций". М.: Машиностроение, 1970.

своего положения, т. е. мы осуществляем переход от системы $x\ \frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой системе $x_1\ \frac{\pi_3}{\pi_1}$. Плоскость π_3 пересекается с плоскостью π_1 по прямой x_1, которая определяет новую ось проекции. Положение горизонтальной проекции A' точки A остается без изменения, так как точка A и плоскость π_1 не меняли своего положения в пространстве.

Для нахождения новой фронтальной проекции точки A''' достаточно спроецировать ортогонально точку A на плоскость π_3. Из чертежа видно, что расстояние от новой фронтальной проекции A''' точки A до новой оси x_1 равно расстоянию от старой фронтальной проекции A'' до старой оси x ($|A'''A_{x_1}| = |A''A_x|$).

Чтобы перейти от пространственного макета к эпюру, необходимо совместить плоскость π_3 с плоскостью чертежа. Метод замены плоскостей проекций предусматривает совмещение новой плоскости с той из старых плоскостей, к которой она перпендикулярна. В рассматриваемом случае ввиду перпендикулярности плоскостей π_3 и π_1 плоскость π_3 совмещена с π_1. За ось вращения принята новая ось проекций x_1. Направление поворота не оказывает никакого влияния на результат преобразования. Поворот следует делать в таком направлении, при котором новые проекции не накладываются на старые и не затрудняют чтения чертежа. На рис. 74,*а* совмещение плоскости π_3 с π_1 осуществлено вращением ее по направлению движения часовой стрелки.

Равенство аппликат новой A''' и старой A'' фронтальных проекций точки A и использование в обоих случаях прямоугольного проецирования делают построение новой фронтальной проекции чрезвычайно простым. Оно состоит в том, что через старую горизонтальную проекцию точки проводят прямую, перпендикулярную к новой оси, и откладывают на ней от точки пересечения с осью отрезок, равный расстоянию от старой фронтальной проекции до старой оси (рис. 74,*б*).

Замена горизонтальной плоскости π_1 новой плоскостью π_3 и построение новых проекций точки A в системе $x_1\ \frac{\pi_2}{\pi_3}$ осуществляется аналогично только что рассмотренному случаю, с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции A''' точки A необходимо из старой фронтальной проекции точки опустить перпендикуляр на новую ось x_1 и отложить на нем от точки пересечения с осью x_1 отрезок, равный расстоянию от старой горизонтальной проекции до старой оси x.

Построения, выполненные по этому правилу, приведены на рис. 75. На рис. 76 показан отрезок $[AB]$, произвольно расположенный в про-

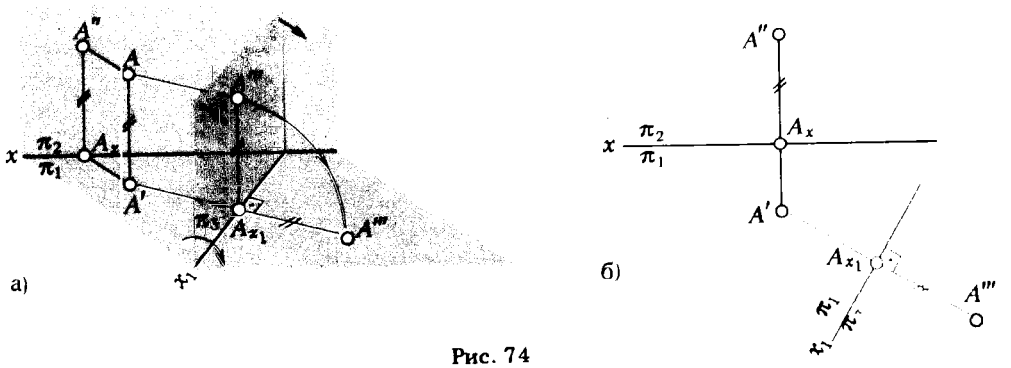


Рис. 74

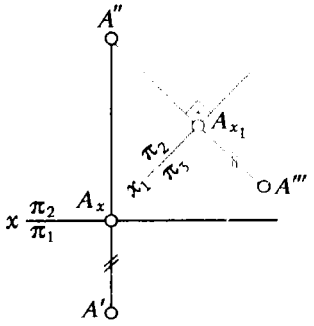


Рис. 75

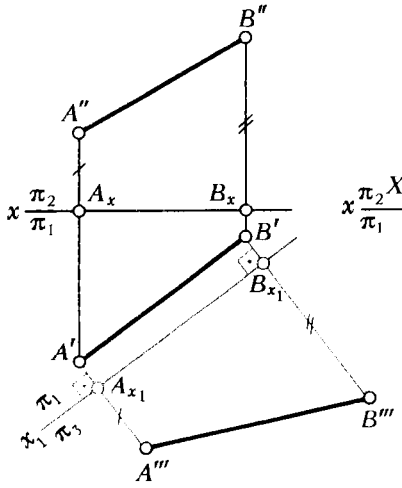


Рис. 76

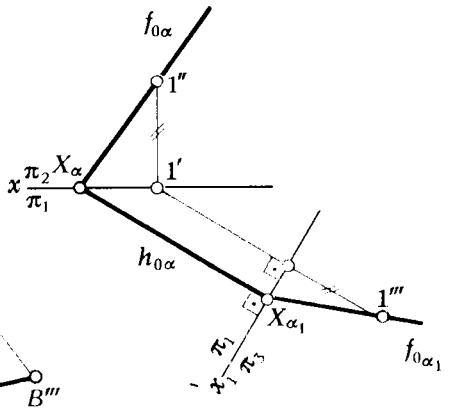


Рис. 77

странстве, и его новая фронтальная проекция на плоскость π_3, которой он параллелен. Все построения ясны из чертежа и не требуют пояснения.

На рис. 77 приведено решение задачи, при котором плоскость общего положения α оказалась фронтально проецирующей относительно плоскости π_3. Известно, что горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости перпендикулярен к оси x, следовательно, чтобы плоскость α заняла фронтально проецирующее положение, необходимо новую ось x_1 провести перпендикулярно к $h_{0\alpha}$. Через точку X_{α_1}, в которой $h_{0\alpha} \cap x_1$, пройдет фронтальный след $f_{0\alpha_1}$. Для определения его направления достаточно найти одну точку. В качестве такой точки можно взять произвольную точку $1'' \in f_{0\alpha}$ и указать ее фронтальную проекцию $1'''$ на новой плоскости π_3. Через X_{α_1} и $1'''$ проводим $f_{0\alpha_1}$.

§ 14. ЗАМЕНА ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Часто при определении действительной величины какой-либо геометрической фигуры или для получения более полного (наглядного) ее изображения замены одной плоскости проекций бывает недостаточно. В таких случаях приходится осуществлять замену двух плоскостей проекций.

Рассмотрим, как определяются новые ортогональные проекции точки в новой системе плоскостей проекций $x_2 \frac{\pi_3}{\pi_4}$, если известны ее проекции в старой системе плоскостей $x \frac{\pi_2}{\pi_1}$. Пусть A' и A'' — проекции точки A на исходных плоскостях проекций $x \frac{\pi_2}{\pi_1}$ (рис. 78). Для того чтобы определить положение новых проекций A''' и A'''' в системе $x_2 \frac{\pi_3}{\pi_4}$, заменяем вначале плоскость π_1 новой плоскостью π_3. Точку, через которую проводится новая ось, и направление оси можно выбирать произвольно. Следует следить лишь за тем, чтобы не происходило накладывания новых проекций на старые и чтобы геометрические фигуры, расположенные в первой четверти пространства, оставались в нем и после замены плоскости проекции.

Новая горизонтальная проекция A''' точки A будет принадлежать одной линии связи, проходящей через старую фронтальную проекцию A''

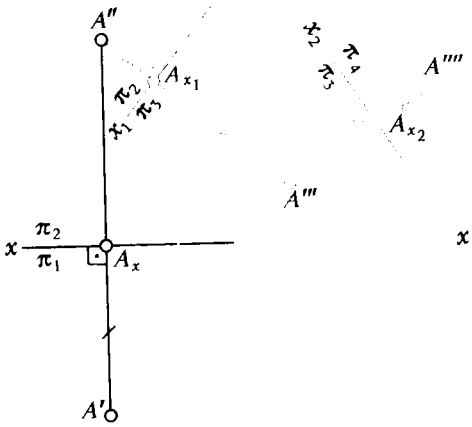


Рис. 78

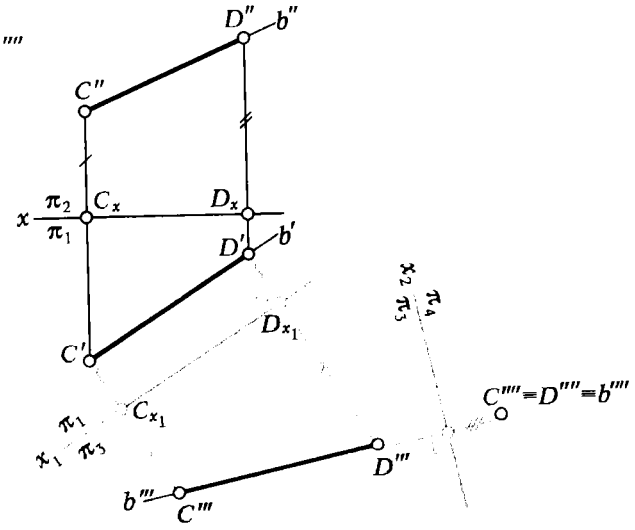


Рис. 79

и перпендикулярную к новой оси x_1, и будет удалена от новой оси на такое же расстояние, на какое старая горизонтальная проекция точки была удалена от старой оси x. Поэтому для определения положения проекции A''' достаточно от точки A_{x_1} на продолжении перпендикуляра $A''A_{x_1}$ отложить $[A_{x_1}A''']$, равный отрезку $[A_xA']$.

Положение новой фронтальной проекции точки в системе плоскостей проекций $x_2\ \frac{\pi_3}{\pi_4}$ определяется аналогично только что рассмотренному случаю с той лишь разницей, что теперь за исходную (старую) систему будем принимать систему $x_1\ \frac{\pi_2}{\pi_3}$ и от нее переходить к системе $x_2\ \frac{\pi_3}{\pi_4}$. В этом случае плоскость π_3 не меняет своего положения в пространстве, следовательно, не изменится положение и горизонтальной проекции A'''. Фронтальная проекция A'''' будет определена, если из A''' восставить перпендикуляр к оси x_2 и отложить на нем от точки A_{x_2} $[A_{x_2}A'''']$, равный расстоянию от точки A'' до оси x_1 — $[A_{x_1}A'']$.

Зная правила построения проекций одной точки в новой системе плоскостей проекций, можно построить новые проекции любого числа точек, а следовательно, и любой геометрической фигуры.

На рис. 79 показан пример перевода отрезка $[CD]$ прямой общего положения b в положение $[O''''D'''']$ отрезка фронтально проецирующей прямой $b\,(b''', b'''')$. Вначале заменой плоскости π_2 плоскостью π_3 переводим отрезок $[CD]$ в положение $\| \pi_3$, затем, заменив π_1 плоскостью π_4, ставим отрезок по отношению к плоскости π_4 в проецирующее положение ($[C''''D'''']$, $[C'''D''']$).

§ 15. СОЧЕТАНИЕ СПОСОБА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СО СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИИ

Пользуясь только одним способом плоскопараллельного перемещения или только одним способом замены плоскостей проекций, всегда можно перейти от произвольного расположения геометрической

фигуры к частному, обеспечивающему получение удобного вида проекций. Однако иногда бывает целесообразно применять не один какой-либо способ, а использовать сочетание двух способов — плоскопараллельное перемещение и замену плоскостей проекций.

Существенным преимуществом способа замены плоскостей проекций является построение только одной вспомогательной проекции (при замене одной плоскости проекции), в то время как способ плоскопараллельного перемещения требует построения двух вспомогательных проекций (при перемещении параллельно одной плоскости) *.

В то же время способ замены плоскостей проекций обладает недостатком, заключающимся в том, что при замене плоскостей проекций трудно заранее предусмотреть на чертеже место расположения вспомогательных проекций. Применяя способ параллельного перемещения, всегда можно выбрать наиболее удобное положение вспомогательных проекций на поле чертежа. Решение задач этим способом значительно облегчается при использовании кальки. В этом случае одну из двух дополнительных (вспомогательных) проекций не строят, а перечерчивают на кальку, которую затем прикладывают в наиболее удобном месте чертежа. Следующую вспомогательную проекцию строят с помощью проекции, изображенной на кальке, и одной из предшествующих проекций.

Естественно, возникает вопрос, каким путем можно сочетать достоинства обоих способов: удобное расположение вспомогательных проекций (характерное для способа плоскопараллельного перемещения) и построение при каждом последовательном преобразовании только одной проекции (как в способе замены плоскостей проекций).

Возможность совместного применения способов плоскопараллельного перемещения и замены плоскостей проекций была указана еще В. И. Курдюмовым в 1893 г. Сочетание этих способов известно под названием *способа сложных перемещений*, причем сложные перемещения подразделяют на два вида.

Первый вид сложных перемещений состоит в том, что построение новых проекций достигается путем последовательного применения сначала способа замены плоскостей проекций, затем способа вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции.

Второй вид сложных перемещений заключается в замене плоскости проекции с последующим совмещением новой плоскости с той из первоначальных плоскостей, которую она заменила **.

Рассмотрим решение задач с использованием первого (задача 1) и второго (задача 2) видов сложных перемещений.

ЗАДАЧА 1. Точку A повернуть против часовой стрелки вокруг фронтали f на $\angle\varphi^\circ$ (рис. 80).

Решение этой задачи способом вращения представляет определенные трудности, так как при вращении вокруг фронтали траектория перемещения точки проецируется на горизонтальную плоскость проекции с искажением, в виде эллипса, с искажением будет проецироваться и $\angle\varphi^\circ$.

Решение можно значительно упростить, если применить способ сложных перемещений. Ход решения задачи в этом случае состоит в следующем: вначале с помощью способа замены плос-

---

* Исключение составляет только способ вращения вокруг линий уровня, при котором строится только одна вспомогательная проекция.

**Как вариант второго вида сложных перемещений можно рекомендовать на втором этапе преобразования вместо совмещения с первоначальной плоскостью выполнить совмещение с плоскостью, параллельной ей.

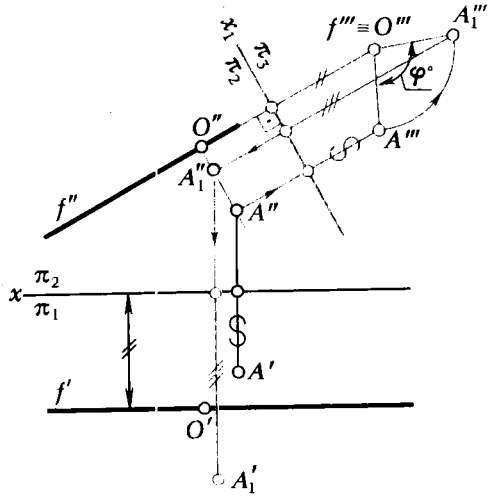


Рис. 80

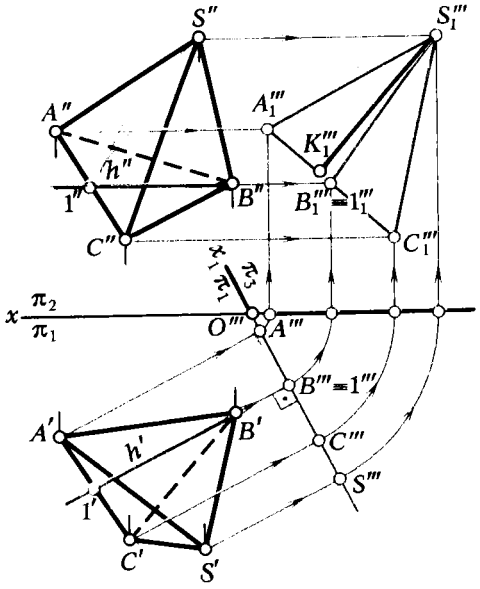


Рис. 81

кости проекции переводим фронталь в положение, перпендикулярное плоскости π_3, затем, используя способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости π_3, поворачиваем точку A''' вокруг оси f''' на заданный $\angle\varphi^\circ$.

Отмеченный ход решения задачи определяет перечисленную ниже последовательность геометрических построений:

1) проводим новую ось $x_1 \perp f''$;

2) определяем новые горизонтальные проекции фронтали f''' и точки A''';

3) поворачиваем точку A''' вокруг фронтали f''' (точки $f''' \equiv O'''$) на $\widehat{\varphi^\circ}$ и определяем положение точки A_1'';

4) построениями, выполненными в обратной последовательности, определяем новые ортогональные проекции точки A_1'' и A_1'.

ЗАДАЧА 2. Определить высоту четырехгранной пирамиды $SABC$ (рис. 81). Для решения этой задачи заменяем плоскость проекции π_2 на π_3 с последующим совмещением ее с плоскостью π_2. Чтобы определить направление новой оси x_1, в плоскости основания пирамиды ABC проводим горизонталь h (ось $x_1 \perp h'$). Совмещаем новую плоскость π_3 с плоскостью π_2 и строим на ней совмещенную проекцию пирамиды $S_1'''A_1'''B_1'''C_1'''$. Отрезок перпендикуляра $S_1'''K_1'''$, опущенного из вершины пирамиды S_1''' на основание $A_1'''B_1'''C_1'''$, определяет высоту пирамиды.

Из приведенных примеров видно, что для получения ответа с помощью сочетания двух способов потребовалось построить только одну вспомогательную проекцию вместо двух, необходимых при решении этих задач способами плоскопараллельного перемещения или замены плоскостей проекции.

Используя сочетание двух способов, можно существенно упростить решение целого ряда задач, особенно в тех случаях, когда в ходе решения необходимо повернуть плоскую фигуру или пространственное тело вокруг прямой общего положения.

Следует иметь в виду, что количество графических построений будет уменьшаться только в том случае, когда мы заменяем плоскопараллельное перемещение (в частности, вращение) заменой плоскостей проекций, а не наоборот.

§ 16. ДРУГИЕ СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Кроме плоскопараллельного перемещения и замены плоскостей проекций начертательная геометрия располагает большим количеством различных способов получения новых, наиболее удобных для решения задач проекций по заданным неудобным.

В тридцатые годы вышла в свет книга С. М. Колотова "Вспомогательное проектирование"*, в которой были изложены основные принципы получения неискаженного вида прямоугольных проекций на специально выбранную плоскость, а также построения косоугольных и центральных проекций на заданные плоскости проекции.

В последующие годы появилась серия работ, посвященных созданию новых и усовершенствованию ранее предложенных способов вспомогательного проецирования.

Особое место среди этих работ занимают работы, посвященные криволинейному вспомогательному проецированию. Их авторы использовали для получения вспомогательных проекций в качестве проецирующих кривые линии, пространственные или плоские.

В настоящее время имеется много хорошо разработанных и доведенных до практического использования способов, которые могут быть объединены под общим названием вспомогательное проецирование.

Рис. 82 ... 85 дают наглядное представление о получении проекций, удобных для решения задач с помощью вспомогательного проецирования. Так, на рис. 82 решена задача по определению расстояния между скрещивающимися прямыми a и b путем ортогонального проецирования этих прямых на вспомогательную плоскость $\alpha \perp a$. При этом направление проецирования $s \parallel a$.

Рис. 83 показывает целесообразность использования косоугольного проецирования на заданную плоскость проекции при решении задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью.

Известно, что точка встречи прямой с плоскостью определяется элементарно просто, если плоскость занимает проецирующее положение. В случае, изображенном на рис. 83, плоскость общего положения α переведена во фронтально проецирующее положение путем проецирования α на плоскость проекции π_2 в направлении горизонтали этой плоскости.

На рис. 84 для определения точек встречи прямой a с произвольной конической поверхностью применено центральное проецирование. За центр проекций принята вершина конической поверхности S. В этом случае коническая поверхность оказывается проецирующей, что значительно упрощает решение поставленной задачи.

На рис. 85 приведен пример решения задачи по определению точек встречи прямой с поверхностью кольца. Для упрощения решения этой задачи использовано криволинейное (в частности, окружностное) проецирование. При таком способе проецирования поверхность кольца оказывается горизонтально проецирующей. Все построения для нахождения положения точек M и N ясны из чертежа и не требуют пояснений.

Использование теорем проективной геометрии и свойств коллинеарных преобразований дало толчок к созданию различных способов

---

* Колотов С. М. Вспомогательное проектирование. Киев, 1933.

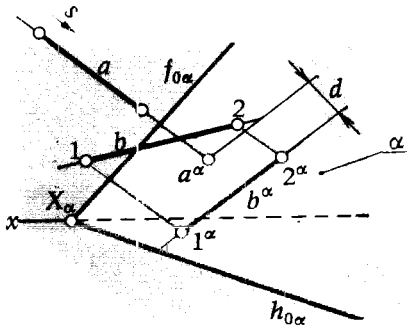


Рис. 82

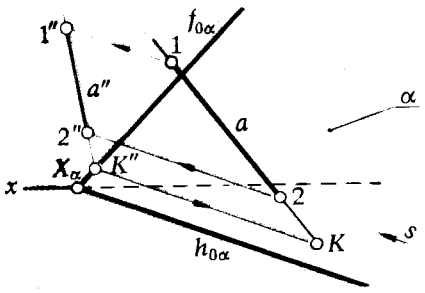


Рис. 83

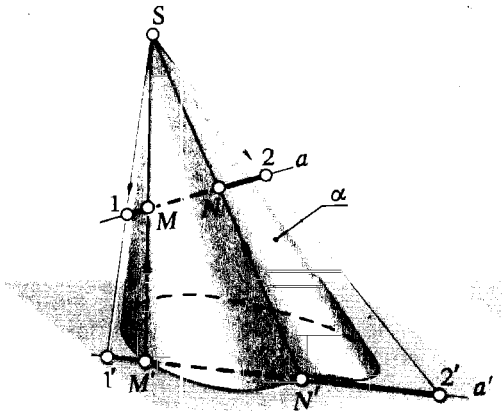


Рис. 84

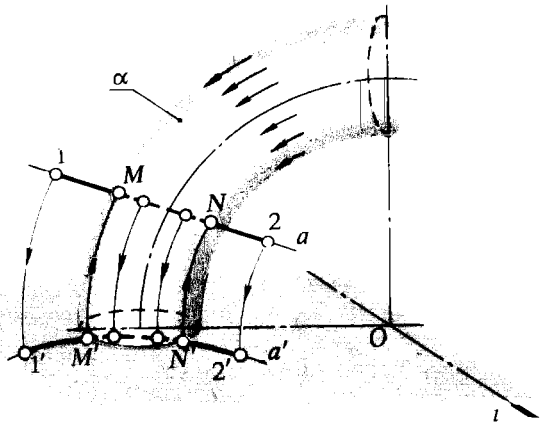


Рис. 85

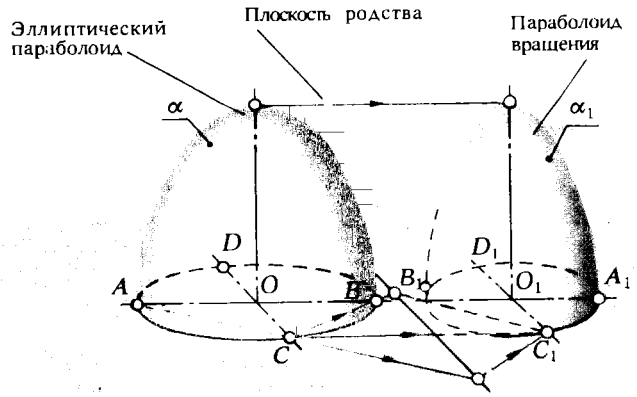


Рис. 86

перспективно-аффинных и гомологических преобразований ортогональных проекций, составляющих основу проективных преобразований.

На рис. 86 показано *перспективно-аффинное* преобразование эллиптического параболоида в параболоид вращения. Рис. 87 дает наглядное представление о преобразовании поверхности гиперболоида вращения α в сферу α_1 путем *гомологических преобразований*. Не вызы-

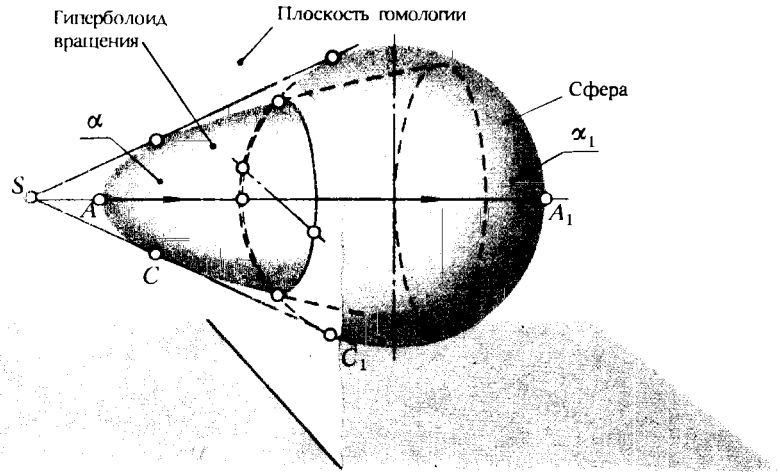


Рис. 87

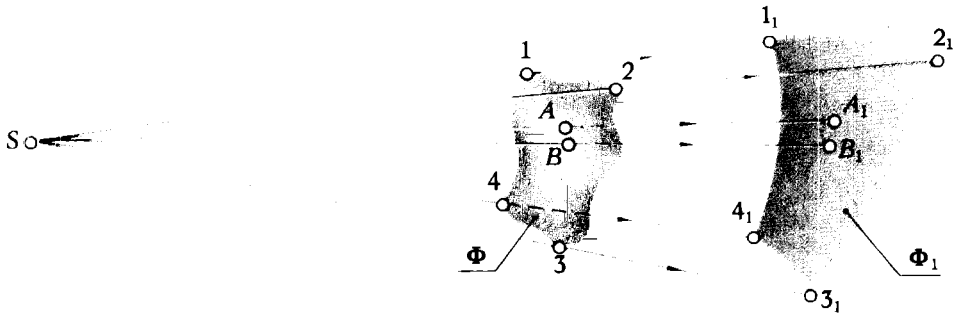


Рис. 88

вает сомнения целесообразность таких преобразований. Действительно, при решении позиционных задач лучше иметь дело с поверхностью вращения, чем с эллиптическим параболоидом (рис. 86), и со сферой, чем с поверхностью гиперболоида вращения (рис. 87). И, наконец, применение топологических преобразований пространства и погруженных в него геометрических фигур привело к созданию чрезвычайно гибкого способа, позволяющего осуществить преобразование сложных нелинейчатых поверхностей, ограничивающих геометрические тела, в простые цилиндрические поверхности и даже плоскости.

В основе рассматриваемых преобразований лежат топологические свойства:

а) *взаимная однозначность* — каждой точке исходной фигуры Ф соответствует одна и только одна точка преобразованной фигуры Φ_1;

б) *взаимная непрерывность* — бесконечно близким точкам исходной фигуры Ф соответствуют также бесконечно близкие точки преобразованной фигуры Φ_1. На рис. 88 бесконечно близким точкам A и B фигуры Ф соответствуют две бесконечно близкие точки A_1 и B_1 фигуры Φ_1.

Преобразования, обеспечивающие сохранение топологических свойств составляют теоретическую базу способа топологических преобразований.

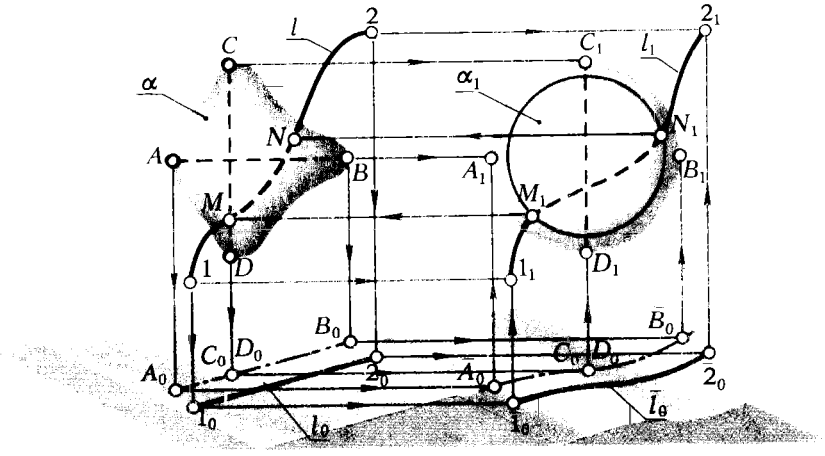


Рис. 89

На рис. 89 показано решение задачи по определению точек встречи плоской кривой l с произвольной поверхностью вращения α. Топологическим преобразованием фигура Ф, ограниченная произвольной поверхностью вращения α, преобразована в шар α_1. Указанными преобразованиями задача сведена к простейшей — определению точек встречи плоской кривой с поверхностью сферы. Зная положение точек M_1 и N_1, с помощью линий связи (прямых, параллельных оси x) определяем M и N.

Изучение отмеченных выше способов преобразования ортогональных проекций выходит за рамки учебной программы курса начертательной геометрии для втузов. Мы остановились на них лишь для того, чтобы читатель имел в виду, что кроме классических способов (см. § 9 ... 14) в арсенале начертательной геометрии имеются и другие, подчас более мощные, способы преобразования ортогональных проекций*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем состоит принцип преобразования ортогональных проекций способом плоскопараллельного перемещения?
2. В чем состоит отличие способа вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскости проекции, от способа параллельного перемещения?
3. Как определяется положение центра вращения и величина радиуса вращения точки при ее повороте вокруг горизонтали и фронтали?
4. Как можно определить совмещенное с плоскостью $\pi_1(\pi_2)$ положение фронтального (горизонтального) следа плоскости без нахождения центра и радиуса вращения?
5. Как перемещаются проекции точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекции $\pi_1(\pi_2)$?
6. Сколько параллельных перемещений и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы перевести отрезок прямой общего положения в отрезок горизонтально (фронтально) проецирующей прямой?
7. В чем состоит сущность преобразования ортогональных проекций способом замены плоскостей проекций?
8. Сколько перемен плоскостей проекций и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы перевести отрезок прямой общего положения в отрезок фронтально (горизонтально) проецирующей прямой?

---

* Более подробные сведения о перечисленных способах преобразования читатель найдет в книге С. А. Фролова "Методы преобразования ортогональных проекций". М.: Машиностроение, 1970.

ГЛАВА III

ЛИНИЯ

Линии занимают особое положение в начертательной геометрии. Используя линии, можно создать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени. Линии позволяют установить и исследовать функциональную зависимость между различными величинами. С помощью линий удается решать многие научные и инженерные задачи, решение которых аналитическим путем часто приводит к использованию чрезвычайно громоздкого математического аппарата.

Линии широко используются при конструировании поверхностей различных технических форм. Умело подбирая линии, дизайнер имеет возможность придать изящные эстетические формы конструируемым изделиям.

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В § 8 отмечалось, что при определении геометрических фигур в геометрии принято исходить из основных (неопределяемых) понятий — *точка*, *прямая*, *плоскость* и *расстояние*, а в современном представлении также понятия *множество*.

Базируясь на этих элементарных понятиях, линию целесообразно трактовать как траекторию перемещения точки (рис. 90). Такое представление линии позволяет получить определение линии, используя такие основные понятия геометрии, как точка и множество. В этом случае линию можно рассматривать как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек.

Если учесть, что положение точки при ее движении по заданной траектории будет зависеть от непрерывно меняющейся величины d (расстояние до точки от начала координат*), то можно утверждать, что положение точки, принадлежащей линии, определяется непрерывно меняющейся величиной d. Тогда, окончательно приняв d за параметр, приходим к следующему определению — *линия есть непрерывное однопараметрическое множество точек*.

В этом определении словом *непрерывное* подчеркивается, что двум бесконечно близким значениям параметра соответствуют две также бесконечно близкие точки.

Следует иметь в виду, что данное определение линии является условным. В действительности положение точки будет зависеть не только от вектора d (определяющего величину расстояния), но и от углов его наклона к плоскостям проекций.

Мы останавливаемся на нем лишь потому, что в дальнейшем, при изложении гл. IV "Поверхность", оно позволяет получить определение поверхности, основанно также на понятиях точка и множество и, что более важно, подойти к этому определению с точки зрения кинематического способа получения поверхности.

---

* В случае окружности начало координат не должно совпадать с ее центром.

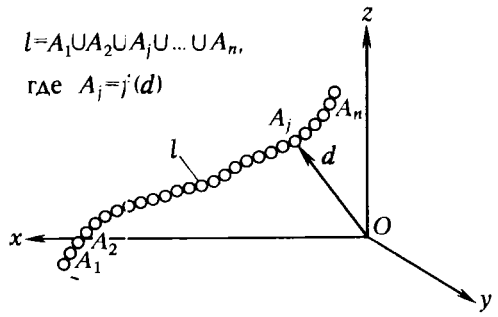


Рис. 90

Рассматривая поверхность как след, который оставляет геометрическая фигура при своем перемещении в пространстве, можно ввести понятие определитель, которое играет весьма важную роль в теории поверхностей.

Линии подразделяются на *алгебраические**, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и *трансцендентные***, если они описываются трансцендентными уравнениями.

Линии могут быть *пространственными* и *плоскими*.

Пространственными или линиями двоякой кривизны называют линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости.

Линии, у которых все точки принадлежат одной плоскости, называют *плоскими*.

Если алгебраическое уравнение, описывающее линию, n-й степени, то алгебраическая кривая считается n-го порядка. Порядок алгебраической кривой определяется также числом точек ее пересечения с плоскостью (для пространственной линии) или прямой (для плоской линии). При этом следует иметь в виду, что в число точек пересечения включаются точки с действительными и мнимыми координатами.

Простейшей линией является прямая. Так как свойства прямой и задание ее на эпюре Монжа уже известны читателю (см. гл. I, § 8), в настоящей главе речь будет идти о характеристиках и свойствах кривых линий (пространственных и плоских) и построении их ортогональных проекций.

I. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Было отмечено, что пространственными кривыми называются линии, все точки которых не принадлежат одной плоскости. Рис. 91 дает наглядное представление о произвольной пространственной кривой линии.

§ 17. КАСАТЕЛЬНЫЕ И НОРМАЛИ К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

На рис. 92 показана пространственная кривая l. Возьмем на ней произвольную точку M и проведем через нее секущие $[MA)$ и $[MB)$.

При приближении точки A к точке M $[MA)$ будет поворачиваться вокруг точки M, и когда точка A совпадет с точкой M, $[MA)$ достигнет своего предельного положения (луч t_1).

Предельное положение секущей в точке M называется полукасательной к кривой l в точке M.

---

* К алгебраическим линиям, в частности, относятся окружность, эллипс, парабола, гипербола, астроида, кардиоида и др.

** К трансцендентным линиям относятся синусоида, спираль архимеда, циклоида и др.

$[MB)$ при совпадении точки B с точкой M займет предельное положение t_2. Из чертежа видно, что в точке M к кривой l проведены две полукасательные, направленные в противоположные стороны. Полукасательные t_1 и t_2 образуют прямую, которую называют касательной к кривой в данной точке (t_M).

Через касательную к пространственной кривой в данной точке можно провести пучок плоскостей*. Одна из плоскостей этого пучка, называемая *соприкасающейся плоскостью*, играет особую роль при исследовании свойств пространственных кривых.

Подойти к понятию соприкасающейся плоскости можно путем следующих рассуждений: пусть дана пространственная кривая l (рис. 93). Возьмем на ней произвольную точку M и укажем полукасательные t_1 и t_2 к кривой l в этой точке. Через точку M проведем две секущие $[MA)$ и $[MB)$. Обозначим полуплоскость, заданную полукасательной t_1 и секущей $[MA)$, α_1, а плоскость, определяемую полукасательной t_2 и $[MB)$, — α_2. При приближении точек A и B к точке M плоскости α_1 и α_2 будут проворачиваться вокруг полукасательных. Когда секущие займут положение полукасательных, плоскости α_1 и α_2 займут предельное положение.

Так как полукасательные принадлежат одной прямой, то плоскости α_1 и α_2 совпадут, образуя одну плоскость α, которую называют *соприкасающейся плоскостью пространственной кривой в данной точке.*

Соприкасающаяся плоскость может быть определена так же, как предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки пространственной кривой линии.

Соприкасающаяся плоскость неразрывно связана с движущейся по кривой точкой. Так как каждая точка кривой имеет свою касательную (кроме особых точек), то соприкасающаяся плоскость при перемещении по кривой будет все время менять свое положение. При этом она будет не только следовать за касательной к кривой, но, одновременно, и вращаться вокруг нее.

К пространственной кривой линии l в любой ее точке (за исключением некоторых особых точек) можно провести пучок перпендикулярных к ней прямых (рис. 94)**. Множество этих перпендикуляров (нормалей) определяют плоскость, которую называют *нормальной плоскостью* β. Одна из нормалей этого множества, принадлежащая соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* n_α.

---

*Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую a; прямая a называется осью этого пучка.

**Пучком прямых называется множество всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M; точка M называется центром пучка.

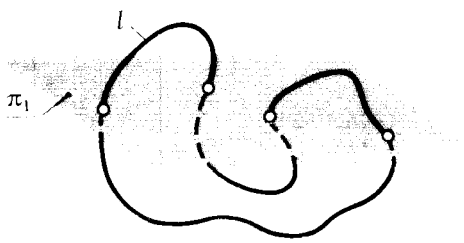


Рис. 91

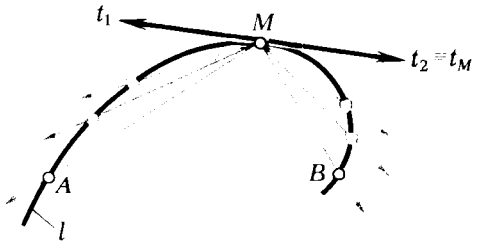


Рис. 92

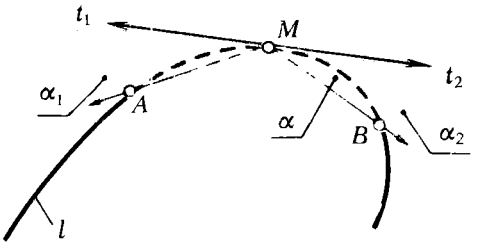


Рис. 93

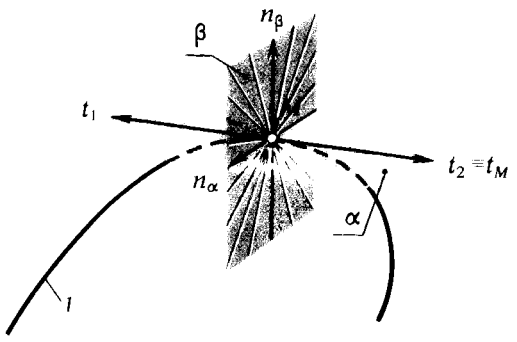


Рис. 94

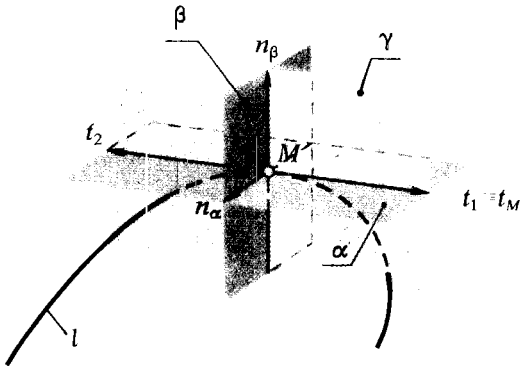


Рис. 95

Другую нормаль этого множества, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, называют *бинормалью* n_β. Бинормаль n_β и касательная t_M определяют плоскость γ, которую называют *спрямляющей плоскостью кривой* (рис. 95).

Трехгранник Френе. Три взаимно перпендикулярные плоскости α, β и γ (рис. 95), проходящие через одну точку пространственной кривой, образуют прямоугольный трехгранник, называемый *основным* или *подвижным трехгранником*. Его называют также трехгранником Френе *.

Трехгранник Френе используется в качестве системы плоскостей проекций, на которые проецируют пространственную кривую для изучения ее свойств. При этом плоскость α принимают за горизонтальную, плоскость γ за фронтальную и плоскость β за профильную плоскость проекции.

Дифференциальные свойства пространственной кривой исследуют по ее плоским проекциям на гранях трехгранника Френе.

II. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая линия называется плоской, если все ее точки принадлежат одной плоскости.

Основные понятия и определения, приведенные на с. 69 для пространственных кривых, сохраняются с некоторыми изменениями и для плоских кривых линий; плоские кривые могут быть также *алгебраическими* и *трансцендентными*.

В первом случае уравнение кривой в декартовых координатах может быть представлено в форме $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — целый многочлен от x и y.

Определения полукасательной и касательной в точке плоской кри-

*По имени французского математика Жана Фредерика Френе, предложившего его в 1847 г.

вой также совпадают с аналогичными определениями для пространственной кривой.

В отличие от пространственной кривой, для каждой точки которой может быть проведено множество перпендикулярных к ней прямых, образующих нормальную плоскость, плоская кривая в каждой ее точке имеет только одну нормаль — прямую, перпендикулярную к касательной в данной точке кривой и принадлежащую плоскости кривой.

В инженерной практике часто приходится проводить касательные и нормали к плоским кривым. Рассмотрим графические способы построения этих линий.

§ 18. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Графический способ построения касательной и нормали к плоской кривой базируется на использовании "кривой ошибок". Для построения этой кривой из точки, через которую должна проходить искомая касательная, проводим лучи, пересекающие заданную кривую. Отмечаем концы хорд, по которым лучи пересекают кривую, и с помощью этих хорд строим "кривую ошибок".

Сущность способа проследим на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. **Построение касательной к кривой, проходящей через точку, не принадлежащую кривой** (рис. 96).

Пусть даны кривая l и точка A $(A \in \alpha \supset l) \wedge (A \notin l)$.

Проведем через точку A ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4. Отметим точки 1, 1_1, 2, 2_1, 3, 3_1, 4, 4_1, в которых эти секущие пересекают кривую l. Через середины полученных хорд проведем плавную кривую m (линию m называют "кривой ошибок").

Пересечение линии m с заданной кривой l определит точку касания M. (AM) — искомая касательная t к кривой l, проведенная из точки A.

ПРИМЕР 2. **Построение касательной к кривой параллельно заданному направлению** s (рис. 97).

Для определения точки касания M проведем ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4 параллельно заданному направлению s. Через середины хорд $[1\ 1_1]$, $[2\ 2_2]$, $[3\ 3_3]$, $[4,\ 4_4]$ проведем плавную кривую m и отметим точку M ее пересечения с заданной кривой l. Точка M будет точкой касания, а прямая t, проходящая через эту точку параллельно s, искомой касательной.

ПРИМЕР 3. **Построение касательной к кривой в данной точке касания** M (рис. 98).

Проведем произвольную прямую b, примерно перпендикулярную к искомой касательной, а через точку M ряд секущих a_1, a_2, a_3, a_4 так, чтобы они пересекали и кривую l и прямую b. От точек пересечения секущих с прямой b отложим (на секущих) отрезки, равные хордам $[M1]$, $[M2]$, $[M3]$, $[M4]$, при этом длины хорд, расположенных по разные стороны от точки касания M, отложим с разных сторон от прямой b. Полученные точки соединим плавной кривой m.

Пересечение кривой m с прямой b укажет точку 1, принадлежащую касательной. Соединив A с M прямой линией, получим искомую касательную t.

ПРИМЕР 4. **Построение нормали к кривой, проходящей через точку, не принадлежащую данной кривой** (рис. 99).

В плоскости даны кривая l и точка A, не принадлежащая кривой l. Примем точку A за центр окружностей разных радиусов, эти окружности пересекут данную кривую в точках 1, 1_1, 2, 2_1, 3, 3_1, 4, 4_1, которые примем за концы хорд. Из концов хорд восставим перпендикуляры. При этом перпендикуляры, восставленные из точек 1, 2, 3, 4, будут иметь противоположное направление перпендикулярам, восставленным из точек 1_1, 2_1, 3_1, 4_1. На этих перпендикулярах отложим отрезки, равные длине соответствующих хорд.

Полученные точки соединим плавной кривой m. Пересечение m с l укажет положение точки M, через которую пройдет искомая нормаль $n (n \perp [1, 1_1])$. Для проведения нормали к кривой линии параллельно заданному направлению или через данную на кривой точку предварительно надо построить касательную к кривой (см. примеры 1 и 3 на с. 73). Определив положение точки касания (первый случай) и направление касательной (второй случай), легко провести нормаль к кривой.

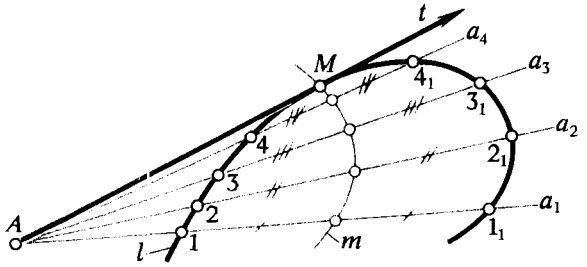


Рис. 96

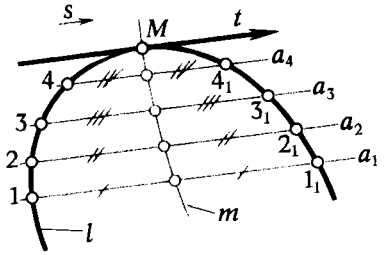


Рис. 97

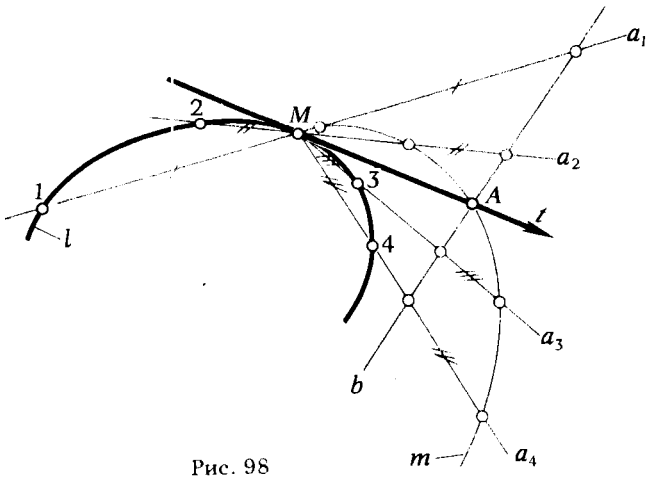


Рис. 98

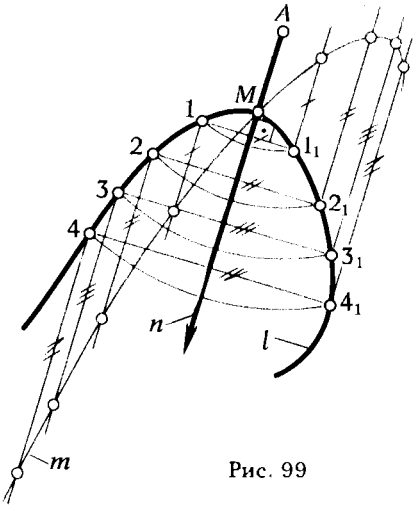


Рис. 99

§ 19. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Величина угла α° между полукасательными в двух бесконечно близких точках, отнесенная к длине дуги s, заключенной между этими точками, характеризует степень искривленности кривой линии. Чем больше угол α°, тем большую кривизну имеет линия. Обозначив кривизну k, можно записать $k = \lim \frac{\Delta\alpha^\circ}{\Delta s}$ (при $\Delta s \to 0$), т. е. *кривизна — предел отношения угла между полукасательными к соответствующей дуге.*

В общем случае кривизна в каждой точке плоской кривой будет различной (исключение составляют только окружность и прямая, для которых кривизна в любой их точке постоянна; для прямой она равна нулю). Графически определить величину кривизны в данной точке кривой можно с помощью *окружности (круга) кривизны.*

Окружностью кривизны в данной точке A кривой l называют предельное положение окружности, проведенной через точку A и две другие бесконечно близкие ей точки A_1 и A_2, также принадлежащие кривой l (рис. 100). Радиус такой окружности r называют *радиусом кривизны*, а ее центр O — *центром кривизны.* Чем меньше величина радиуса кривизны, тем больше искривлена линия. Поэтому количественная характеристика кривизны определяется величиной, обратной радиусу кривизны $k = \frac{1}{r}$.

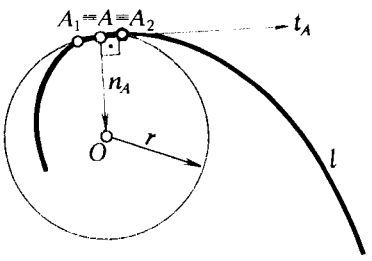


Рис. 100

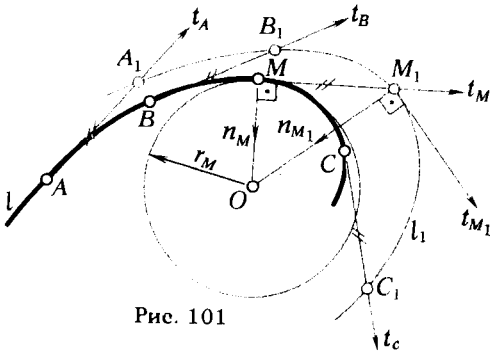


Рис. 101

§ 20. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРА КРИВИЗНЫ КРИВОЙ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ

Из рис. 100 видно, что окружность кривизны в точке соприкасания имеет общую с кривой l касательную t_A и нормаль n_A. Этим свойством можно воспользоваться для графического определения центра кривизны кривой в данной точке.

Пусть даны кривая l и точка M, принадлежащая этой кривой (рис. 101). Возьмем на кривой l ряд произвольных точек A, B, C. Проведем через них полукасательные t_A, t_B, t_C и отложим на них равные отрезки произвольной длины. Через полученные точки A_1, B_1, C_1 проведем плавную кривую l_1. Касательная t_M к кривой l в точке M пересечет кривую l_1 в точке M_1 (кривую l_1 называют *эквитангенциальной* относительно l, а кривую l относительно l_1 называют *трактрисой*). Проведем через M нормаль n_M к кривой l, а через точку M_1 — нормаль n_{M_1} к кривой l_1 и найдем пересечение нормалей n_M и n_{M_1}; точка пересечения O укажет положение центра кривизны для точки M кривой l. $[OM]$ равен радиусу кривизны r_M, а отношение $k = \frac{1}{r_M}$ — кривизне кривой l в данной точке M.

§ 21. ЭВОЛЮТА И ЭВОЛЬВЕНТА

Определение эволюты и эвольвенты неразрывно связано с понятием кривизны кривой линии. Если определить положение центров кривизны O_1, O_2, ... , O_n ряда, принадлежащих данной кривой l (рис. 102), точек A_1, A_2, ... , A_n и соединить их плавной кривой, то получим кривую m, называемую *эволютой* кривой l. Итак, *эволюта есть множество точек, являющихся центрами кривизны линии.*

Кривая l по отношению к кривой m (своей эволюте) называется эвольвентой. Образование эвольвенты можно представить из рассмотрения рис. 103. Отметим на кривой m ряд точек M, M_1, M_2, ... , M_n. Примем их за вершины ломаной линии. Из точки M_1 как из центра проведем дугу окружности ML_1 радиусом $r_1 = |M_1M|$ (точка $L_1 \in M_2M_1$). Затем из точки M_2 проведем дугу радиусом $r_2 = |M_2L_1|$ и отметим точку ее пересечения с продолжением звена M_3M_2 ломаной линии $M_1M_2M_3$: $L_2 = \overset{\frown}{L_1L_2} \cap (M_3M_2)$. Далее проведем дугу радиусом $r_3 = |M_3L_2|$ и определим положение точки L_3 — $L_3 = \overset{\frown}{L_2L_3} \cap (M_4M_3)$. Следуя описанным путем, можно определить точки L_1, ... , L_n. Множество точек L_1, L_2, ... , L_n образуют центровую кривую l. Если число сторон ломаной линии M, M_1, M_2, ... , M_n неограниченно возрастает, то в пределе получим кривую m и соответственно кривую l, состоящую из после-

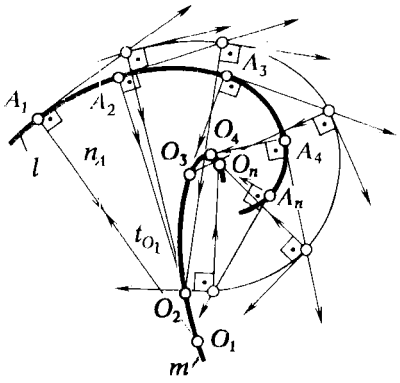


Рис. 102

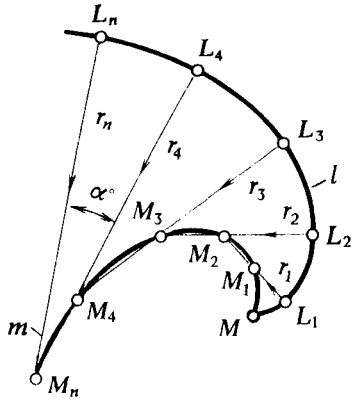


Рис. 103

довательных дуг окружностей монотонно изменяющихся радиусов. Кривая l есть эвольвента кривой m.

Эвольвенты находят широкое применение в технике. В частности, профили зубьев различных зубчатых передач имеют форму эвольвенты окружности. Ввиду широкого использования эволют и эвольвент в инженерной практике целесообразно отметить некоторые их свойства, вытекающие непосредственно из рассмотренных способов построения.

1. Эволюта представляет собой множество точек, являющихся центрами кривизны всех точек эвольвенты.
2. Касательные эволюты являются нормалями эвольвенты.
3. Всякая плоская кривая линия имеет бесчисленное множество эвольвент.
4. Через каждую точку касательной к эволюте проходит одна и только одна эвольвента.
5. Длина дуги эволюты равна абсолютному значению разности радиусов кривизны эвольвенты в концах ее дуг.

§ 22. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Вид кривой l вблизи некоторой точки M с единственной касательной t зависит от характера движения точки вдоль касательной и направления поворота касательной. Поясним это утверждение на примерах.

Пусть по кривой l движется точка M (рис. 104). Перемещение точки M_0 ($M_0 \in l$) в положение M_1 ($M_1 \in l$) можно рассматривать как движение точки по дуге кривой l в направлении, указанном зеленой стрелкой.

Проведем через точки M_0 и M_1 касательные к кривой l. Точку M_0 можно рассматривать не только с позиции ее принадлежности к кривой l, но и как принадлежащую касательной t_0. В этом случае перемещение точки M_0 ($M_0 \in t_0$) в положение M_1 ($M_1 \in t_1$) следует трактовать как движение точки по касательной в направлении, указанном зеленой стрелкой. Причем для того чтобы точка $M_0 \in t_0$ заняла положение $M_1 \in t_1$, необходимо, чтобы касательная t_0 при переходе в положение t_1 поворачивалась в направлении, указанном стрелкой.

При перемещении точки M_1 в положение M_2 направление ее движения вдоль кривой (касательной) по сравнению с участком M_0M_1 не меняется; не меняется и направление поворота касательной t_1.

Из рассмотрения рис. 104 видно, что характер движения точки по кривой l, выявленный для участков M_0M_1, M_1M_2, сохранится и на других участках M_2M_3, ... , $M_{n-1}M_n$. Все рассмотренные точки (M_0, M_1, M_2, ... , M_n) кривой l и проведенные через них касательные (t_0, t_1, t_2, ... , t_n) обладают общим свойством: направление движения точки вдоль кривой (и касательной) и направление поворота касательной не меняются.

Такие точки и проведенные через них касательные к кривой называют соответственно: *обыкновенной (регулярной) точкой* и *обыкновенной (регулярной) касательной*. Кривую l, состоящую только из регулярных точек, называют *плавной кривой*. На рис. 105 изображена плавная кривая и указаны принадлежащая ей регулярная точка M и проведенные через нее касательная и нормаль к кривой l.

Если направление движения точки или поворота касательной меняется, то мы будем иметь дело с *особой точкой* и *особой касательной*.

На рис. 106 показана кривая l и указаны принадлежащие ей точки M_0, M_1, M, M_2, M_3 с проведенными через них касательными t_0, t_1, t, t_2, t_3. Мы видим, что ни в одной из указанных точек направление их движения вдоль кривой не меняется. Что касается направления вращения касательной, то оно меняется на противоположное в точке M. Такую точку называют *точкой перегиба*. В точках перегиба касательная меняет вместе с направлением вращения и сторону кривой. Две ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной t и по разные стороны от нормали n.

На рис. 107 показана кривая l с особой точкой M, которая называется *точкой возврата первого рода или заостренной точкой*. В точках возврата первого рода две ветви кривой располагаются по одну сторону от нормали и по разные стороны от касательной.

Рис. 108 дает представление *о точке возврата второго рода**. Мы видим, что в точках возврата второго рода две ветви кривой расположены по одну сторону от общей для обеих ветвей касательной и по одну сторону от нормали. В точках возврата второго рода изменяется не только направление движения точки по кривой, но и направление вращения касательной.

Кроме отмеченных, к особым точкам кривой относятся:

а) *угловая точка* (рис. 109). В угловой точке (ее называют также точкой излома) направление кривой и касательной к ней изменяется "скачком", и поэтому кривая имеет в точке M две касательные и, соответственно, две различные нормали;

* Точку возврата второго рода называют также "клюв".

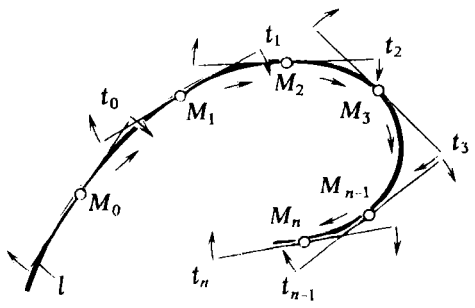


Рис. 104

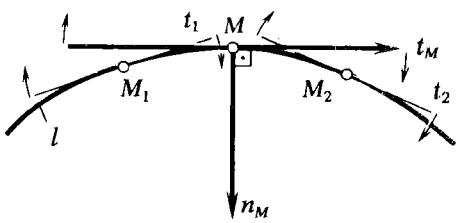


Рис. 105

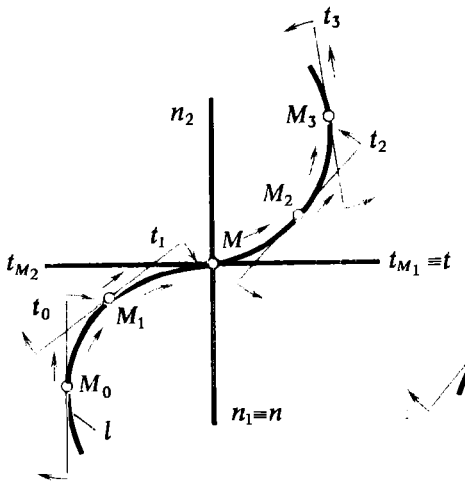


Рис. 106

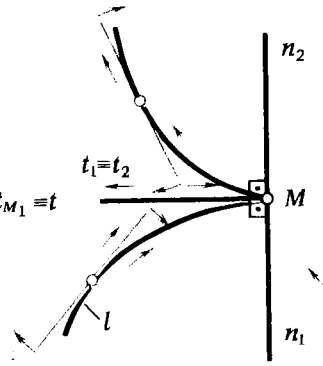


Рис. 107

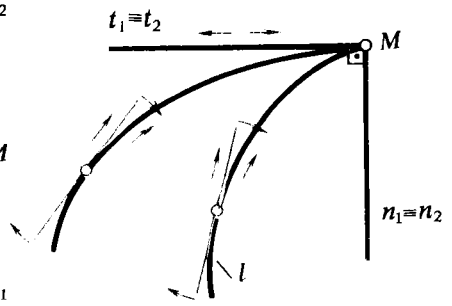


Рис. 108

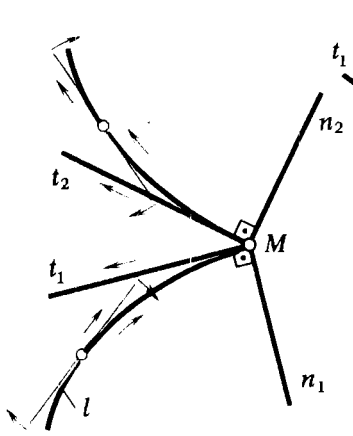


Рис. 109

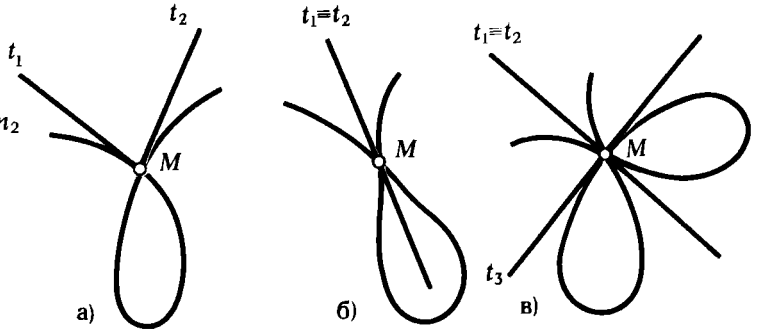


Рис. 110

б) *узел, или многократная точка* (рис. 110). В узловой точке кривая пересекает саму себя. В зависимости от числа самопересечений узловые точки могут быть: двойными, тройными и т. д. На рис. 110,*а* и *б* показаны двойные, на рис. 110,*в* — тройная точка.

§ 23. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЛИНИИ

Для построения ортогональных проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале. При задании кривой ее проекциями необходимо указать по крайней мере проекции одной точки, принадлежащей кривой. Действительно, если на проекциях кривой l (рис. 111) не указать проекции точки A (A', A''), то по одним только проекциям l' и l'' нельзя судить о форме кривой.

Следует также иметь в виду, что по двум ортогональным проекциям кривой нельзя сразу ответить на вопрос о том, какой кривой (плоской или пространственной) соответствуют данные проекции. Чтобы

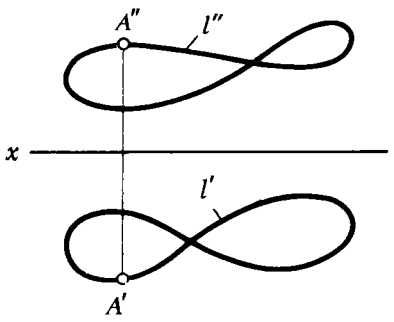


Рис. 111

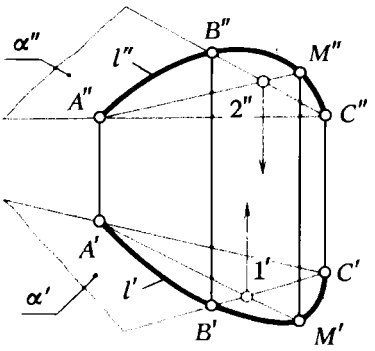


Рис. 112

установить, какая (плоская или пространственная) кривая линия задана на эпюре, необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости: если принадлежат — кривая плоская, в противном случае — пространственная. Заданная на рис. 112 кривая l — пространственная, так как точка M, взятая на кривой, не принадлежит плоскости α, определяемой тремя другими точками A, B, C этой кривой.

СВОЙСТВА КРИВЫХ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те свойства этих кривых, которые сохраняются (инвариантны) при проецировании. К таким свойствам относятся:

1. Касательные к кривой проецируются в касательные к ее проекциям.

2. Несобственным точкам кривой соответствуют несобственные точки ее проекции.

При проецировании плоских кривых в дополнение к отмеченным будут справедливы следующие свойства:

3. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой.

4. Число узловых точек (точек, в которых кривая пересекает саму себя) на проекции кривой равно числу узловых точек самой кривой*.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

Из пространственных кривых в технике находят широкое применение винтовые линии. Винтовую линию можно рассматривать как результат перемещения точки по поверхности вращения.

Если зафиксировать положение точки на поверхности прямого кругового цилиндра острием хорошо заточенного карандаша, а затем начать вращать цилиндр вокруг его оси и равномерно перемещать карандаш вдоль оси цилиндра, то острие карандаша опишет на цилиндрической поверхности пространственную кривую, называемую цилиндрической винтовой линией**. Ось цилиндрической поверхности будет

---

* Случаи, когда касательная проецируется в точку (свойство 1), а плоская кривая в прямую (свойства 3 и 4), не учитываются.

** Если движение точки будет происходить по поверхности вращения другого вида, например конической или сферической, то получим соответственно коническую и сферическую винтовые линии.

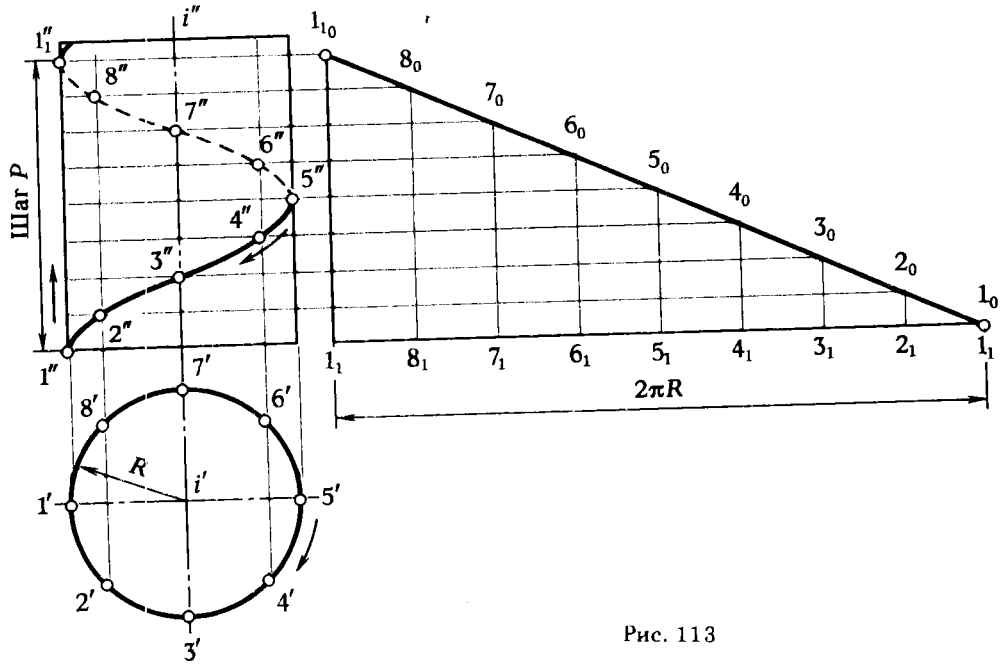


Рис. 113

осью винтовой линии, а радиус цилиндрической поверхности — радиусом винтовой линии.

Если вращение цилиндра и прямолинейное перемещение карандаша равномерны, то получим цилиндрическую винтовую линию, называемую *гелисой*, т. е. гелиса является траекторией движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно перемещающейся с постоянной скоростью вдоль этой оси. Величину P перемещения точки в направлении оси, соответствующую одному ее обороту вокруг оси, *называют шагом винтовой линии*.

Для построения проекции винтовой линии, в частности гелисы, предварительно строим проекции прямого кругового цилиндра (рис. 113). Окружность основания цилиндра (горизонтальная проекция гелисы) делим на одинаковое число равных частей. На такое же число частей делим шаг (на фронтальной проекции). Из точек деления окружности проводим линии связи, а через соответствующие точки деления шага —

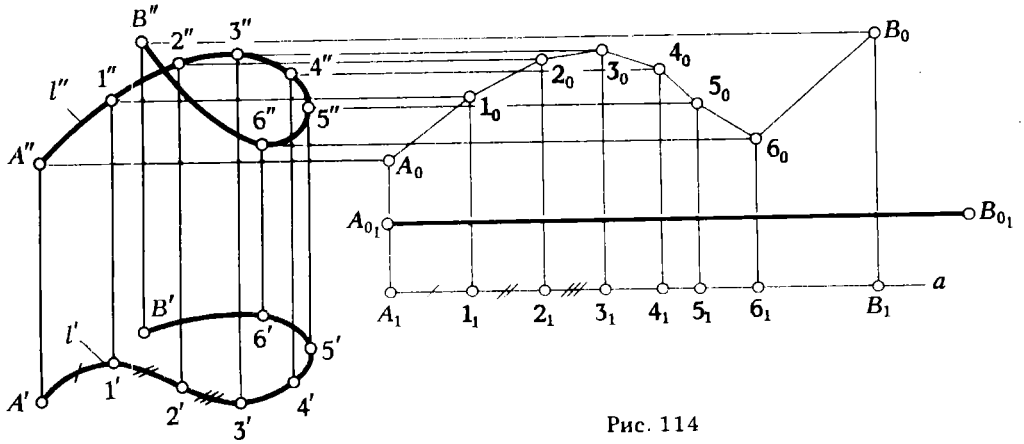


Рис. 114

горизонтальные прямые. Отмечаем точки $1''$, $2''$, $3''$, ... , $8''$, в которых пересекаются соответственные прямые. Соединив полученные точки ($1''$, $2''$, $3''$, ... , $8''$) плавной кривой, получим фронтальную проекцию винтовой линии. Цилиндрические винтовые линии подразделяют на правые и левые (с правым или левым ходом). Основанием для такого деления служит направление движения точки, "спускающейся" по винтовой линии. Если проекция этого направления на плоскость, перпендикулярную к оси винтовой линии, совпадает с направлением движения часовой стрелки, то винтовая линия — правого хода, в противном случае винтовую линию считают левой. На рис. 113 показана правая винтовая линия.

Гипотенуза треугольника $1_1 1_1 1_0 1_0$, изображенного на рис. 113 справа, является разверткой гелисы на протяжении ее шага. Цилиндрическая винтовая линия вполне определяется радиусом, шагом и ходом.

§ 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ПО ЕЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

На рис. 114 даны две проекции пространственной кривой l. Чтобы определить длину кривой, необходимо осуществить ее спрямление. Спрямление пространственной кривой, заданной ортогональными проекциями, осуществляется следующим путем:

1. Спрямляем горизонтальную проекцию кривой $A'B'$ в $[A_1B_1]$. Для этого намечаем на l' ряд точек $1'$, $2'$, $3'$, ... так, чтобы дуги, заключенные между этими точками, мало отличались по длине от стягивающих их хорд. Откладываем длины хорд $|A'1'|$, $|1'2'|$, $|2'3'|$, ... , $|6'B'|$ на горизонтальной прямой a в последовательности, которую они занимали на проекции кривой.

2. Из точек A_1, 1_1, 2_1, 3_1, ... , B_1 прямой a восставляем перпендикуляры и отмечаем точки их пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через соответствующие фронтальные проекции точек A'', $1''$, $2''$, $3''$, ... , B''.

3. Полученные точки пересечения A_0, 1_0, 2_0, 3_0, ... , B_0 укажут вершины ломаной линии, выпрямив которую, получим отрезок $[A_0{}_1B_0{}_1]$, равный длине пространственной кривой с точностью аппроксимации дуг кривой их хордами.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение пространственной и плоской кривой.
2. Что называется порядком алгебраической кривой и как можно определить его, если кривая (плоская или пространственная) задана графически?
3. Перечислите свойства кривой линии, инвариантные относительно параллельного проецирования.
4. Назовите "особые точки" кривой и дайте их определение.
5. Что такое соприкасающаяся плоскость?
6. Дайте определение трехгранника Френе.
7. Расскажите, как можно построить касательную к плоской кривой:

а) проходящую через заданную точку, не принадлежащую кривой;

б) проходящую через точку, заданную на кривой;

в) параллельную заданному направлению.

8. Что такое эвольвента и эволюта плоской кривой? Дайте определения и укажите основные свойства этих кривых.
9. Что называется кривизной плоской кривой в данной точке? Как можно определить ее графически?
10. Что такое шаг винтовой линии?
11. Как построить на чертеже цилиндрическую винтовую линию?
12. Как можно определить длину дуги пространственной кривой по ее ортогональным проекциям?

ГЛАВА IV

ПОВЕРХНОСТЬ

Мир поверхностей разнообразен и безграничен. Он простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости, до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся точному математическому описанию.

Без преувеличения можно сказать, что по разнообразию форм и свойств, по своему значению при формировании различных геометрических фигур, по той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур.

Естественно, что начертательная геометрия как наука, передающая результаты своих теоретических исследований в распоряжение инженера для их практического использования, не может обойти вниманием такие важные геометрические фигуры, какими являются поверхности.

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В математике *под поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида* $F(x, y, z) = 0$, *где* $F(x, y, z)$ — *многочлен n-й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции.* В первом случае поверхности называют *алгебраическими*, во втором — *трансцендентными*.

Если алгебраическая поверхность описывается уравнением n-й степени, то поверхность считается n-го порядка. Любая произвольно расположенная секущая плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка (иногда распадающейся или мнимой), какой имеет сама поверхность. Порядок поверхности может быть определен также числом точек ее пересечения с произвольной прямой, не принадлежащей целиком поверхности, считая все точки (действительные и мнимые).

В начертательной геометрии геометрические фигуры задаются графически, поэтому целесообразно рассматривать поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Образование поверхности с помощью линии позволяет дать иное определение поверхности, базирующееся на основных элементарных геометрических понятиях, таких, как точка и множество. Действительно, если принять, что положение движущейся в пространстве линии будет непрерывно меняться с течением времени t, и принять t за параметр, то поверхность можно рассматривать как непрерывное однопараметрическое множество линий. В свою очередь, линия определяется как непрерывное однопараметрическое множество точек, поэтому можно дать следующее определение поверхности: *поверхностью называется непрерывное двупараметрическое множество точек.*

§ 25. ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ЗАДАНИЕ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

Ранее отмечалось, что поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений некоторой линии g_j, перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Для получения наглядного изображения поверхности на чертеже (эпюре Монжа) закон перемещения линии g_j целесообразно задавать графически в виде совокупности линий $\{d, \ldots\}$ и указаний о характере перемещения линии g_j, при этом указания могут быть заданы также графически, в частности с помощью направляющей поверхности γ.

В процессе образования поверхности линия g_j может оставаться неизменной или менять свою форму. Подвижная линия g_j* называется *образующей*, неподвижные линии $\{d, \ldots\}$ ** и поверхность γ — *направляющими*.

Процесс образования поверхности может быть легко уяснен на примере, показанном на рис. 115. Здесь в качестве образующей взята плоская кривая $\tilde{g}_j$. Закон перемещения кривой $\tilde{g}_j$ задан двумя направляющими $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и плоскостью γ, при этом имеется в виду, что образующая $\tilde{g}_j$ скользит по направляющим $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$, все время оставаясь параллельной плоскости γ, а точка A, принадлежащая образующей $\tilde{g}_j$, перемещается по кривой $\tilde{d}_1$. Описанный способ образования поверхности называется *кинематическим*. Кинематическим способом можно образовать и с его помощью задать на чертеже разнообразные поверхности.

Каркас поверхности

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже является задание поверхности множеством принадлежащих ей точек или линий, при этом точки или линии выбираются так, чтобы они давали возможность с достаточной степенью точности определять форму поверхности и решать на ней различные задачи.

Упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности, называется ее каркасом.

---

* g — образующая, от латинского слова *genero* — образую, порождаю.
** d — направляющая, от латинского слова *dirigo* — направляю.

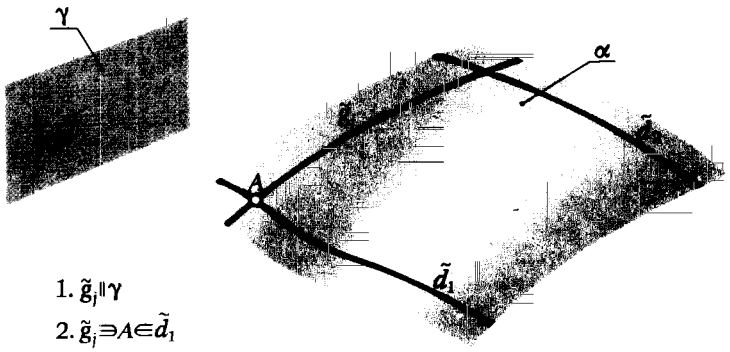


Рис. 115

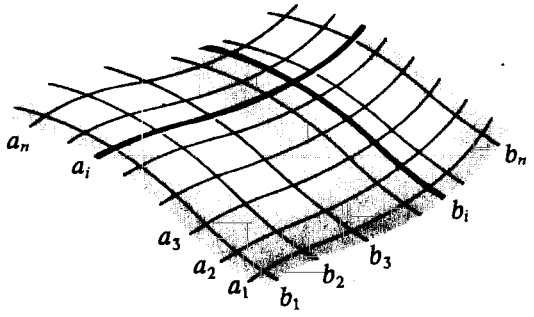


Рис. 116

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы подразделяют на *точечные* и *линейные*. Линейным каркасом называется множество линий, имеющих единый закон образования и связанных между собой определенной зависимостью. Условия, устанавливающие связь между линиями каркаса, называют *зависимостью каркаса*. Эта зависимость характеризуется некоторой изменяющейся величиной, называемой *параметром каркаса*. Линейный каркас считается *непрерывным*, если параметр каркаса — непрерывная функция, в противном случае он называется *дискретным*.

В качестве линий, образующих каркас, обычно берут семейство плоских кривых, полученных в результате сечения поверхности пучком параллельных плоскостей. В основе теории каркаса лежит положение о том, что *непрерывное однопараметрическое множество линий в пространстве задает поверхность, и, наоборот, всякая поверхность может быть представлена однопараметрическим множеством линий, свойства которых и закон их распределения в пространстве определяют свойства поверхности.*

Для того чтобы по каркасу можно было судить о форме поверхности и иметь возможность осуществлять расширение дискретного каркаса до непрерывного, поверхности следует задавать каркасом, образованным двумя семействами плоских сечений.

На рис. 116 показан каркас поверхности, состоящий из двух ортогонально расположенных семейств линий $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. При необходимости заданный каркас может быть расширен путем проведения дополнительных линий a_i и b_i в интервале между соседними линиями семейства $\{a \ldots\}$ и $\{b \ldots\}$ соответственно.

§ 26. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность с позиции кинематического способа ее образования рассматривают как множество всех положений движущейся линии (или поверхности). При таком подходе к образованию поверхности можно утверждать, что поверхность будет задана (определена), если в любой момент движения образующей будут известны ее положение и форма, а это, в свою очередь, позволит однозначно ответить на вопрос, принадлежит ли точка пространства данной поверхности или нет.

Кинематический способ образования поверхности подводит нас к понятию *определителя*, под которым мы будем подразумевать *необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность.* В число условий, входящих в состав определителя, должны быть включены:

1. Перечень геометрических фигур, участвующих в образовании поверхности.

2. Алгоритмическая часть, указывающая на взаимосвязь между этими фигурами.

Итак, определитель поверхности состоит из двух частей: из совокупности геометрических фигур (первая часть) и дополнительных сведений о характере изменения формы образующей и законе ее перемещения (вторая часть). Чтобы отличить первую (геометрическую) часть определителя от второй (алгоритмической) части, условимся заключать первую — в круглые, а вторую — в квадратные скобки; тогда в общем случае определитель поверхности будет иметь следующую структурную форму:

$$\Phi\,(\Gamma);\ [A]\,,$$

где (Г) — геометрическая часть, $[A]$ — алгоритмическая часть.

Для того чтобы определитель относился к конкретному виду поверхности, необходимо в каждую часть определителя вложить конкретное содержание.

Следует иметь в виду, что при задании поверхности можно в ряде случаев вместо геометрических элементов задавать числовые параметры. Например, любая сфера будет отличаться от всех других сфер только величиной радиуса R, поэтому, задавая число, указывающее значение R, мы определяем одну единственную сферу. Очевидно, числовым параметром конической поверхности вращения может служить $\angle\varphi^\circ$ — угол между образующей и осью конической поверхности*.

Параметры поверхности бывают двух видов: параметры формы и параметры положения.

Параметры, изменение которых вызывает изменение формы поверхности, называют параметрами формы.

Параметры, изменение которых приводит к изменению положения поверхности в пространстве, называют параметрами положения.

Сумма условий, определяющих совокупность всех независимых параметров поверхности, называется ее параметрическим числом.

Параметры формы. В только что рассмотренных случаях параметр R для сферы и $\angle\varphi^\circ$ для конической поверхности относятся к параметрам формы. Число параметров, изменяющих форму поверхности, может быть любым целым положительным числом, начиная с нуля. Так, например: число параметров формы для плоскости равно нулю; для сферы — единице. Если поверхность задана своим уравнением в канонической форме, все параметры формы входят в это уравнение.

Параметры положения. Число параметров, характеризующих положение поверхности в пространстве, не может быть меньше трех и больше шести. Так, например: для плоскости оно равно трем, для трехосного эллипсоида — шести.

Если уравнение, определяющее поверхность, составлено для произвольного положения поверхности, то оно содержит не только все параметры формы, но и все параметры положения, т. е. число независимых параметров уравнения в этом случае равно параметрическому числу поверхности.

Чтобы найти (установить) определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа ее образования. Так как поверхность может быть образована различными путями, очевидно одна и та же поверхность может иметь различные определители, например, поверхность прямого кругового цилиндра (цилиндрическую поверхность вращения) с кинематической точки зрения можно представить:

а) как след, оставляемый в пространстве прямой $\bar{g}$ при ее вращении вокруг оси i (рис. 117,*а*); при этом определитель цилиндрической поверхности вращения будет иметь вид

$$\Phi\,(\bar{g},\ i);\ [\bar{g}_j = R_i\,(\bar{g})]\,;$$

---

* В обоих случаях положение поверхности в пространстве не учитывалось.

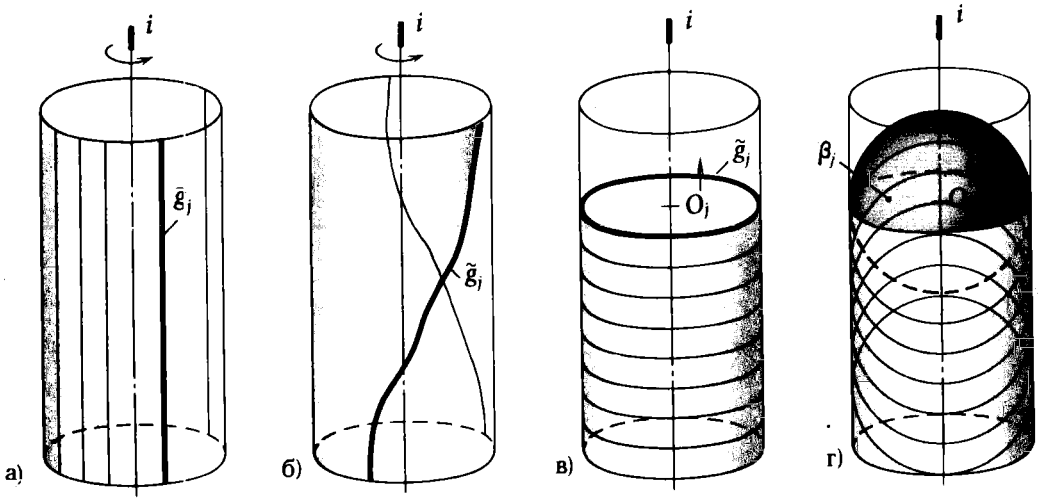


Рис. 117

б) как след от вращения кривой $\tilde{g}$, принадлежащей поверхности прямого кругового цилиндра, вокруг оси i (рис. 117,*б*); в этом случае определитель поверхности можно записать:

$$\Phi(\tilde{g};\ i);\ [\tilde{g}_j = R_i(\tilde{g})]^*;$$

в) как результат поступательного перемещения окружности $\tilde{g}$, при этом центр окружности O перемещается вдоль оси i, а ее плоскость α все время остается перпендикулярной к этой оси (рис. 117,*в*); тогда определитель поверхности можно записать:

$$\Phi(\tilde{g},\ i);\ [\tilde{g}_j = T_i(\tilde{g}) \wedge (O \in i) \wedge (\tilde{g} \subset \alpha \perp i)]^{**};$$

г) как огибающую всех положений сферической поверхности β, центр O которой перемещается по оси i (рис. 117,*г*); определитель в этом случае примет вид

$$\Phi(\beta,\ i);\ [\beta_j = T_i(\beta) \wedge (O \in i)].$$

Из множества определителей поверхности обычно выбирают наиболее простой; в рассматриваемом случае таким определителем будет

$$\Phi(\bar{g},\ i);\ [\bar{g}_j = R_i(\bar{g})].$$

§ 27. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Вы уже знаете, что две ортогональные проекции на две непараллельные плоскости однозначно определяют положение точки и положение и вид линии. Переходя к рассмотрению ортогональных проек-

---

* R_i — преобразование (рассматривается как вращение вокруг оси i), переводящее любые точки A и B в такие точки A_1 и B_1, что $|AB| = |A_1B_1|$.

** T_i — преобразование (рассматривается как параллельное перемещение), переводящее точки A и B в такие точки A_1 и B_1, что $|AB| = |A_1B_1|$.

ций поверхностей, мы обнаруживаем, что некоторые поверхности не могут быть заданы своими проекциями. В справедливости этого утверждения можно убедиться на примере проецирования простейшей поверхности — плоскости. Действительно, если мы будем проецировать все точки плоскости, занимающей произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, то проекции множества точек плоскости покроют полностью все плоскости проекций. Это произойдет потому, что плоскость является незамкнутой поверхностью — она может быть безгранично продлена в любом направлении.

Не только незамкнутые поверхности невозможно задать проекциями всех принадлежащих им точек, но и ряд замкнутых поверхностей при определенной ориентации их к плоскостям проекций не могут быть определены (заданы) ортогональными проекциями их точек, например, если ось поверхности кольца занимает положение, перпендикулярное к плоскости проекции, то кольцевую поверхность можно задать ее двумя ортогональными проекциями (рис. 118,*а*), но стоит только перевести ось кольца в наклонное положение, как задание этой поверхности двумя ортогональными проекциями (на те же плоскости проекций) становится невозможным (рис. 118,*б*).

Чтобы задать поверхность на чертеже, достаточно указать проекции не всего множества точек или линий, принадлежащих поверхности, а только некоторых из них, с помощью которых может быть установлено взаимно однозначное соответствие между образом (проекцией) и прообразом (объектом проецирования). Такими точками или линиями могут быть точки или линии, входящие либо в состав определителя поверхности, либо в ее каркас (точечный или линейный). В первом случае поверхность задается определителем, во втором — каркасом.

Задание поверхности проекциями ее определителя не всегда обеспечивает наглядность, а это, в свою очередь, затрудняет чтение чертежа, поэтому для получения наглядного изображения поверхности на эпюре

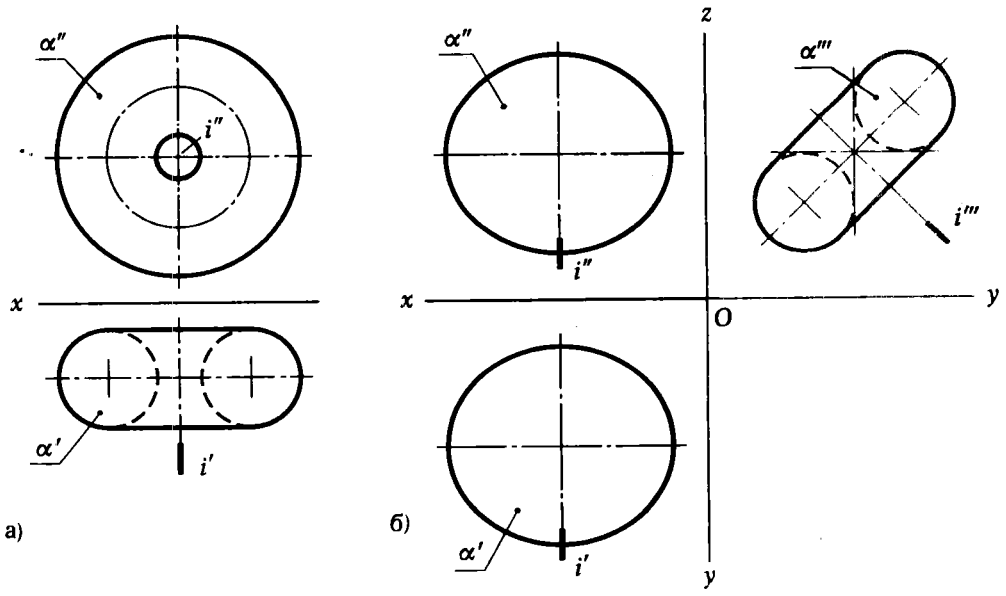


Рис. 118

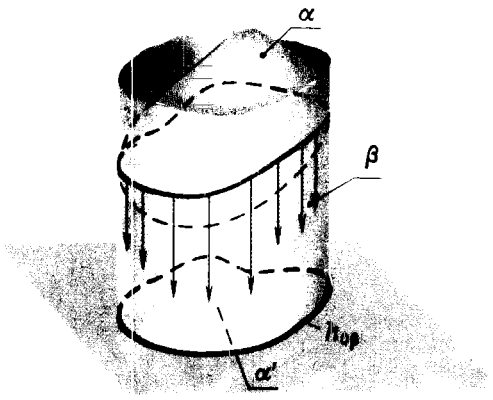


Рис. 119

Монжа в ряде случаев следует указывать *очерк* (очертание) этой поверхности.

Очерком поверхности (при ортогональном проецировании) *называют след на плоскости проекции проецирующей цилиндрической поверхности, которая огибает заданную поверхность.*

Рис. 119 дает наглядное представление о том, как получается очерк произвольной замкнутой поверхности α на горизонтальную плоскость проекции.

§ 28. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для того чтобы облегчить процесс изучения поверхностей, целесообразно осуществить их систематизацию, распределив все поверхности по классам, подклассам, группам и подгруппам.

При делении поверхностей на классы, подклассы, группы, подгруппы следует к одной классификационной категории относить поверхности, обладающие характерным признаком, который у поверхностей, входящих в другую категорию, отсутствует. Таким признаком может служить, в частности, единство способов образования поверхностей, т. е. тех условий, которые входят в определитель поверхности. Поэтому в основу систематизации поверхностей может быть положен их определитель.

Будем считать, что поверхности принадлежат одному классу, если они имеют одинаковое содержание геометрической части определителя. Используя этот критерий, все многообразие поверхностей можно отнести к двум классам:

класс I составляют поверхности, образующие $\widetilde{g_j}$ которых — кривые линии;

класс II объединяет поверхности, образованные прямой линией, т. е. $\overline{g_i}$ — прямая.

Поверхности, входящие в класс I, называются *нелинейчатыми* в отличие от поверхностей класса II, которые считаются *линейчатыми*.

При отнесении поверхностей к классам I или II во внимание принималась геометрическая часть определителя — вид линии, образующей поверхность. Условия алгоритмической части определителя, характеризующие закон движения образующей, позволяют выделить из классов I и II поверхностей три подкласса (рис. 120).

---

* Следует иметь в виду, что многообразие поверхностей и способов их получения не имеет предела, поэтому создать строгую систему для классификации поверхностей не представляется возможным. Более того, с геометрической точки зрения классификация поверхностей не может иметь научного обоснования. Что касается методики, используемой в процессе обучения, то здесь, напротив, всякая попытка систематизации материала, в том числе и рассматриваемого вопроса о классификации поверхностей, заслуживает самого серьезного внимания.

Подкласс 1 содержит поверхности, образованные поступательным перемещением образующей линии. Такие поверхности называют *поверхностями параллельного переноса.* Их определитель — $\Phi(g, d)$; $[g_j = T_d(g)]$ *.

Подкласс 2 составляют поверхности, образованные вращением образующей линии — *поверхности вращения.* Их определитель — $\Phi(g, i)$; $[g_j = R_i(g)]$ *.

Подкласс 3 включает поверхности, образованные винтовым перемещением образующей, — *винтовые поверхности.* Их определитель — $\Phi(g, i)$; $[g_j = T_i(g) \circ R_i(g)]$ **.

Поверхности подклассов 1, 2 и 3 имеют одинаковую геометрическую часть определителя. В зависимости от вида образующей (кривая или прямая) поверхности параллельного переноса, вращения и винтовые могут быть отнесены как к первому ($\tilde{g}$ — кривая) ***, так и ко второму ($\bar{g}$ — прямая) классам (см. рис. 120).

Каждый из классов I и II делится на группы А, Б, ... , которые могут быть подразделены на подгруппы а, б, ... В свою очередь, подгруппы состоят из отдельных видов поверхностей α, β, ... Критерии для деления на группы, подгруппы и виды также берутся из определителя по-

---

* Выражения $T_d(g)$ и $R_i(g)$ указывают на характер движения образующей g, так $T_d(g)$ — поступательное перемещение вдоль d, $R_i(g)$ — вращение вокруг i.

** Здесь $T_i(g) \circ R_i(g)$ — композиция из двух движений: параллельного перемещения вдоль оси и вращения вокруг оси i.

***Следует помнить, что образующая кривая $\tilde{g}$ не меняет своей формы.

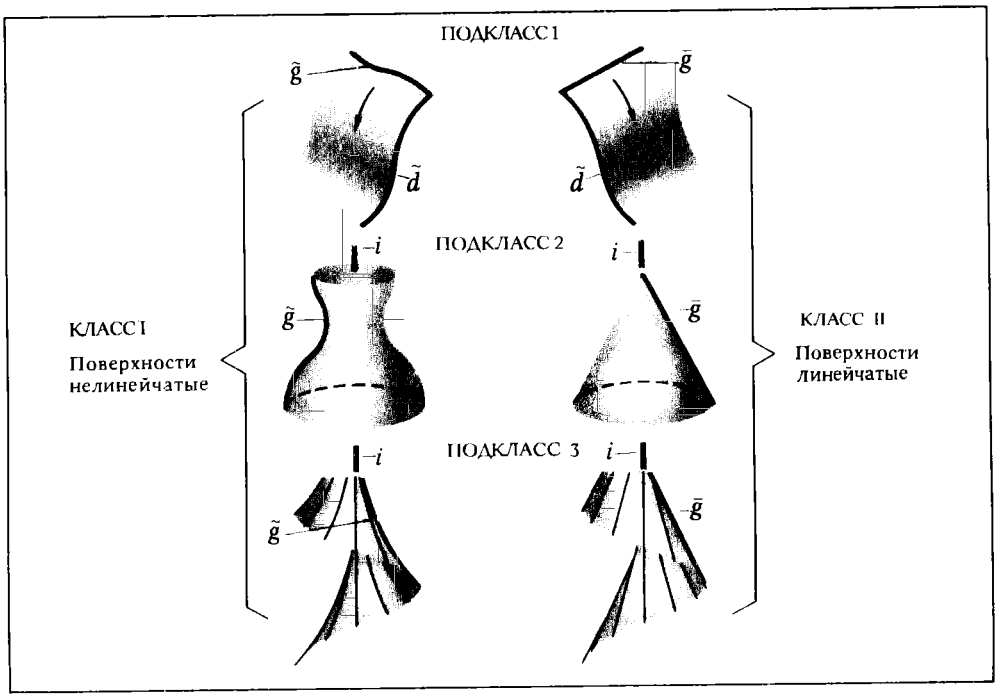


Рис. 120

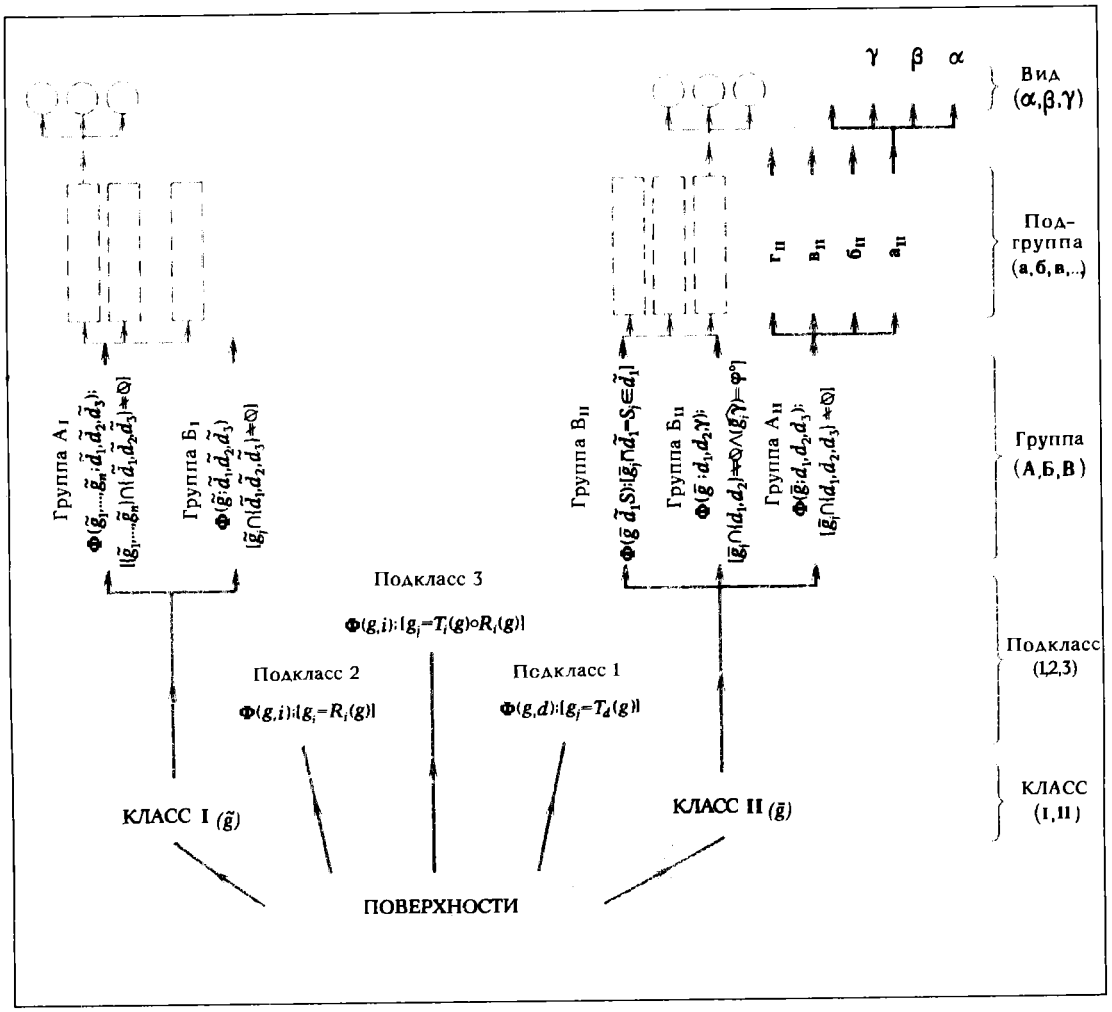


Рис. 121

верхности. На рис. 121 показана общая структура отнесения поверхностей к классам, подклассам, группам, подгруппам и видам. Из рис. 121 видно, что класс II (линейчатые поверхности) содержит три группы $А_{II}$, $Б_{II}$, $В_{II}$. Признаком для такого деления служит число направляющих линий:

группа $А_{II}$ — линейчатые поверхности с тремя направляющими

$$\Phi\,(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3)\,;\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing];$$

группа $Б_{II}$ — линейчатые поверхности с двумя направляющими (функции третьей направляющей выполняет направляющая плоскость γ)

$$\Phi\,(\bar{g};\ d_1, d_2, \gamma)\,;\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2\} \neq \varnothing \wedge (\widehat{g_j\gamma}) = \varphi^\circ];$$

группа $В_{II}$ — линейчатые поверхности с одной направляющей (ребром возврата); в этом случае все три направляющие "совпадают" с ребром возврата $\tilde{d}_1\,|\tilde{d}_1 \equiv \tilde{d}_2 \equiv \tilde{d}_3|$

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d})\,;\ [\bar{g} \sqcap \{\tilde{d}_1 \equiv \tilde{d}_2 \equiv \tilde{d}_3\} \neq \varnothing].$$

В свою очередь, каждая группа подразделяется на подгруппы. Так, группа A_{II} содержит четыре подгруппы (см. рис. 121):

$а_{II}$ — косой цилиндр с тремя направляющими

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \neq \varnothing],$$

все три направляющие $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3$ — кривые;

$б_{II}$ — дважды косой цилиндроид

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \bar{d}_3\} \neq \varnothing],$$

две направляющие $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ — кривые, $\bar{d}_3$ — прямая;

$в_{II}$ — дважды косой коноид

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\} \neq \varnothing];$$

одна направляющая $\tilde{d}_1$ — кривая, две $\bar{d}_2, \bar{d}_3$ — прямые;

$г_{II}$ — однополостный гиперболоид

$$\Phi(\bar{g};\ \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\} \neq \varnothing];$$

все три направляющие $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ — прямые.

Каждая из подгрупп включает отдельные виды поверхностей, например, в подгруппу $б_{II}$ входят: α — поверхность косого клина, β — поверхность дважды косого винтового цилиндроида и γ — поверхность косого перехода.

Рассмотрим более подробно поверхности, входящие в каждый из отмеченных классов и подклассов.

КЛАСС I

§ 29. НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗУЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ВИДА (ГРУППА A_I)

Эта группа поверхностей имеет единый по форме определитель

$$\Phi(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n;\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3);\ [\{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n\} \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \neq \varnothing]^*,$$

в котором $\tilde{g}_j$ — образующая переменного вида, d_1, d_2, d_3 — направляющие *.

Примечание. В ряде случаев закон перемещения образующей может быть задан не тремя, а двумя $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2)$ и даже одной $(\tilde{d}_1)$ направляющей. В двух последних случаях вместо отсутствующих направляющих указываются дополнительные условия.

В качестве примера можно привести поверхность α, показанную на рис. 115, у которой закон перемещения образующей g_j задан двумя направляющими $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и плоскостью γ, которая выполняет функции третьей направляющей d_3. Определитель этой поверхности имеет вид

$$\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \gamma);\ [\tilde{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2,\} \neq \varnothing \wedge (\widehat{\tilde{g}_j\gamma}) = 0^\circ) \wedge (\tilde{g}_j \ni A \in \tilde{d}_1)].$$

---

* Здесь, как и в определителе поверхностей групп $Б_I$, A_{II}, $Б_{II}$ (см. § 28, 30, 32, 33, 34), некоторые из направляющих d_1, d_2, d_3 могут быть не только кривыми $\tilde{d}$, но и прямыми $\bar{d}$ линиями.

Таблица 2. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида. Группа A_I; $\Phi(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n; \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$; $[\{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n\} \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \neq \varnothing]$

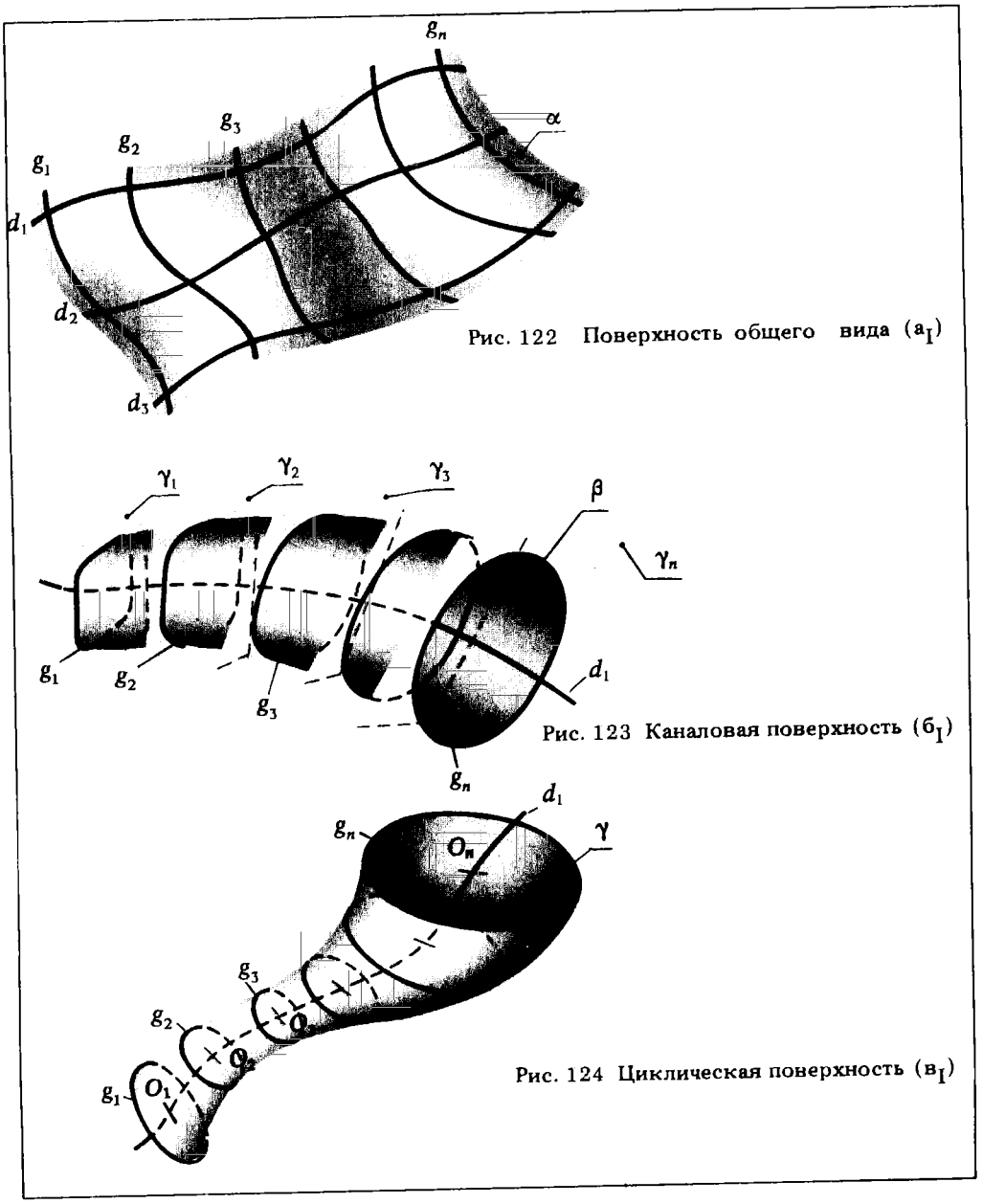


Рис. 122 Поверхность общего вида ($а_I$)

Рис. 123 Каналовая поверхность ($б_I$)

Рис. 124 Циклическая поверхность ($в_I$)

Смысловое значение алгоритмической части этого определителя может быть выражено следующим предложением: криволинейная образующая ($\tilde{g}$) пересекает направляющие $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ (пересечение $\tilde{g}_j$ с $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ является не пустым множеством $-\tilde{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2\} \neq \varnothing$) и образующая $\tilde{g}_j$ параллельна плоскости γ ($\widehat{\tilde{g}_j \gamma} = 0°$), а точка A, принадлежащая образующей $\tilde{g}_j$, скользит по направляющей $\tilde{d}_1$ ($\tilde{g}_j \ni A \in \tilde{d}_1$).

Другим примером может служить трубчатая поверхность β (см. рис. 126), у которой задана только одна направляющая $\tilde{d}_1$. Отсутствие направляющих $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$ компен-

сируется дополнительным условием, входящим в алгоритмическую часть определителя этой поверхности, которое заключается в том, что центр окружности O перемещается вдоль направляющей $\widetilde{d}_1$, а ее плоскость γ все время остается перпендикулярной к $\widetilde{d}_1$.

Рассматриваемая группа поверхностей включает в себя три подгруппы.

1. Подгруппа а$_I$ — *поверхность общего вида* α (табл. 2, рис. 122). *Такая поверхность может быть образована перемещением произвольной* (плоской или пространственной) *кривой* $\widetilde{g}_j$ *по направляющим* $\widetilde{d}_1$, $\widetilde{d}_2$, d_3. *В процессе движения образующая* $\widetilde{g}_j$ *все время меняет свою форму, принимая вид* $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2$, $\widetilde{g}_3$, ..., $\widetilde{g}_n$;

2. Подгруппа б$_I$ — каналовая поверхность β (табл. 2, рис. 123). *Каналовой поверхностью называют поверхность, образованную непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве.* Площади этих сечений могут оставаться постоянными или монотонно изменяться в процессе перехода от одного сечения к другому. В инженерной практике наибольшее распространение получили два способа ориентирования плоскостей образующих:

1) параллельно какой-либо плоскости — каналовые поверхности с плоскостью параллелизма;

2) перпендикулярно к направляющей линии — прямые каналовые поверхности.

Каналовая поверхность может быть использована для создания переходных участков между двумя поверхностями типа трубопроводов, имеющих:

а) различную форму, но одинаковую площадь нормального сечения;

б) одинаковую форму, но различные площади сечения;

в) различную форму и различные площади поперечных сечений.

3. Подгруппа в$_I$ — *циклическая поверхность* γ (табл. 2, рис. 124). Циклическую поверхность можно рассматривать как частный случай каналовой поверхности. *Она образуется с помощью окружности, центр которой перемещается по криволинейной направляющей. В процессе движения радиус окружности монотонно меняется.*

§ 30. НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОСТОЯННОГО ВИДА (ГРУППА Б$_I$)

Определитель таких поверхностей имеет вид

$$\Phi(\widetilde{g};\ \widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3);\ [\widetilde{g}_j \cap \{\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3\} \neq \varnothing],$$

где $\widetilde{g}$ — образующая, $\widetilde{d}_1$, $\widetilde{d}_2$, $\widetilde{d}_3$ — направляющие.

Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида (группа Б$_I$) содержит две подгруппы.

1. Подгруппа г$_I$ — поверхность общего вида (табл. 3, рис. 125) *образуется произвольной* (плоской или пространственной) *кривой* $\widetilde{g}$, *характер перемещения которой определяется формой и положением направляющей* d_1 *и дополнительным условием* (на рис. 125 оно состоит в том, что *точка* $A \in \widetilde{g}$ *скользит по направляющей* d_1, *а бинормаль кривой* $\widetilde{g}$ *в точке* A *принадлежит спрямляющей плоскости* γ *кривой* d_1).

Таблица 3. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида. Группа $Б_I$; $\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$; $[\tilde{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\} \neq \varnothing]$

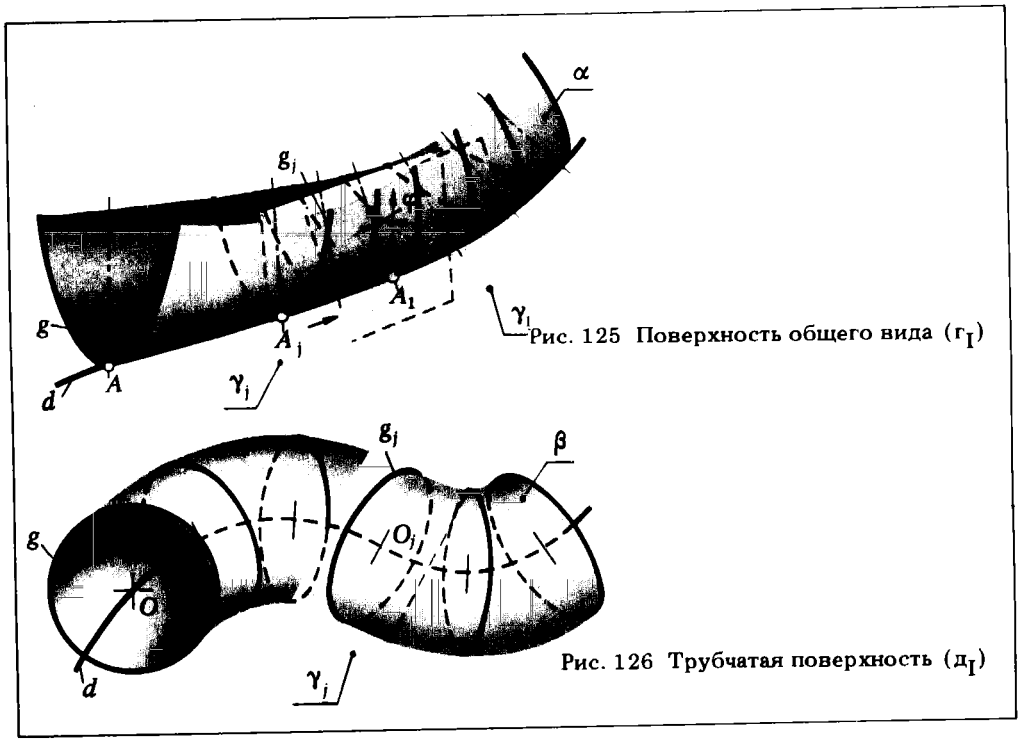


Рис. 125 Поверхность общего вида ($г_I$)

Рис. 126 Трубчатая поверхность ($д_I$)

2. Подгруппа $д_I$ — трубчатая поверхность (табл. 3, рис. 126). Трубчатая поверхность является частным случаем циклической и каналовой поверхностей. Она обладает свойствами, присущими этим видам поверхностей. У циклической поверхности она позаимствовала форму образующей, а у каналовой — закон движения этой образующей.

Итак, *трубчатая поверхность может быть получена при движении окружности постоянного радиуса по криволинейной направляющей; плоскость окружности все время остается перпендикулярной к направляющей.*

КЛАСС II

§ 31. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями. Действительно, пусть даны три пространственные кривые линии $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$ (рис. 127). Возьмем на кривой $\tilde{d}_1$ произвольную точку M, примем ее за вершину конической поверхности α, а за направляющую этой поверхности примем дугу кривой $\tilde{d}_3$. Если N — точка пересечения дуги кривой $\tilde{d}_2$ с поверхностью α, то (MN) пересечет дугу кривой d_3 в точке L. То, что (MN) обязательно пересечет дугу кривой $\tilde{d}_3$, не вызывает сомнения, так как (MN) и кривая d_3 принадлежит одной и той же поверхности α. Из рис. 127 видно, что через точку M, взятую на направляющей $\tilde{d}_1$, проходит одна прямолиней-

ная образующая $\bar{g}$, пересекающая две другие направляющие $\widetilde{d}_2$ и $\widetilde{d}_3$*. Задавая другое положение точки $M \to M_1$ и принимая точку M_1 за вершину конической поверхности, мы получим при той же направляющей $\widetilde{d}_3$ отсек новой конической поверхности α_1, которую дуга кривой $\widetilde{d}_2$ пересечет в точке N_1. Точки M_1 и N_1 определяют прямую (M_1N_1), которая пересечет третью направляющую $\widetilde{d}_3$ в точке L_1. (M_1L_1) — новая образующая g_1 линейчатой поверхности.

Описанным способом можно построить любое число прямолинейных образующих, которые выделят в пространстве одну единственную линейчатую поверхность. Следует иметь в виду, что нельзя за направляющие брать три различные по форме и произвольно расположенные линии. Произвольно можно задавать только две направляющие, форму и положение третьей направляющей выбирают так, чтобы она находилась внутри конгруенции** прямых, определяемой двумя уже взятыми направляющими.

Чтобы третья направляющая принадлежала линейчатой поверхности, она должна входить внутрь конгруенции, определяемой первыми двумя направляющими. Иными словами, задав дуги двух направляющих линей-

---

* Несмотря на то, что кривые $\widetilde{d}_1$, $\widetilde{d}_2$ и $\widetilde{d}_3$, показанные на рис. 127, будут кратными (через точку M проходит не одна, а $n_2 \times n_3$ образующих, где n_2 — порядок кривой $\widetilde{d}_2$, n_3 — порядок кривой $\widetilde{d}_3$), мы рассматриваем случай, когда линия d_1 пересекает коническую поверхность α, заданную точкой M и направляющей $\widetilde{d}_3$, только один раз. Такое допущение возможно в том случае, если рассматривать не всю поверхность α, а только ее отсек, в формировании которого принимает участие не вся кривая $\widetilde{d}_3$, а только ее дуга $\overset{\frown}{1\ 2}$.

**Под конгруенцией прямых подразумевается множество прямых, зависящих от двух параметров. Например, если взять две произвольные кривые $\widetilde{d}_1$ и $\widetilde{d}_2$ (рис. 128) и на кривой $\widetilde{d}_1$ отметить точку M, приняв ее за вершину конической поверхности с направляющей $\widetilde{d}_2$, то мы получим множество прямых (образующих конической поверхности), проходящих через точку $M \in d_1$, и одну из точек, принадлежащих множеству, определяющему линию $\widetilde{d}_2$. Если принять, что точка M будет перемещаться по кривой $\widetilde{d}_1$, последовательно занимая положения M_1, M_2, M_3, ... , M_n, то мы получим новые конические поверхности α_1, α_2, α_3, ... , α_n, прямолинейные образующие которых заполнят некоторый отсек пространства. Множество всех прямых — образующих конических поверхностей, за вершины которых взяты последовательно все точки одной линии $\widetilde{d}_1$ ($\widetilde{d}_2$), а за направляющую принята вторая линия $\widetilde{d}_2$ ($\widetilde{d}_1$), является двупараметрическим множеством, т. е. конгруенцией.

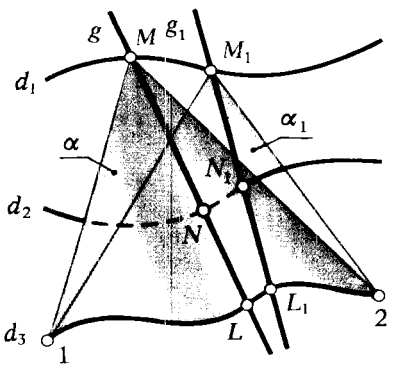


Рис. 127

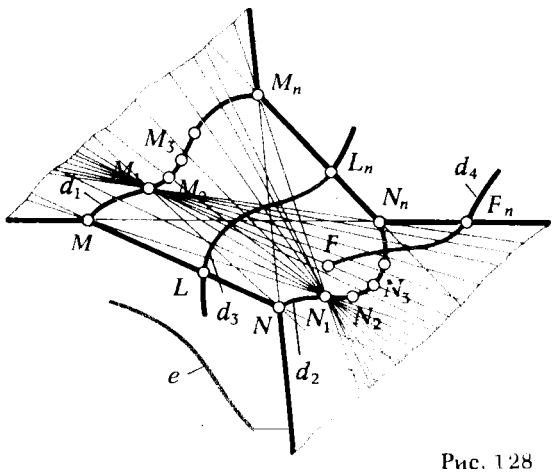


Рис. 128

чатой поверхности, мы определяем область ее существования. На рис. 128 эта область ограничена линиями красного цвета. Очевидно, дуга кривой $\tilde{d}_3$, ограниченная точками L и L_{n_2}, будет принимать участие совместно с дугами кривых $\tilde{d}_1$ ($\widehat{MM_n}$) и $\tilde{d}_2$ ($\widehat{NN_n}$) в образовании линейчатой поверхности ($\widehat{LL_n}$ лежит внутри конгруенции). Кривая $\tilde{d}_4$ может быть использована в качестве третьей направляющей только на участке $\widehat{FF_n}$ (т. е. в той части, которая лежит внутри конгруенции).

Кривая e, не погруженная в область конгруенции прямых, не будет принадлежать линейчатой поверхности и, следовательно, не может быть принята за третью направляющую*.

Теперь, после того как мы познакомились с требованием к заданию третьей направляющей линейчатой поверхности, можно перейти к рассмотрению различных групп этих поверхностей и, в частности, рассмотреть задание их на чертеже, а также возможности использования в технике.

§ 32. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ТРЕМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ (ГРУППА A_{II})

Классификация линейчатых поверхностей и их распределение по группам и подгруппам в рамках общей схемы классификации поверхностей (см. рис. 121) в зависимости от вида определителя, содержащего информацию о числе направляющих, показаны на рис. 129.

* Мы рассматриваем случай, когда образующие будут действительными прямыми.

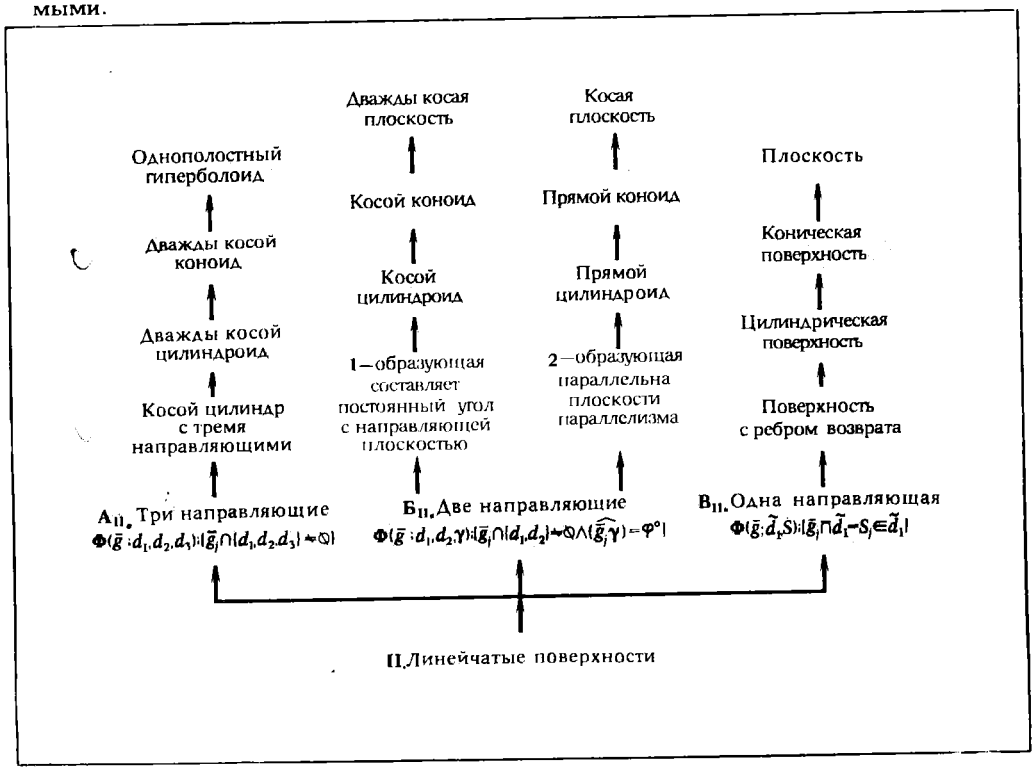


Рис. 129

Из рис. 129 видно, что все многообразие линейчатых поверхностей может быть отнесено к трем группам:

группа A_{II} — линейчатые поверхности с тремя направляющими;

группа $Б_{II}$ — линейчатые поверхности с двумя направляющими;

группа B_{II} — линейчатые поверхности с одной направляющей. Рассмотрение линейчатых поверхностей начнем с группы A_{II}. Определитель этой наиболее общей группы линейчатых поверхностей имеет вид

$$\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing],$$

где $\bar{g}$ — прямая, образующая, d_1, d_2 и d_3 — направляющие.

Таблица 4. Линейчатые поверхности с тремя направляющими. Группа A_{II}; $\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, d_3);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2, d_3\} \neq \varnothing]$

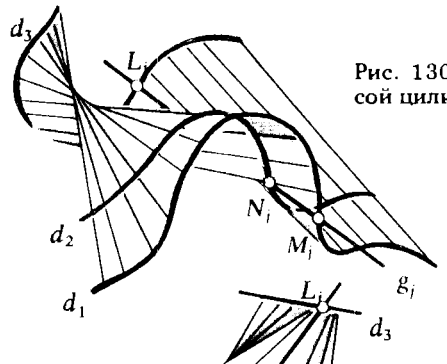


Рис. 130 Поверхность общего вида (косой цилиндр с тремя направляющими)

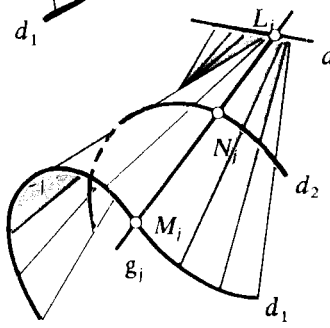


Рис. 131 Дважды косой цилиндроид

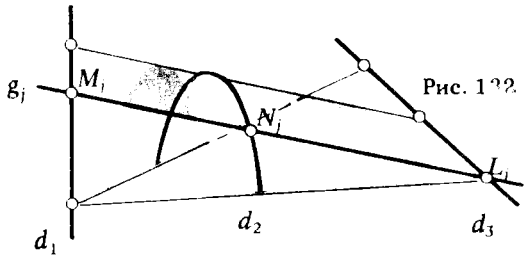


Рис. 132 Дважды косой коноид

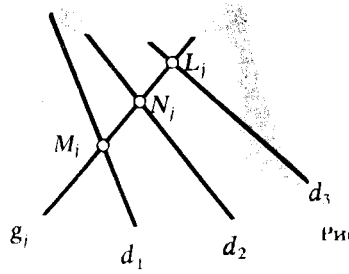


Рис. 133 Однополостный гиперболоид

В зависимости от формы направляющих и их расположения в пространстве можно получить различные поверхности этой группы, которые могут быть отнесены к четырем подгруппам (табл. 4, рис. 130 ... 133).

1. **Поверхность косого цилиндра с тремя направляющими** (см. табл. 4, рис. 130). Эта поверхность может быть задана на эпюре Монжа проекциями трех криволинейных направляющих и пересекающей их прямолинейной образующей.

2. **Поверхность дважды косого цилиндроида** (см. табл. 4, рис. 131). Она образуется в том случае, когда две из трех направляющих кривые, а третья — прямая линия. В инженерной практике находят применение частные случаи поверхностей этого вида.

Поверхность косого клина. Эта поверхность получается в том случае, когда все три направляющие расположены в параллельных плоскостях, причем криволинейные направляющие — гладкие кривые. Поверхность косого клина используется при конструировании поверхности крыла летательного аппарата (рис. 134). При этом достигаются хорошие технологические условия изготовления его каркаса.

Поверхность косого перехода. Для образования поверхности косого перехода в качестве криволинейных направляющих берут дуги окружностей одинакового радиуса, расположенные в параллельных плоскостях, а в качестве третьей направляющей — прямую, перпендикулярную к плоскостям окружностей и проходящую через середину отрезка, который соединяет центры окружностей (рис. 135). Поверхности косого перехода применяются в архитектуре и строительной практике.

3. **Поверхность дважды косого коноида** (см. табл. 4, рис. 132). Эта поверхность образуется в том случае, когда одна из трех направляющих кривая, а две другие — прямые линии.

4. **Поверхность однополостного гиперболоида** (см. табл. 4, рис. 133). Поверхность однополостного гиперболоида может быть получена при движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости.

На рис. 136 поверхность однополостного гиперболоида задана прямыми направляющими $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ и показаны образующие $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ и $\bar{g}_3$. Определение положения образующей рассмотрим на примере построения прямой $\bar{g}_1$. На направляющей $\bar{d}_1$ отмечаем произвольную точку *1* (*1'*, *1''*). Эта точка совместно с направляющей $\bar{d}_2$ (прямая $\bar{d}_2$ для упрощения геометрических построений принята горизонтально проецирующей) определяет плоскость β. Находим точку $2 = \bar{d}_3 \cap h_{0\beta}$. Точки *1* и *2* определяют образующую $\bar{g}_1$. Аналогично находят проекции прямых $\bar{g}_2$ и $\bar{g}_3$.

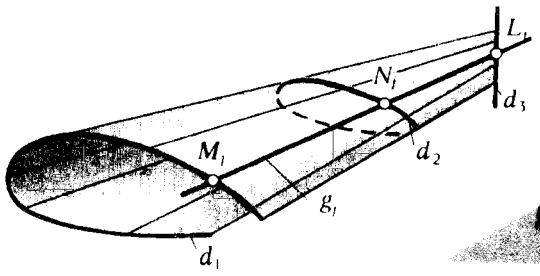


Рис. 134

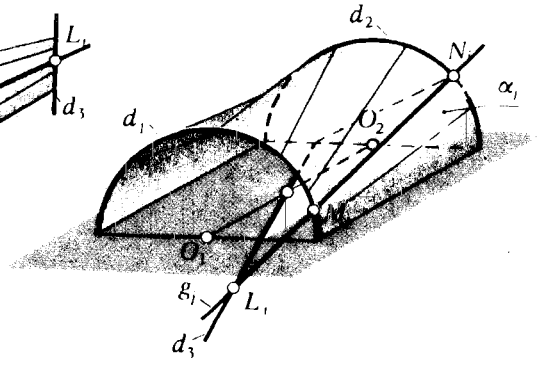


Рис. 135

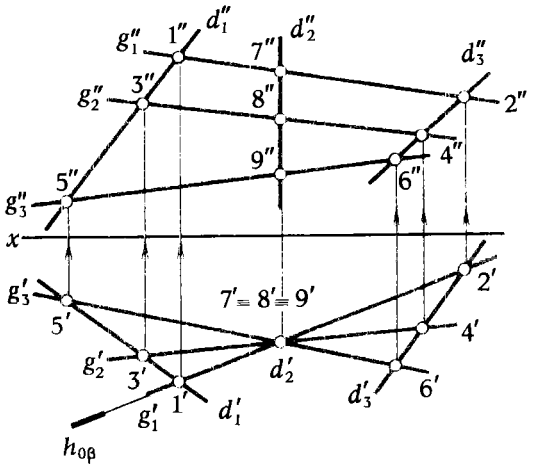


Рис. 136

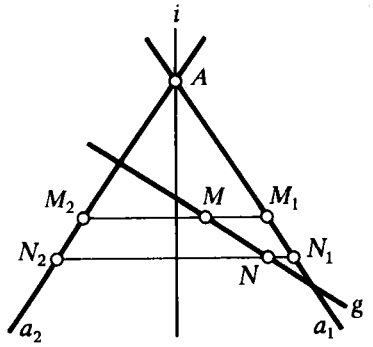


Рис. 137

Поверхность однополостного гиперболоида обладает одним замечательным свойством: направляющие $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ можно принять за образующие, а образующие $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ считать направляющими, при этом получится та же самая поверхность, т. е. определители

$$\Phi(\bar{g};\ \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3);\ [\bar{g}_j \cap \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\} \neq \varnothing],$$
$$\Phi(\bar{d};\ \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3);\ [d_j \cap \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\} \neq \varnothing]$$

тождественны. Иными словами, в однополостном гиперболоиде имеются два семейства прямолинейных образующих, причем образующие одного семейства не пересекаются между собой, но каждая из образующих одного семейства пересекает все образующие другого семейства.

Можно представить случай, когда три прямолинейные образующие могут быть совмещены друг с другом путем вращения вокруг некоторой оси. В этом случае вся поверхность может быть образована вращением только одной из трех образующих вокруг этой оси. Покажем, что при этом получается поверхность однополостного гиперболоида.

Пусть прямая g (рис. 137) вращается вокруг оси i (прямая g и ось i скрещивающиеся). Проведем прямую a, пересекающую ось i в точке A. Прямые a и i определяют меридиональную плоскость поверхности, которая образуется вращением прямой g. При вращении прямой a вокруг оси i образуется коническая поверхность вращения, заданная на чертеже двумя положениями образующей a_1, a_2 и осью i. Прямая g, не параллельная этой конической поверхности, пересечет ее в двух точках. Допустим, что этими точками будут M и N. При вращении прямая g пересечет прямые a_1 и a_2 в точках M_1, N_1 и M_2, N_2, т. е. произвольная прямая меридиональной плоскости пересекает меридиан поверхности в двух точках. Это говорит о том, что меридиан этой поверхности — кривая второго порядка.

Ось i меридиана не пересекает, но является для него осью симметрии. Это, в свою очередь, говорит о том, что меридиан поверхности — кривая второго порядка — гипербола, а прямая i — ее мнимая ось. Мы показали, что в частном случае линейчатая поверхность с тремя скрещивающимися прямолинейными направляющими пересекается плоскостью, проходящей через ось поверхности, по гиперболе; отсюда и произошло

название этой поверхности — *однополостный гиперболоид вращения**. Плоскость, перпендикулярная к оси однополостного гиперболоида, пересекает его по эллипсу, в частном случае — по окружности (при пересечении однополостного гиперболоида вращения).

Практически для построения проекций однополостного гиперболоида вращения необходимо: построить проекции двух окружностей, расположенных в двух параллельных плоскостях; разделить проекции окружностей на произвольное равное число частей (рис. 138); затем соединить прямой линией точку $1_1''$ нижней окружности с любой (кроме $1_2''$) точкой верхней окружности. На чертеже 138 точка $1_1''$ соединена с точкой $3_2''$, точка $2_1''$ с $4_2''$ и т. д. Соединив все точки деления нижней окружности с точками деления верхней окружности, получим проекции каркаса поверхности. Второе семейство линий каркаса этой поверхности может быть образовано, если соединить первую точку верхней окружности с третьей точкой нижней окружности ($1_2''$ с $3_1''$), точку $2_2''$ с точкой $4_1''$, $3_2''$ с $5_1''$ и т. д.

Поверхность однополостного гиперболоида вращения широко используется в технике, в частности, для передачи вращения при скрещивающихся осях с помощью зубчатых или фрикционных гипербоидальных колес. Особенно широкое применение эта поверхность нашла в строительстве. Одним из примеров может служить башня Шухова, построенная в Москве для установки антенны радиостанции "Коминтерн" — первой мощной радиостанции в Советском Союзе.

Гиперболический параболоид. В частном случае, когда прямолинейная образующая скользит по трем скрещивающимся прямым (направляющим), параллельным одной плоскости, получается поверхность, называемая гиперболическим параболоидом. Такому названию эта поверхность обязана тем, что при пересечении ее плоскостями в сечениях получаются гипербола и парабола.

Поверхность гиперболического параболоида обладает одним замечательным свойством, состоящим в том, что не только ее направляющие параллельны одной плоскости, но и образующие, скользящие по этим направляющим, также параллельны некоторой плоскости. Чтобы убедиться в справедливости этого высказывания, докажем следующую теорему.

Если прямая перемещается в пространстве по трем прямым, параллельным одной и той же плоскости, то она будет двигаться, все время оставаясь параллельной некоторой другой плоскости.

Пусть даны три скрещивающиеся направляющие прямые d_1, d_2 и d_3, параллельные горизонтально проецирующей плоскости γ (рис. 139). Чтобы не загромождать чертежа лишними геометрическими построениями, будем считать, что образующие гиперболического параболоида принадлежат фронтально проецирующим плоскостям β_1, β_2 и β_3. При таких условиях образующие g_1, g_2, g_3 определяются соответственно точками *1* и *2*, *3* и *4*, *5* и *6* пересечения направляющих с плоскостями β_1, β_2, β_3. Построим $[3'7']$, конгруентный и параллельный отрезку $[5'6']$, и проведем прямую $7'4'$. Из чертежа видно, что $\Delta\ 2'3'7' \cong \Delta\ 5'6'8'$, так как стороны этих треугольников параллельны, а сторона $3'7'$ $\Delta\ 3'2'7'$ конгруентна стороне $5'6'$ $\Delta\ 5'6'8'$.

Из конгруентности треугольников следует $[2'7'] \cong [5'8']$, но $[5'8'] \cong [1'4']$ (как параллельные между параллельными), следовательно, $[2'7'] \cong [1'4']$. Отсюда вытекает, что отрезки $[1'2']$ и $[4'7']$ конгруентны

---

* Поверхность однополостного гиперболоида вращения можно получить также вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

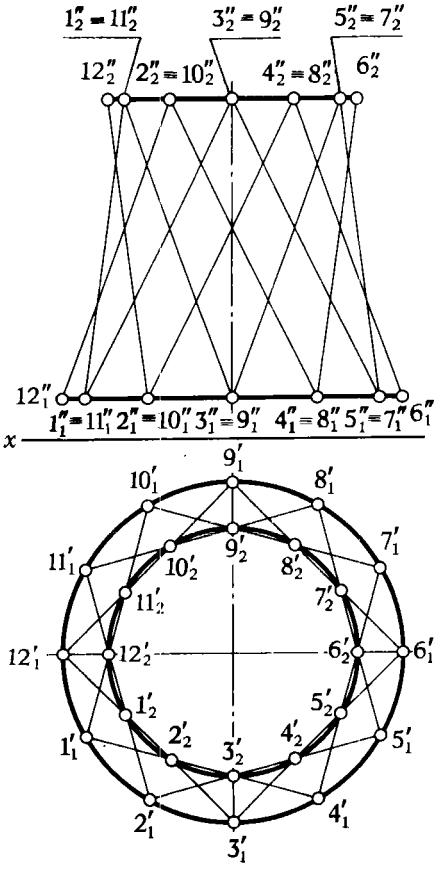


Рис. 138

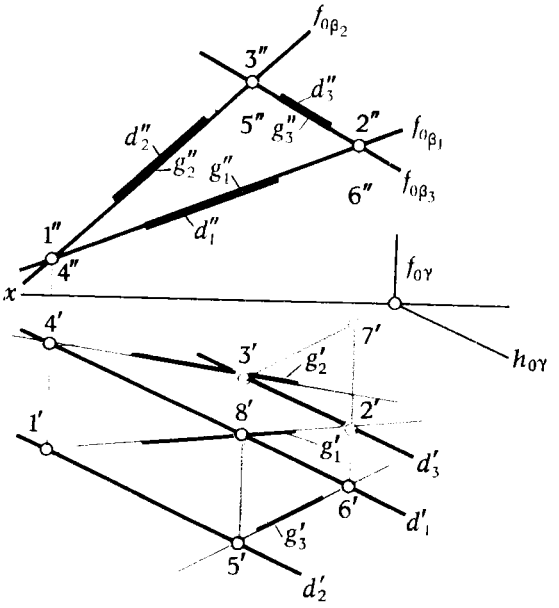


Рис. 139

и параллельны. Прямые g_1 и g_3 как параллельные соответствующим сторонам $\Delta\ 3'4'7'$ параллельны его плоскости; третья образующая g_2 принадлежит плоскости этого треугольника.

Из изложенного следует, что произвольно взятые образующие гиперболического параболоида параллельны некоторой плоскости. Это, в свою очередь, говорит о том, что на поверхности гиперболического параболоида имеется два семейства прямых линий, каждое из которых параллельно своей плоскости, т. е. эта поверхность так же, как и поверхность однополостного гиперболоида, имеет две плоскости параллелизма. Если плоскости параллелизма взаимно перпендикулярны, то гиперболический параболоид называют прямым, если не перпендикулярны, то поверхность называют наклонной. Для образования одной и той же поверхности безразлично, из какого семейства взяты прямые за направляющие. В рассматриваемом примере можно за направляющие принять скрещивающиеся прямые g_1, g_2, g_3, параллельные плоскости $\Delta\ 3'4'7'$, тогда образующими поверхности окажутся прямые d_1, d_2, d_3.

§ 33. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ (ГРУППА Б$_{II}$)

Движение прямой — образующей по трем направляющим, не единственный способ образования линейчатой поверхности. Только что доказанная теорема убедительно подтверждает справедливость такого высказывания. Из этой теоремы вытекает важное следствие: *линей-*

чатая поверхность может быть однозначно определена двумя направляющими и плоскостью параллелизма.

В этом случае определитель линейчатой поверхности примет вид

$$\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \gamma);\ [\bar{g}_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2,\} \neq \varnothing \wedge (\widehat{\bar{g}_j\gamma}) = \varphi^\circ)].$$

Здесь γ — *направляющая плоскость*. В частном случае, если угол между $\widehat{\bar{g}_j\gamma} = 0^\circ$ (образующая параллельна плоскости γ), то γ называют плоскостью параллелизма.

Пусть будут заданы две произвольные кривые d_1 и d_2 и плоскость γ. Можно задать такой закон перемещения прмолинейной образующей g_j, при котором она, скользя по линиям d_1 и d_2, все время сохраняет постоянный $\angle\varphi^\circ$ с плоскостью γ. Плоскость γ заменяет ту третью направляющую, которая образуется множеством точек пересечения движущейся прямолинейной образующей g_j с плоскостью γ.

В рассматриваемую группу поверхностей входят три подгруппы: а) *цилиндроиды*, б) *коноиды*, в) *косые плоскости*.

Перечисленные подгруппы поверхностей могут быть отнесены к двум разновидностям:

поверхности, образованные с помощью направляющей плоскости;

поверхности, в создании которых принимала участие плоскость параллелизма.

К первой разновидности относятся косые линейчатые поверхности (косой цилиндроид, косой коноид, дважды косая плоскость); ко второй — прямые линейчатые поверхности (прямой цилиндроид, прямой коноид, косая плоскость). Поверхности с плоскостью параллелизма называются поверхностями Каталана*. Из линейчатых поверхностей с двумя направляющими рассмотрим только поверхности Каталана, так как именно эти поверхности находят широкое применение в технике.

§ 34. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ НАПРАВЛЯЮЩИМИ И ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА (ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛАНА)

При формировании линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма образующие должны быть параллельны этой плоскости, поэтому они пересекаются с ней в несобственных точках, множество которых определяет несобственную прямую; эту прямую следует рассматривать как третью направляющую линейчатой поверхности, т. е. плоскость параллелизма является как бы собственным представителем несобственной прямой. Образование линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма является частным случаем общего способа формирования линейчатой поверхности с двумя направляющими.

Определитель для группы поверхностей Каталана имеет вид

$$\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, \gamma);\ [\bar{g}_j \cap \{d_1, d_2\} \neq \varnothing \wedge (\widehat{\bar{g}_j\gamma} = 0^\circ)].$$

Для задания поверхности этой группы на эпюре Монжа достаточно указать проекции направляющих d_1 и d_2 и положение плоскости параллелизма γ (табл. 5, рис. 140 ... 142).

---

* По имени бельгийского математика Каталана (*Katalan*), исследовавшего свойства этих поверхностей.

Т а б л и ц а 5. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма. Группа $Б_{II}$; $\Phi(\bar{g};\ d_1, d_2, \gamma)$; $[g_j \cap \{d_1, d_2\} \nvdash \nvdash \Phi \wedge (\widehat{\bar{g}\gamma} = 0^\circ)]$

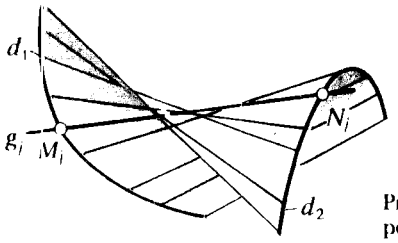
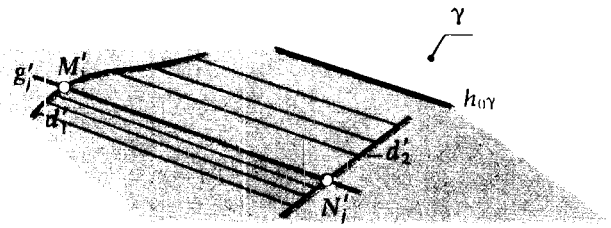


Рис. 140 Поверхность прямого цилиндроида



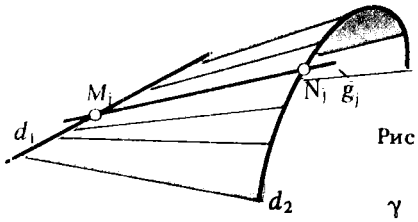
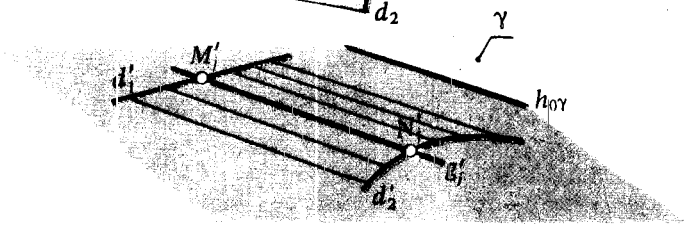


Рис. 141 Поверхность прямого коноида



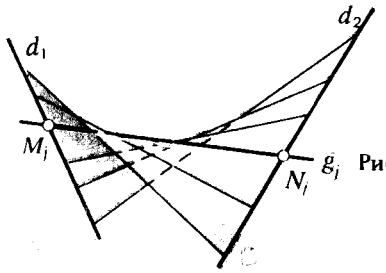
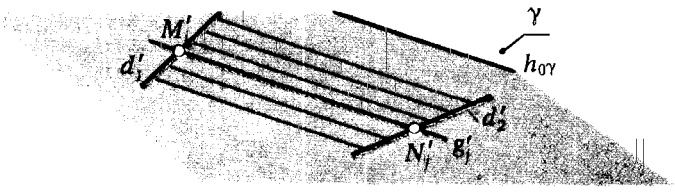


Рис. 142 Косая плоскость



1. **Поверхность прямого цилиндроида** (см. табл. 5, рис. 140). Поверхность прямого цилиндроида образуется в том случае, когда направляющие d_1 и d_2 гладкие кривые линии, причем одна из них должна принадлежать плоскости, перпендикулярной плоскости параллелизма.

Для определения проекций прямолинейных образующих поверхности прямого цилиндроида достаточно провести прямые, параллельные плоскости параллелизма. На рис. 143 показано построение образующей g_j.

Вначале проводим g'_j, определяем точки M' и N', по ним находим M'' и N''. (MN) проводим параллельно плоскости параллелизма γ; для этого достаточно, чтобы $(M'N') \parallel h_{0\gamma}$.

Поверхность прямого цилиндроида находит применение в инженерной практике, в частности, она используется при изготовлении воздухопроводов большого диаметра.

2. **Поверхность прямого коноида** (см. табл. 5, рис. 141). Отличие поверхности коноида от цилиндроида состоит только в том, что одна из направляющих линий коноида — прямая. Поэтому для задания поверхности коноида на эпюре Монжа необходимо указать проекции: кривой $\tilde{d}_2$ (одна направляющая), прямой $\bar{d}_1$ (вторая направляющая) и плоскости параллелизма γ. Если прямолинейная направляющая перпендикулярна плоскости параллелизма, то мы будем иметь дело с частным случаем поверхности, которая называется *прямым коноидом*.

Для получения проекционного чертежа (эпюра Монжа), обладающего наглядностью, следует указать проекции не одной, а ряда прямолинейных образующих этой поверхности. Для этого проводим несколько прямых, параллельных плоскости параллелизма γ и пересекающих направляющие $\bar{d}_1$ и $\tilde{d}_2$. На рис. 144 показано построение произвольной образующей g_j. Чтобы прямая g_j была параллельна плоскости параллелизма γ, необходимо, чтобы она была параллельна прямой, принадлежащей плоскости γ. Так как плоскость γ горизонтально проецирующая, то горизонтальные проекции всех прямых, принадлежащих этой плоскости, совпадают с горизонтальным следом плоскости $h_{0\gamma}$. Поэтому построение частной образующей поверхности коноида начинаем

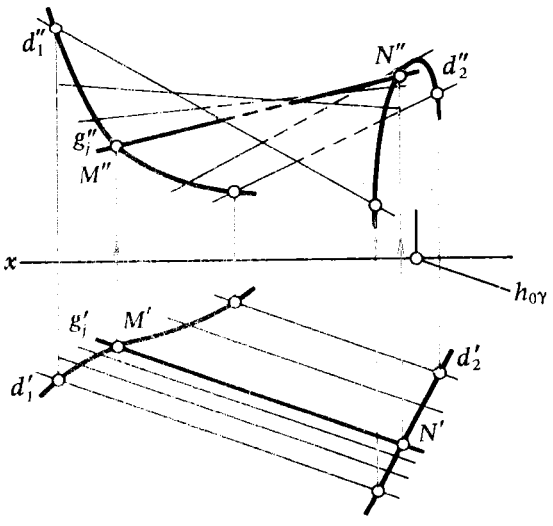


Рис. 143

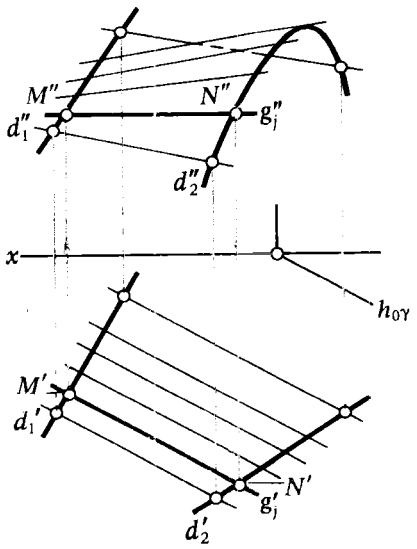


Рис. 144

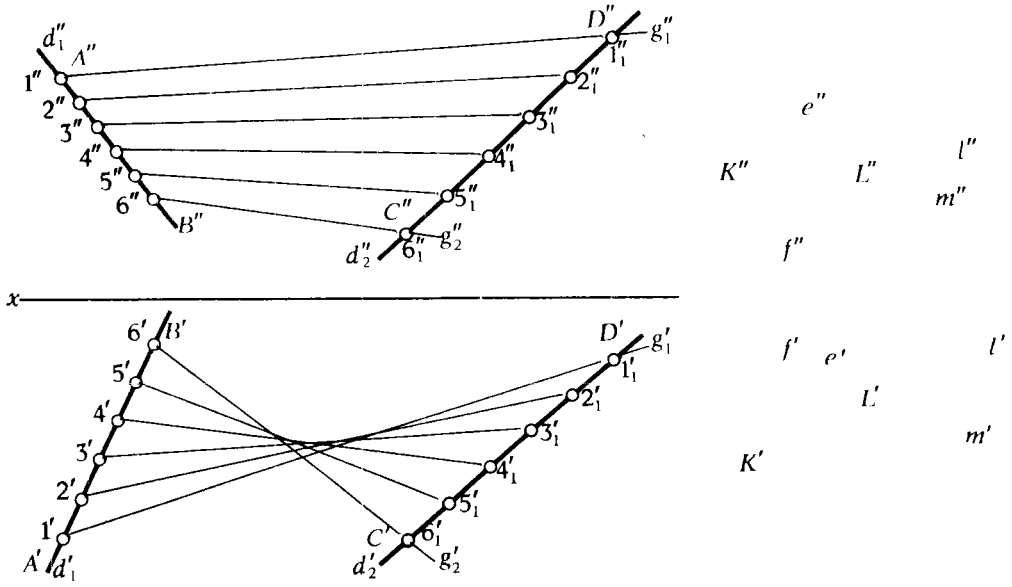


Рис. 145

с проведения ее горизонтальной проекции g'_j, причем $g'_j \parallel h_{0\gamma}$ [на основании инвариантного свойства 2г (см. § 6) ортогонального проецирования]. Отмечаем точки M' и N', в которых горизонтальная проекция образующей g'_j пересекает горизонтальные проекции направляющих d'_1 и d'_2, по M' и N' находим точки M'' и N'', которые определяют фронтальную проекцию прямой g''_j.

Поверхность прямого коноида используется в гидротехническом строительстве для формирования поверхности устоев мостовых опор.

3. **Поверхность гиперболического параболоида** — косая плоскость (см. табл. 5, рис. 142). Гиперболический параболоид может быть получен при скольжении прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим, при этом образующая все время остается параллельной плоскости параллелизма. Гиперболический параболоид имеет две плоскости параллелизма, соответствующие двум семействам прямолинейных направляющих. Если плоскости параллелизма перпендикулярны друг другу, то гиперболический параболоид называют прямым. В инженерной практике гиперболический параболоид часто называют *косой плоскостью*.

Для задания на чертеже косой плоскости достаточно указать проекции двух скрещивающихся прямых $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ и положение плоскости параллелизма γ. Для получения проекционного чертежа, обладающего наглядностью, обычно указывают проекции нескольких прямолинейных образующих, для этого:

1) на направляющих $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ выделяют отрезки $[AB]$ и $[CD]$;

2) делят проекции отрезков $[AB]$ и $[CD]$ на произвольное число равных частей (на рис. 145 проекции точек деления обозначены $1'$, ... , $6'$; $1''$, ... , $6''$ и $1'_1$, ... , $6'_1$; $1''_1$, ... , $6''_1$);

3) одноименные проекции точек деления соединяют прямыми.

Задавая таким путем косую плоскость, мы не пользовались плоскостями параллелизма. Если требуется определить их положение, то достаточно через произвольную точку K провести прямые e и f, параллельные соответственно прямым $\bar{d}_2$ и $\bar{d}_1$. Вторая плоскость паралле-

лизма (для семейства направляющих g_1 и g_2) определяется пересекающимися прямыми l и m ($l \parallel g_1$, $m \parallel g_2$).

Косая плоскость находит широкое применение в инженерно-строительной практике для формирования поверхностей откосов насыпей железных и автомобильных дорог, набережных гидротехнических сооружений в местах сопряжения откосов, имеющих различные углы наклона.

4. **Плоскость.** Если направляющие прямые d_1 и d_2 пересекаются или параллельны, то при движении по ним прямолинейной образующей g получается плоскость. Изображение плоскости на эпюре Монжа и различные варианты ее расположения по отношению к плоскостям проекций были подробно рассмотрены в § 8 гл. I.

§ 35. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОДНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ — ТОРСЫ (ГРУППА $В_{II}$)

Рассматриваемая в этом параграфе группа линейчатых поверхностей с одной криволинейной направляющей называется *торсами*, а криволинейная направляющая таких поверхностей — *ребром возврата**.

Поверхностью с ребром возврата (торсом) называют поверхность, описываемую движением прямой — образующей g, касающейся некоторой пространственной кривой — направляющей $\tilde{d}$.

Торсы обладают замечательным свойством — они могут быть совмещены с плоскостью без складок и разрывов, путем последовательных ее изгибов по прямолинейным образующим. В связи с этим можно дать и другое определение поверхности торса. *Торсом называют линейчатую поверхность, которую можно совместить всеми ее точками с плоскостью без складок и разрывов.* Такие поверхности называют также развертывающимися поверхностями.

Если ребро возврата вырождается в точку, то получается частный вид торса — *коническая поверхность* (если точка собственная) или *цилиндрическая поверхность* в случае вырождения ребра возврата в несобственную точку.

Итак, к рассматриваемой группе линейчатых поверхностей относятся:

1) поверхность с ребром возврата (табл. 6, рис. 146);

2) поверхность коническая (табл. 6, рис. 147);

3) поверхность цилиндрическая (табл. 6, рис. 148).

В частном случае торсовые поверхности преобразуются в плоскость. Для этого достаточно, чтобы ребро возврата $\tilde{d}_1$ преобразовалось в плоскую кривую, а направляющая d_1 конической или цилиндрической поверхности — в прямую линию. Определитель этой группы поверхностей имеет вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1,\ S);\ [\bar{g}_j \sqcap \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1\,].$$

Рассмотрим более подробно каждую из отмеченных поверхностей.

1. Поверхность с ребром возврата. Образование этой поверхности можно представить таким образом. Пусть даны плавная кривая d и точка S, причем $S \in \alpha \supset d$ (рис. 149). Разделим кривую d на n участков, границы которых отметим точками 1, 2, 3, ... , n. Проведем прямую $S1$ и отложим на ней от точки S вниз $[SS_1]$. Конец отрезка S_1 соединим прямой с точкой $2 \in d$, получим отсек конической поверхности $S_1\,1\,2$.

---

* Ребро возврата следует рассматривать как кривую, в которой "совпадают" все три криволинейные направляющие линейчатой поверхности $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3$.

Т а б л и ц а 6. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы. Группа B_{II}; $\Phi(\bar{g};\ \tilde{d}_1, S)$; $[g_j \sqcap \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1]$

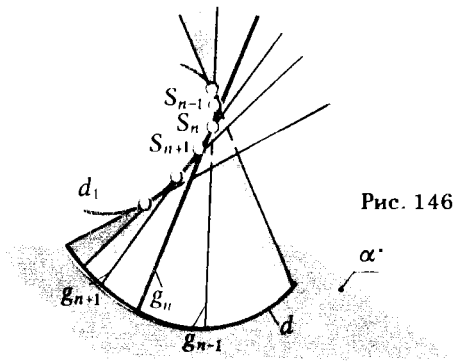


Рис. 146 Поверхность с ребром возврата

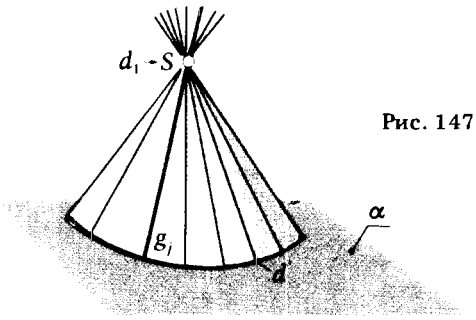


Рис. 147 Коническая поверхность

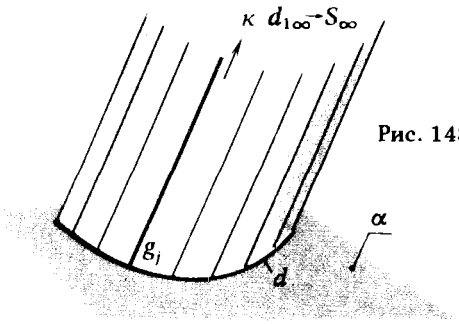


Рис. 148 Цилиндрическая поверхность

На прямой $(S_1 2)$ откладываем $[S_1 S_2]$ и конец отрезка S_2 соединяем с точкой $3 \in d$ — вновь получаем отсек конической поверхности $S_2 23$. Повторяя описанные операции n раз, мы получим n следующих один за другим отсеков конических поверхностей с вершинами в точках $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$. Если уменьшить длину отрезков $[SS_1]$, $[S_1 S_2]$, $[S_2 S_3]$, ... , $[S_n - {}_1 S_n]$, то ломаная линия $SS_1 S_2 S_3 \ldots S_n$ в пределе превратится в плавную пространственную кривую d_1, называемую ребром возврата, а прямолинейные звенья этой ломаной линии перейдут в касательные к кривой d_1. Непрерывное множество этих касательных образует поверхность с ребром возврата (торс).

Из рис. 146 видно, что поверхность с ребром возврата имеет две полы. Ребро возврата служит границей этих пол. Так как в каждой точке плавной кривой можно провести только одну касательную, то

при задании поверхности с ребром возврата направляющую — кривую d можно не указывать. Поэтому определитель такой поверхности будет иметь вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1,\ S);\ [\bar{g}_j \pitchfork \tilde{d}_1 = S_j \in \tilde{d}_1\,],$$

где $\tilde{d}_1$ — пространственная плавная кривая — ребро возврата, $\bar{g}$ — прямая — образующая, S — точка, принадлежащая кривой $\tilde{d}_1$. Условие, отражающее закон движения прямолинейной образующей, состоит в том, что она, двигаясь вдоль ребра возврата, все время остается касательной к нему.

В машиностроении находит применение частный вид торсовой поверхности, у которой ребром возврата служит цилиндрическая винтовая линия. Полученную с помощью этой линии поверхность называют *винтовым торсом*. На рис. 150 показаны ортогональные проекции отсека поверхности винтового торса.

2. Коническая поверхность. Все прямолинейные образующие конической поверхности пересекаются в собственной точке S. Это условие соблюдается лишь в том случае, когда ребро возврата $\tilde{d}_1$ вырождается в собственную точку S (см. рис. 147). Определитель конической поверхности имеет вид

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d}_1,\ S);\ [\bar{g}_j \cap \tilde{d}_1 \neq \varnothing \wedge \cap \bar{g}_j = S].$$

Приведенная символическая запись определителя конической поверхности показывает, что эта поверхность однозначно определяется прямолинейной образующей, кривой направляющей и точкой S, при этом прямолинейная образующая пересекает направляющую ($\bar{g}_j \cap \tilde{d} \neq \varnothing$ — пересечение g_j и $\tilde{d}$ не пустое множество) и все образующие пересекаются в одной точке ($\cap\, g_j = S$).

На рис. 151 показано задание конической поверхности на эпюре Монжа. Проекции образующих g_1, g_2, g_3, ... , g_n на рис. 151 указаны только для наглядности. Коническая поверхность однозначно задается проекциями ее образующей, направляющей и вершиной ($g_j d$, S).

3. Цилиндрическая поверхность получается в том случае, когда все прямолинейные образующие пересекаются в несобственной точке S_∞.

В этом случае определитель поверхности может быть записан:

$$\Phi\,(\bar{g};\ \tilde{d},\ S_\infty);\ [\bar{g}_j \cap \tilde{d} \neq \varnothing \wedge \cap \bar{g}_j = S_\infty].$$

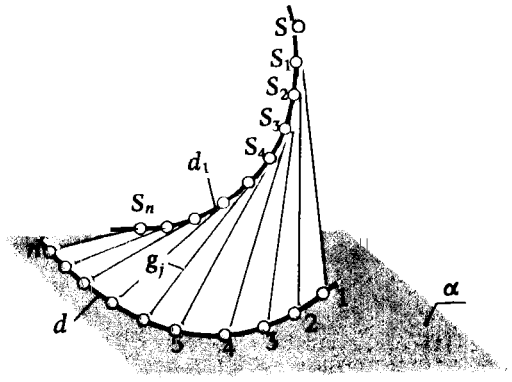


Рис. 149

Отличие определителя цилиндрической поверхности от определителя конической поверхности состоит лишь в том, что образующие цилиндрической поверхности параллельны (пересекаются в несобственной точке), в то время как для конической поверхности характерным является пересечение всех ее прямолинейных образующих в собственной точке.

На рис. 148 (табл. 6) показана произвольная цилиндрическая поверхность. Рис. 152 дает представление о ее задании на эпюре Монжа.

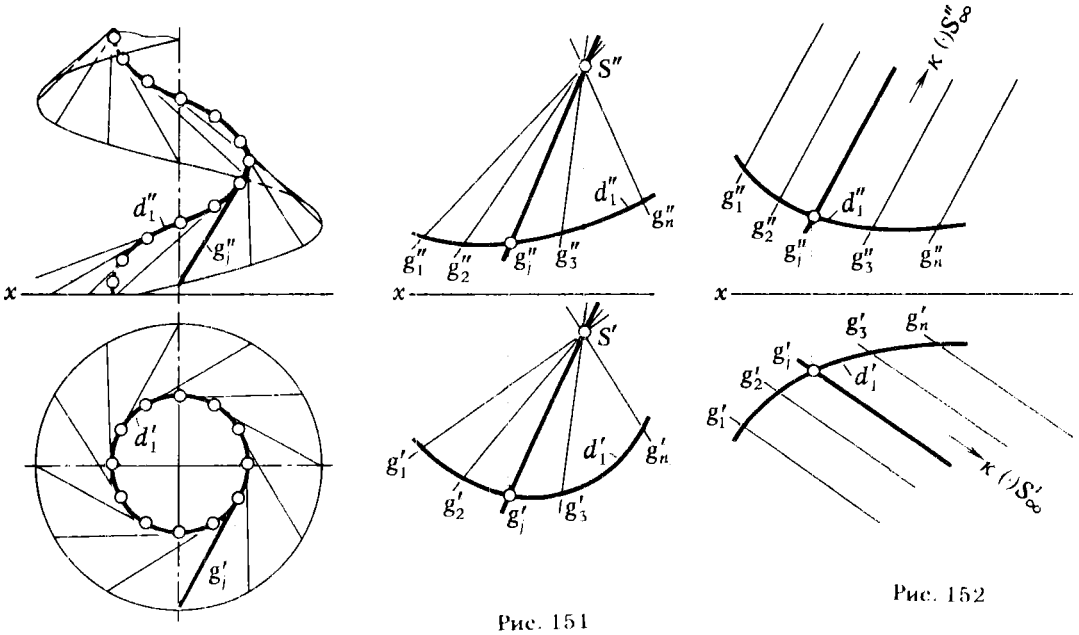


Рис. 150

Рис. 151

Рис. 152

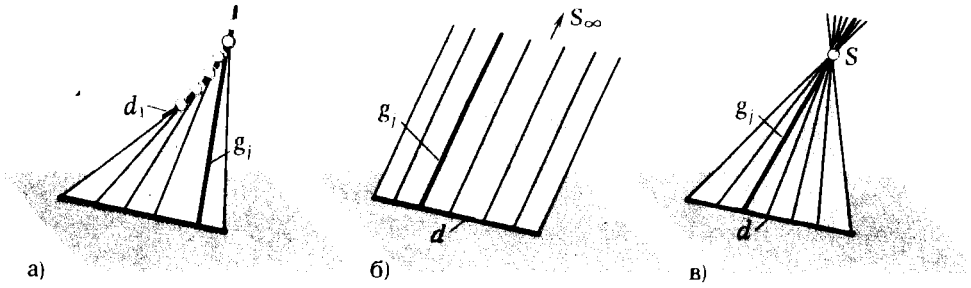


Рис. 153

4. **Плоскость.** Раньше было отмечено, что частным случаем торсовых поверхностей является плоскость, и указаны условия, при которых поверхность с ребром возврата, коническая и цилиндрическая преобразуются в плоскость. Рис. 153 дает наглядное представление об этих преобразованиях.

§ 36. ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА (ПОДКЛАСС 1)

Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным перемещением плоской линии, при этом образующие поверхности все время остаются параллельными между собой.

Рис. 154 дает представление об образовании такой поверхности. Ввиду того, что поверхности параллельного переноса несут на себе семейства параллельных кривых линий, уместно напомнить, какой смысл вкладывается в понятие параллельные кривые линии. Под параллельными кривыми линиями подразумеваются линии, получаемые одна из другой путем параллельного переноса принадлежащих им точек на некоторое одинаковое расстояние. Например, на рис. 155 кривая $\bar{g}$ парал-

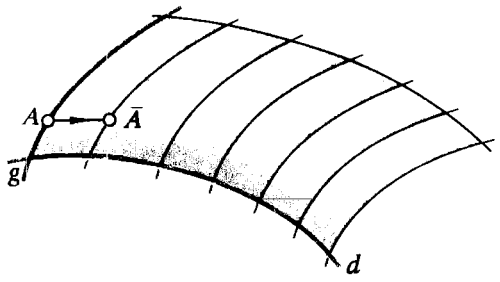


Рис. 154

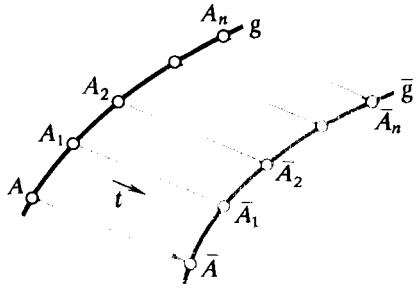


Рис. 155

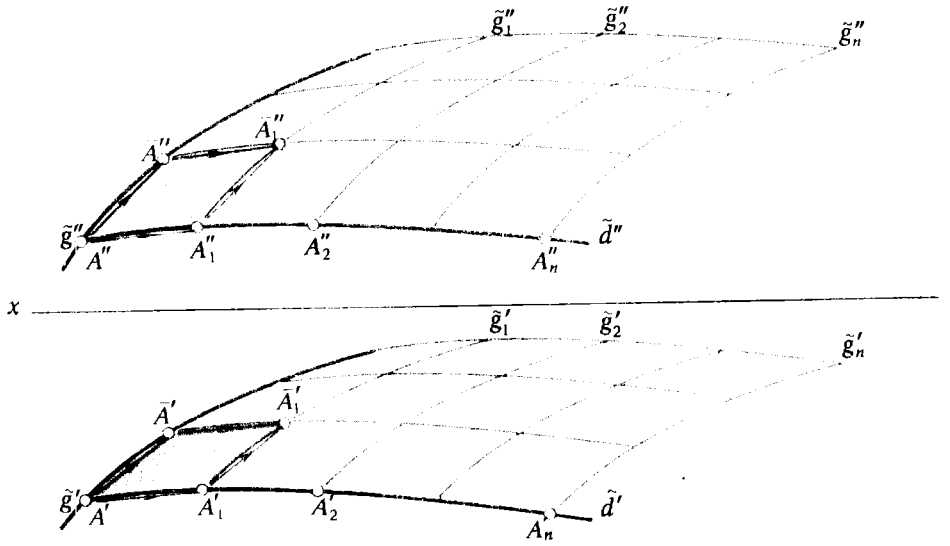


Рис. 156

лельна кривой g, так как точки $\bar{A}$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ... , $\bar{A}_n$ кривой $\bar{g}$ получены из точек A, A_1, A_2, ... , A_n кривой g путем переноса их по параллельным прямым $(A\bar{A})$, $(A_1\bar{A}_1)$, $(A_2\bar{A}_2)$, ... , $(A_n\bar{A}_n)$ на величину вектора t. В рассматриваемом примере мы получаем частный случай поверхности параллельного переноса — цилиндрическую поверхность. Для образования сложных криволинейных поверхностей параллельный перенос кривой линии следует осуществлять с помощью мгновенных векторов переноса, характер изменения направления которых может быть задан графически в виде кривой $\tilde{d}$ (направление мгновенных векторов переноса определяется хордами кривой $\tilde{d}$).

В общем случае определитель поверхности параллельного переноса имеет вид

$$\Phi(\tilde{g};\ \tilde{d});\ [\tilde{g}_j = T_d(\tilde{g})].$$

В геометрическую часть определителя входит образующая кривая $\tilde{g}$ и направляющая $\tilde{d}$. Алгоритмическая часть состоит из условия параллельного перемещения точек образующей $(\tilde{g}_j = T_d(\tilde{g}))$.

На рис. 156 поверхность параллельного переноса задана на эпюре Монжа. Для того чтобы перейти от задания поверхности проекциями ее определителя (красные линии) к заданию поверхности каркасом достаточно: на кривой $\widetilde{d}(\widetilde{d}', \widetilde{d}'')$ наметить ряд точек $A_1(A_1'A_1'')$, $A_2(A_2'A_2'')$, ... , $A_n(A_n'A_n'')$; через эти точки провести кривые $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2$, ... , $\widetilde{g}_n$, параллельные кривой $\widetilde{g}$. Проведение проекций параллельных кривых сводится к проведению параллельных линий. Это следует из свойства параллельного проецирования, состоящего в том, что проекции равных и параллельных отрезков равны и параллельны. На рис. 156 такими отрезками являются стороны параллелограмма $A'A_1'\bar{A}'\bar{A}_1'$, аппроксимирующего участок криволинейной поверхности отсеком плоскости. Из чертежа видно, что образующую и направляющую можно поменять местами. Если за образующую взять кривую $\widetilde{d}$, а за направляющую кривую $\widetilde{g}$, то мы получим ту же самую поверхность параллельного переноса.

§ 37. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ (ПОДКЛАСС 2)

А. Поверхности вращения общего вида (рис. 157).

Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, которая образуется произвольной кривой (плоской или пространственной) *при ее вращении вокруг неподвижной оси.*

В состав определителя поверхности вращения входит образующая g, ось вращения i и условие о том, что эта образующая вращается вокруг оси i:

$$\Phi(g, i);\ [g_j = R_i(g)].$$

Каждая точка образующей (A, B, C, D, E) при вращении вокруг оси i описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называют *параллелями*. Наибольшую и наименьшую параллель называют соответственно *экватором и горлом* (шейкой).

Плоскости α, проходящие через ось поверхности вращения, называют *меридиональными*, а линии, по которым они пересекают поверхность, — *меридианами*.

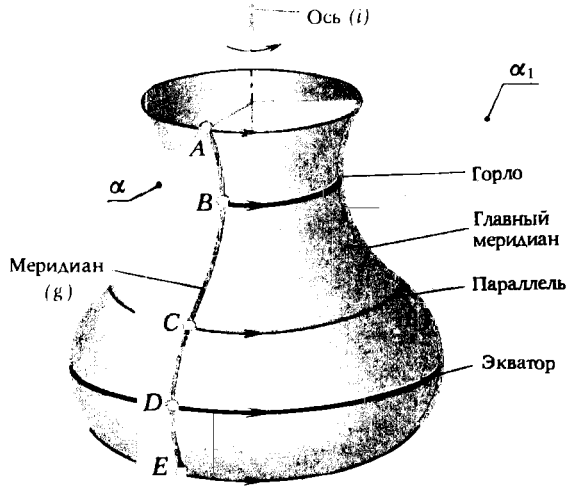


Рис. 157

Меридиональную плоскость α_1, параллельную плоскости проекции, принято называть *главной меридиональной плоскостью*, а линию ее пересечения с поверхностью вращения — *главным меридианом**.

Задание поверхности вращения на эпюре Монжа проекциями геометрических фигур, входящих в состав его определителя, хотя и однозначно определяет поверхность, но обладает одним недостатком, заключающимся в том, что при таком задании трудно представить форму поверхности. Поэтому при задании поверхности вращения обычно указывают проекции ее оси, главного меридиана и экватора (иногда указывают окружность, по которой поверхность вращения пересекается с плоскостью проекции).

При этом указывают только горизонтальную проекцию экватора (или параллели) и фронтальную проекцию главного меридиана**.

Б. Частные виды поверхностей вращения.

В технике, в частности в машиностроении, поверхности вращения находят широкое применение. Это объясняется распространенностью вращательного движения и простотой обработки поверхностей вращения на станках. Особенно распространены поверхности, имеющие в меридиональном сечении кривую второго порядка или две прямые, на которые распадается эта кривая.

Рассмотрим некоторые частные виды поверхностей вращения. Возьмем в качестве образующей окружность. В зависимости от взаимного расположения окружности (или ее дуги) и оси вращения можно получить различные поверхности.

1. Тор.

*Тором называется поверхность, которая может быть получена при вращении окружности g вокруг оси i, не проходящей через ее центр O****.

В зависимости от соотношения величин R — радиуса образующей окружности и расстояния t от центра окружности до оси вращения поверхности тора подразделяют на:

открытый тор (или кольцо) при $R < t$ — окружность не пересекает ось вращения (табл. 7, рис. 158,*а*);

закрытый тор при $R \geqslant t$ — окружность пересекает ось вращения или касается ее (табл. 7, рис. 158,*б*).

2. Сфера.

Сфера образуется в том случае, когда центр окружности принадлежит оси вращения $O \in i$, т. е. сферу можно рассматривать как частный случай тора, у которого $t = 0$ (табл. 7, рис. 158,*в*).

3. Глобоид.

Образующей этой поверхности является дуга окружности, плоскость которой может, в общем случае, не совпадать с осью вращения (табл. 7, рис. 158,*г*). Чертежи на рис. 162 дают представление об ор-

---

* На рис. 157 показаны не меридиональные плоскости α и α_1, а полуплоскости, расположенные по одну сторону от оси вращения i. Соответственно на рисунке показаны только половина меридиана и главного меридиана.

** Здесь речь идет о поверхности, ось вращения которой $i \perp \pi_1$. Если ось вращения $i \perp \pi_2$, то следует указывать фронтальную проекцию экватора и горизонтальную проекцию главного меридиана.

*** Поверхность тора может быть получена и в том случае, когда плоскость окружности пересекает ось поверхности. Следует иметь в виду, что в отличие от остальных поверхностей вращения, образующая которых — кривая второго порядка (или прямая), поверхность тора является поверхностью не второго, а четвертого порядка.

Таблица 7. Поверхности вращения; частные виды.
Подкласс 2. $\Phi(g;\ i)$; $[g_j = R_i(g)]$

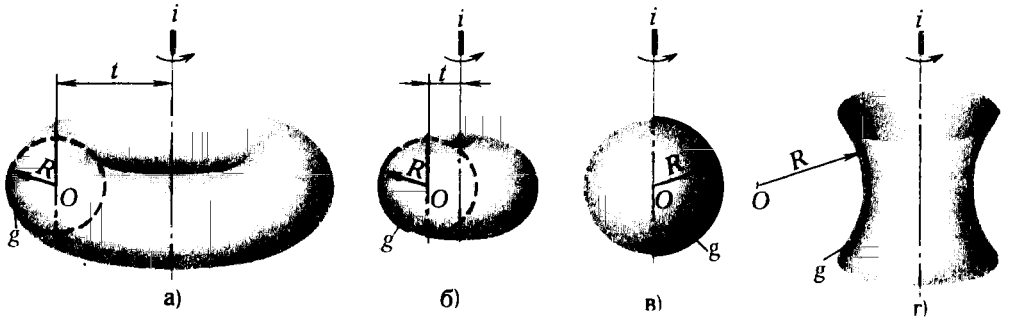


Рис. 158: а — открытый тор, б — закрытый тор, в — сфера, г — глобоид

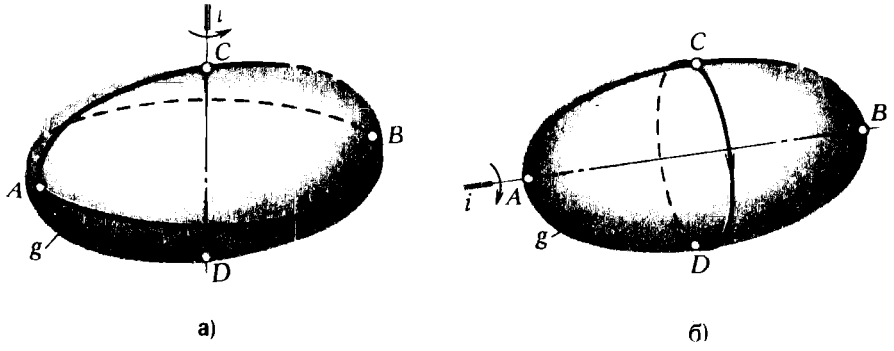


Рис. 159 Эллипсоид: а — сжатый, б — вытянутый

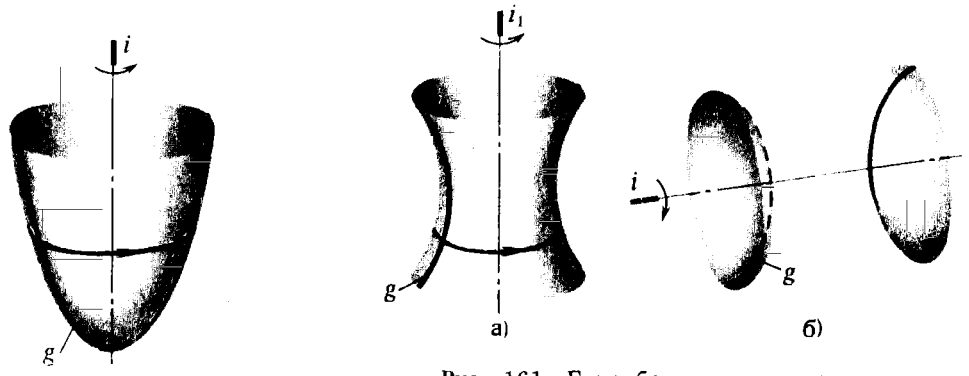


Рис. 160 Параболоид вращения

Рис. 161 Гиперболоид вращения: а — однополостный, б — двухполостный

тогональных проекциях тора (рис. 162,*а* и *б*), сферы (рис. 162,*в*), глобоида (рис. 162,*г*). Так как поверхности вращения, изображенные на рис. 162, симметричны относительно оси i, то при $i \perp \pi_1$ их горизонтальные проекции симметричны относительно горизонтальной оси; поэтому можно вычерчивать не всю горизонтальную проекцию, а лишь ее половину, как это сделано на рис. 162 (конечно, если условия задачи не требуют изображать ее полностью).

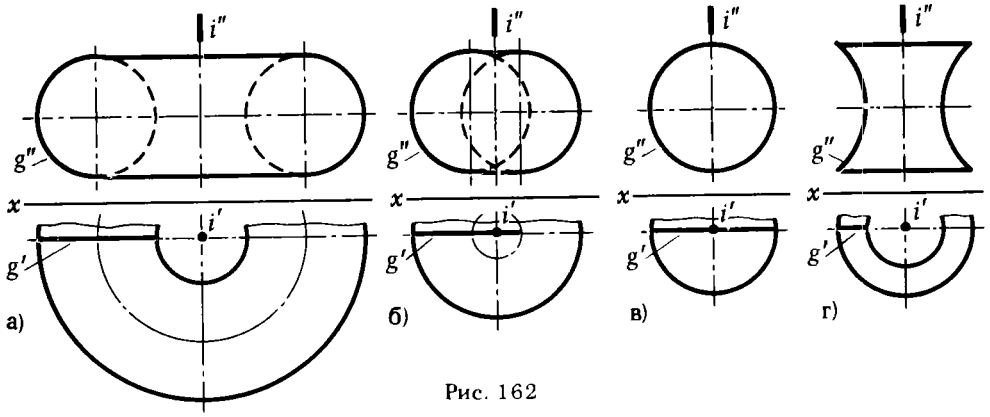


Рис. 162

4. **Эллипсоид вращения.**

Этот вид поверхности образуется при вращении эллипса вокруг его оси, при этом, если за ось вращения принять малую ось $[CD]$, то получим *сжатый эллипсоид вращения* (рис. 159,*а*); когда вращение осуществляется вокруг большой оси $[AB]$, образуется поверхность *вытянутого эллипсоида вращения* (рис. 159,*б*).

Рассмотренные поверхности вращения: тор, сфера, эллипсоид относятся к замкнутым поверхностям. Кроме замкнутых поверхностей вращения существуют незамкнутые поверхности, которые образуются, в частности, при вращении параболы, гиперболы и прямой (линий, имеющих несобственные точки).

5. **Параболоид вращения.**

Для того чтобы получить параболоид вращения, в определителе поверхности вращения за образующую g следует принять параболу, а за ось вращения i — ее ось (рис. 160). Для задания параболоида вращения на эпюре Монжа достаточно указать проекции образующей g и оси i.

6. **Гиперболоид вращения.**

При вращении гиперболы можно получить две различные поверхности:

а) **однополостный гиперболоид вращения***, образуется при вращении гиперболы g вокруг ее мнимой оси i_1 (рис. 161,*а*);

б) **двуполостный гиперболоид вращения,** образуется при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси i (рис. 161,*б*).

7. **Коническая и цилиндрическая поверхности вращения.**

Эти поверхности можно получить путем вращения прямой g вокруг оси i. Коническая и цилиндрическая поверхности были подробно рассмотрены в § 35 (см. рис. 147, 151 и 148, 152).

§ 38. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (ПОДКЛАСС 3)

Поверхность называется винтовой, если она получается винтовым перемещением образующей (рис. 163)**.

---

* Поверхность однополостного гиперболоида вращения относится также к классу линейчатых поверхностей. Она может быть получена путем вращения прямой вокруг оси, скрещивающейся с ней. Подробно однополостный гиперболоид рассматривался в § 32.

** Винтовое перемещение характеризуется вращением вокруг оси и одновременным поступательным движением, параллельным этой оси

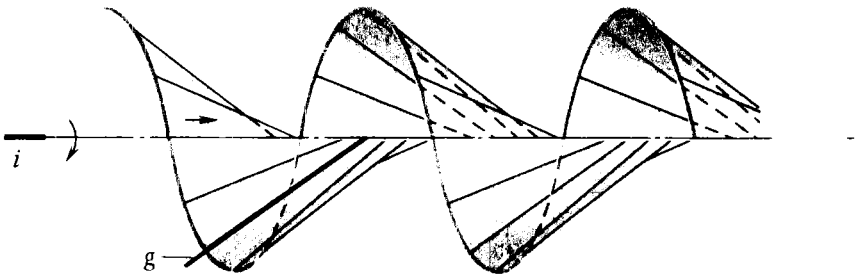


Рис. 163

В зависимости от формы образующей отдельные виды винтовых поверхностей могут быть отнесены как к классу линейчатых, так и нелинейчатых поверхностей. Выделение этих поверхностей в самостоятельный подкласс связано со стремлением подчеркнуть значение винтовых поверхностей в технике, архитектурно-строительной практике и, особенно, в машиностроении. Определитель винтовой поверхности имеет вид

$$\Phi(g, i); \ [g_j = T_i(g) \circ R_i(g)],$$

где g — образующая (кривая или прямая), i — ось винтовой линии, алгоритмическая часть определителя содержит указание, что образующая g_j совершает винтовое перемещение, которое можно рассматривать как композицию из двух перемещений; а) параллельного перемещения вдоль оси i и б) вращения вокруг этой оси.

А. Винтовые поверхности с криволинейной образующей.

На рис. 164 показана винтовая поверхность, образованная плоской кривой g, совершающей винтовое перемещение. Закон этого перемещения определяется видом винтовой линии d (ее диаметром, шагом и ходом) и характером расположения образующей g. В случае, показанном на рис. 164, он определен тем, что в процессе движения плоскость γ, которой принадлежит образующая, все время проходит через ось вращения i.

Б. Винтовые поверхности с прямолинейной образующей и направляющей — винтовой линией постоянного шага.

Все точки образующей при винтовом движении описывают винтовые линии, каждая из которых может служить направляющей поверхности. Такие линии называют также *винтовыми параллелями*. Все винтовые параллели имеют одинаковый шаг P, называемый *шагом винтовой поверхности*. Очевидно и единичный шаг P_0 у этих параллелей будет общий: $P_0 = P/2\pi$.

Характерной особенностью для винтовых поверхностей с постоянным шагом является постоянство угла φ° наклона прямолинейной образующей к направляющей плоскости, за которую принята плоскость, перпендикулярная оси винтовой поверхности.

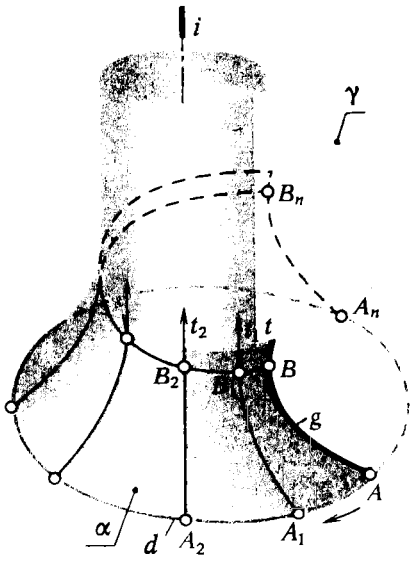


Рис. 164

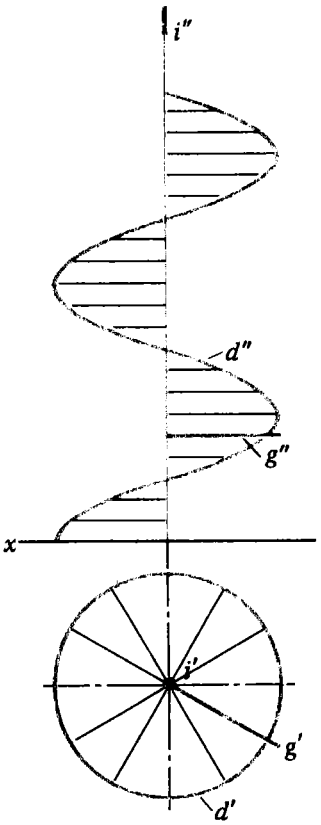


Рис. 165

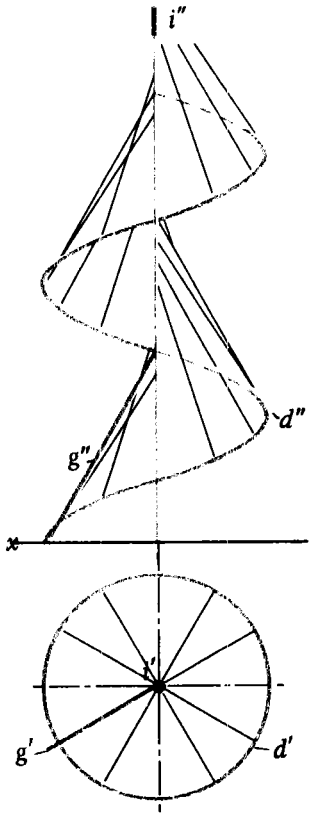


Рис. 166

Как уже неоднократно отмечалось, для получения наглядного изображения поверхности (в частности, винтовой) ее задание проекциями геометрической части определителя следует расширить до задания каркасом, состоящим из двух семейств линий: семейства направляющих (винтовых параллелей) * и семейства, составленного из последовательных положений прямолинейных образующих.

Винтовая линия постоянного шага, построенная на поверхности прямого кругового цилиндра, называется *гелисой*. Поэтому линейчатые винтовые поверхности, направляющая которых — гелиса, называются *геликоидами*. В зависимости от величины угла наклона образующей к оси геликоиды бывают *прямыми*, если этот угол равен 90°, и *косыми* (наклонными), если угол — произвольный, отличный от 0 и 90°.

Рис. 165 дает представление о прямом геликоиде. Изображенная на рис. 166 поверхность называется косым геликоидом. На рис. 165 и 166 поверхности указаны только частично, своими отсеками, заключенными между направляющей d и осью i.

В свою очередь, прямые и косые геликоиды подразделяются на *закрытые* и *открытые*. Признаком для такого деления служит взаимное расположение оси геликоида и его образующей. Если образующая и

---

* На эпюре Монжа, как правило, указывают только одну (или две) винтовые параллели, принадлежащие семейству направляющих.

ось пересекаются, геликоид называют *закрытым*, если скрещиваются — *открытым*.

Следует отметить одно важное свойство винтовых поверхностей, состоящее в том, что эти поверхности, так же как и поверхности вращения, могут сдвигаться, т. е., совершая винтовое перемещение, поверхность скользит вдоль самой себя. Это свойство обеспечивает винтовым поверхностям широкое применение в технике. Винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, рабочие органы судовых движителей, конструкции винтовых аппарелей и лестниц — вот далеко не полный перечень технического использования винтовых поверхностей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем сущность образования поверхностей кинематическим способом?
2. Что называется каркасом поверхности?
3. Чем отличается непрерывный каркас от дискретного?
4. Что такое определитель поверхности?
5. Что является содержанием геометрической и алгоритмической частей определителя?
6. Напишите определитель поверхностей: Каталана, вращения, геликоида, однополостного гиперболоида, коноида.
7. Как задается поверхность на эпюре Монжа?
8. Что такое очерк поверхности?
9. Какие поверхности называются поверхностями Каталана?
10. Дайте общую схему классификации поверхностей.
11. Приведите схему классификации линейчатых поверхностей.
12. Дайте определение различных видов линейчатых поверхностей.
13. Как образуются поверхности вращения?
14. Укажите основные свойства поверхности вращения.
15. Как образуются винтовые поверхности?
16. По какому признаку поверхности геликоида подразделяют на закрытые и открытые?

ГЛАВА V

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Понятия и определения

Круг задач, ответы на которые могут быть получены графическим путем, чрезвычайно широк. При этом независимо от степени сложности их решения и характера вопросов, требующих ответа, все они могут быть отнесены всего лишь к одному из двух классов: 1-й класс — задачи позиционные; 2-й класс — задачи метрические.

Следует иметь в виду, что деление задач на позиционные и метрические является условным. Если из всего многообразия задач позиционную группу можно выделить, то чисто метрические задачи встречаются очень редко; как правило, при решении метрических задач предварительно приходится выяснять позиционные отношения между геометрическими фигурами, входящими в условия задачи или построенными в процессе решения, т. е. решать позиционную задачу.

Несмотря на это, распределение задач по отмеченным классам в методическом отношении имеет большой смысл, так как позволяет установить единые (обобщенные) алгоритмы, пригодные для решения широкого круга задач, входящих в один класс, и, как следствие, обеспечить простой и надежный поиск частного алгоритма для решения поставленной задачи.

В этой главе будут рассмотрены различные виды позиционных задач и указаны алгоритмы их решения. Под позиционными подразумеваются задачи, решение которых позволяет получить ответ о принадлежности элемента (точки) или подмножества (линии) множеству (поверхности). К позиционным относятся также задачи на определение общих элементов, принадлежащих различным геометрическим фигурам.

Первая группа задач может быть объединена под общим названием **задачи на принадлежность** (инцидентность). К ним, в частности, относятся задачи на определение:

1) принадлежности точки линии ($A \in l$);
2) принадлежности точки поверхности ($A \in \alpha$);
3) принадлежности линии поверхности ($l \subset \alpha$).

Ко второй группе относятся **задачи на пересечение**. Эта группа содержит также три типа задач:

1) на пересечение линии с линией ($l \cap m$);
2) на пересечение поверхности с поверхностью ($\alpha \cap \beta$);
3) на пересечение линии с поверхностью ($l \cap \alpha$).

С точки зрения единства принципа, положенного в основу решения позиционных задач, их можно не делить на две группы. Подходя к позиционным задачам с таких позиций, можно считать, что все многообразие позиционных задач может быть сведено к решению задач первой группы — задач на принадлежность: 1) $A \in l$, 2) $A \in \alpha$ и 3) $l \subset \alpha$. В справедли-

вости такого утверждения легко убедиться, перефразировав условия задач, входящих во вторую группу. Действительно:

1) задачу на определение точки пересечения линии с линией ($l \cap m$) можно заменить задачей 1 ($A \in l$) первой группы: "определить точку, принадлежащую как линии l, так и линии m";

2) условие "построить линию пересечения поверхностей α и β" ($\alpha \cap \beta$ — задача 2 второй группы) можно заменить задачей, относящейся к первой группе: "определить (построить) линию l, принадлежащую как поверхности α, так и β" ($l \subset \alpha$ — задача 3 первой группы);

3) задачу 3 второй группы "построить точку A пересечения линии l с поверхностью α ($l \cap \alpha$)" можно рассматривать как две задачи первой группы: $A \in l$ (задача 1) и $A \in \alpha$ (задача 2).

Если учесть, что линию можно рассматривать как множество принадлежащих ей точек, то задача третьего типа ($l \subset \alpha$) сводится к многократному решению задачи определения $A \in \alpha$. Тогда окончательно получим следующее определение:

к позиционным относятся задачи, решение которых, в конечном счете, сводится: 1) к построению точки, принадлежащей линии ($A \in l$), *и 2) к построению точки, принадлежащей поверхности* ($A \in \alpha$).

Решение таких задач базируется на инвариантном свойстве 2 (см. § 6) ортогонального проецирования, из которого вытекает:

$$A \in l \Leftrightarrow (A' \in l') \wedge (A'' \in l''); \tag{2}$$

$$A \in \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha''). \tag{3}$$

Проследим на примерах, как решаются позиционные задачи.

§ 39. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ЛИНИИ ($A \in l$)

При выяснении вопроса о принадлежности точки линии или при решении аналогичной задачи на построение точки, принадлежащей линии, достаточно использовать только свойство (2) из § 38.

Следует иметь в виду, что если линия занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, то решение может быть получено в системе двух заданных плоскостей проекций. В случае, когда линия принадлежит плоскости, перпендикулярной оси проекции, для решения следует пользоваться вспомогательной плоскостью проекции.

ПРИМЕР 1. На данной кривой l указать произвольную точку A, принадлежащую этой кривой (рис. 167).

РЕШЕНИЕ. Зная, что на основании свойства (2) $A' \in l'$ и $A'' \in l''$, а также, что A' и A'' принадлежат одной линии связи, перпендикулярной оси проекции x, отмечаем на какой-либо проекции линии l произвольную точку A, обозначаем ее тем же индексом, какой имеет проекция линии l. На рис. 167 точка A' взята на горизонтальной проекции линии l'. Для определения A'' через точку A' проводим прямую, перпендикулярную оси проекции, и отмечаем точку ее пересечения с фронтальной проекцией линии l''.

ПРИМЕР 2. Указать горизонтальную проекцию точки C по данной ее фронтальной проекции C'', если известно, что точка $C \in [AB]$ (рис. 168).

РЕШЕНИЕ. Так как отрезок $[AB]$ принадлежит плоскости, перпендикулярной оси проекции, то решить эту задачу в системе заданных плоскостей проекций не представляется возможным*. Для ее решения воспользуемся вспомогательной

* Имеется в виду графическое решение. Ответ на поставленную задачу может быть получен из условия деления отрезка в данном отношении (см. § 6, инвариант 2 к).

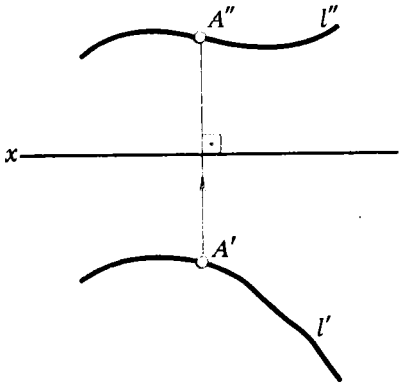


Рис. 167

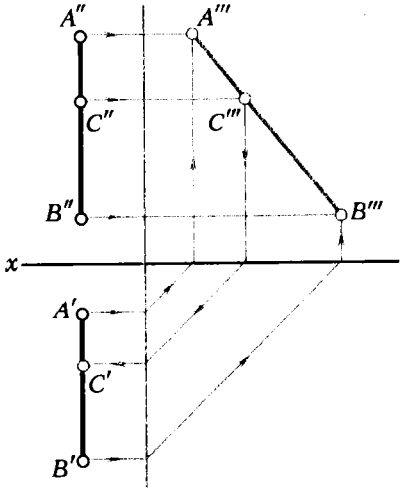


Рис. 168

плоскостью проекции. В качестве вспомогательной плоскости возьмем плоскость π_3, перпендикулярную оси проекции. На плоскости π_3 находим проекцию $A'''B'''$ отрезка $[AB]$ и на ней отмечаем вспомогательную проекцию C'''' точки C. Зная C'''', находим C'.

Все необходимые геометрические построения ясны из чертежа и не нуждаются в пояснении.

§ 40. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ ($A \in \alpha$)

При составлении алгоритма решения этой группы задач следует базироваться на свойстве (3) из § 38, т. е. для того чтобы на чертеже поверхности указать проекции принадлежащей ей точки, необходимо вначале построить проекции какой-либо линии, принадлежащей поверхности, а затем на этой линии отметить точку.

В качестве линии, как правило, выбирается образующая поверхности. Если поверхность может быть получена образующей различной формы, то предпочтение следует отдавать наиболее простым и удобным для построения линиям: окружностям для поверхностей вращения, прямым для линейчатых поверхностей (в частности, для плоскости целесообразно использовать линии уровня*).

ПРИМЕР 1. В плоскости $\alpha(a \parallel b)$ указать произвольную точку A (рис. 169).

РЕШЕНИЕ. В плоскости α проводим произвольную горизонталь h. При построении ее проекций следует иметь в виду, что прямая принадлежит плоскости в том случае, если она содержит две различные точки, принадлежащие плоскости. В качестве таких точек принимаем точки 1 и 2, принадлежащие соответственно прямым a и b, определяющим плоскость α.

На рис. 169 построение проекций горизонтали h выполнено в следующей последовательности:

а) на прямой a взяли произвольную точку 1, через фронтальную проекцию этой точки провели фронтальную проекцию горизонтали h'';

б) отметили точку $2'' = h'' \cap b''$;

в) определили горизонтальные проекции $1'$ и $2'$ точек 1 и 2;

г) через точки $1'$ и $2'$ провели горизонтальную проекцию горизонтали h'.

Горизонталь $h \subset \alpha$, так как h проходит через точки 1 и 2, принадлежащие плоскости α.

* Особенно целесообразно пользоваться линиями уровня в случае, когда плоскость задана следами.

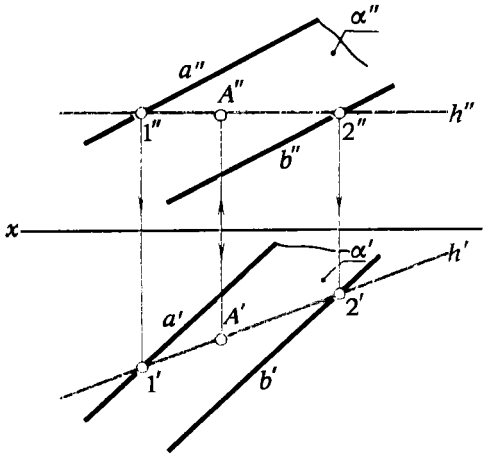


Рис. 169

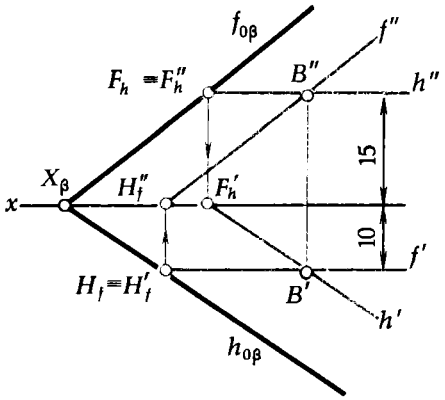


Рис. 170

На проекциях горизонтали h' и h'' отмечаем проекции точки A ($A' \in h'$ и $A'' \in h''$). Точка $A \subset \alpha$, так как $A \in l \subset \alpha$.

ПРИМЕР 2. В плоскости β указать точку B, удаленную от горизонтальной плоскости проекции на расстояние 15 мм и от фронтальной плоскости проекции на расстояние 10 мм (рис. 170).

РЕШЕНИЕ. Проводим в плоскости β фронталь f и горизонталь h, удаленные от плоскостей проекций соответственно на расстояния 10 и 15 мм. Пересечение одноименных проекций f и h укажет проекции искомой точки B ($B' = f' \cap h'$, $B'' = f'' \cap h''$).

ПРИМЕР 3. Определить фронтальную проекцию точки A, принадлежащей плоскости α, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 171).

Мы знаем, что $A \in \alpha \Leftrightarrow (A' \in l' \subset \alpha') \wedge (A'' \in l'' \subset \alpha'')$, поэтому, чтобы получить ответ на поставленную задачу, достаточно через A' провести горизонтальную проекцию прямой, принадлежащей плоскости α, найти ее фронтальную проекцию и на ней отметить точку A''. Так как плоскость α задана следами, то целесообразно в качестве вспомогательной прямой использовать одну из главных линий плоскости. На рис. 171 проведена фронталь f плоскости α.

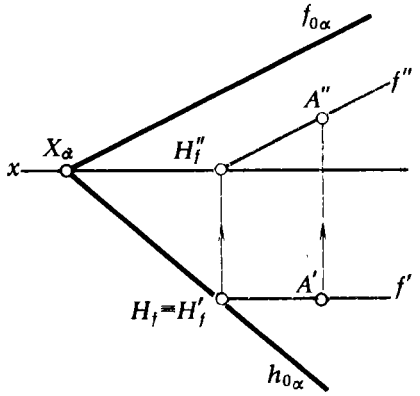


Рис. 171

ПРИМЕР 4. На цилиндрической поверхности α, заданной направляющей d и образующей g, указать произвольную точку A (рис. 172).

РЕШЕНИЕ. Проводим произвольную прямолинейную образующую g_j цилиндрической поверхности α. Для этого на кривой d отмечаем произвольную точку 1 ($1' \in d'$ и $1'' \in d''$). Через проекции точки 1 проводим проекции прямой g_j па-

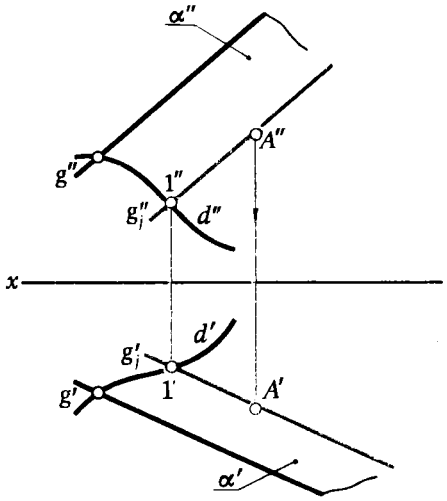


Рис. 172

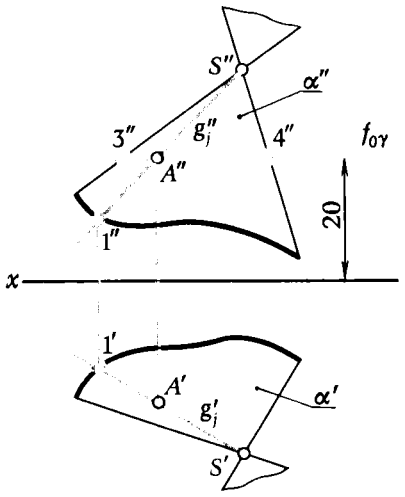


Рис. 173

раллельно соответствующим проекциям g' и g''. На прямой g_j отмечаем произвольную точку A:

$$A \in \alpha \iff (A' \in g'_j \subset \alpha') \wedge (A'' \in g''_j \subset \alpha'').$$

ПРИМЕР 5. На конической поверхности α указать точку A, удаленную от горизонтальной плоскости проекции на расстояние 20 мм (рис. 173).

РЕШЕНИЕ. Проводим плоскость $\gamma \parallel \pi_1$ и удаленную от оси x на заданное расстояние 20 мм. На конической поверхности α отмечаем произвольную прямолинейную образующую g_j (g'_j, g''_j). Точка пересечения $g''_j \cap f_{0\gamma}$ укажет фронтальную проекцию A'' искомой точки A. По A'' находим A'.

Следует иметь в виду, что данная задача имеет бесчисленное множество решений: любая точка отрезка 3'', 4'' может быть принята за фронтальную проекцию точки, удовлетворяющей условию поставленной задачи.

ПРИМЕР 6. На поверхности наклонного геликоида α указать фронтальную проекцию точки A, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 174).

РЕШЕНИЕ. Через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальную проекцию прямолинейной образующей g'. Фронтальная проекция g'' определяется из условия равенства углов наклона всех прямолинейных образующих к направляющей плоскости (в нашем случае за направляющую плоскость принята π_1).

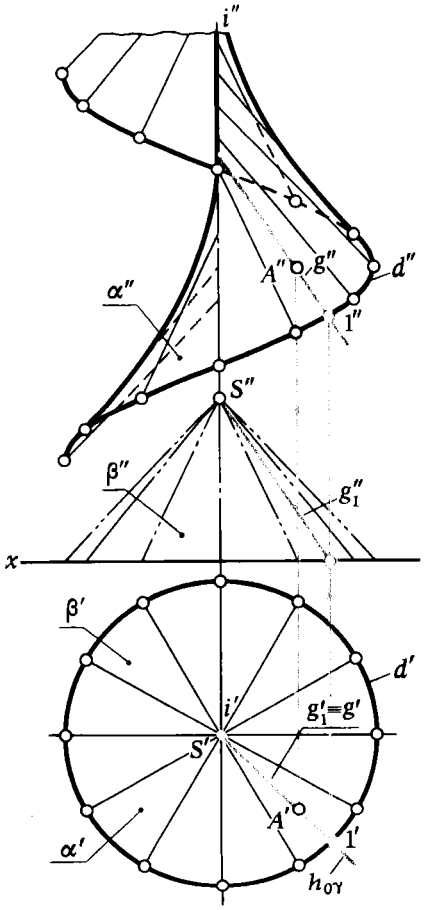


Рис. 174

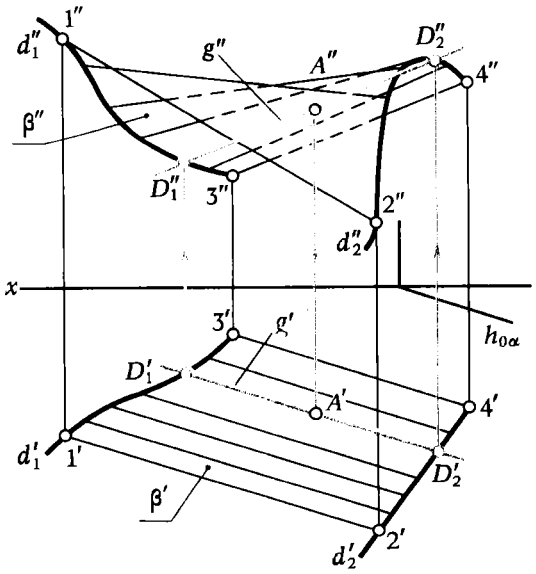


Рис. 175

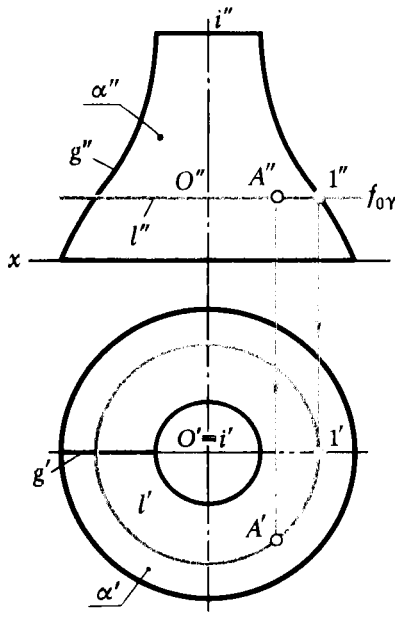


Рис. 176

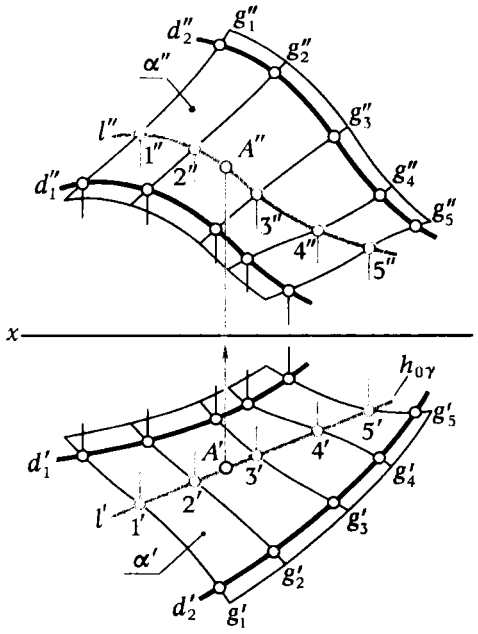


Рис. 177

Множество прямых, пересекающих ось винтовой поверхности i в точке S, образуют поверхность прямого кругового конуса β, прямолинейные образующие которого составляют заданный угол с плоскостью π_1. Поэтому для определения фронтальной проекции g'' проводим прямолинейную образующую g_1 конической поверхности β, по которой горизонтально проецирующая плоскость γ, проходящая через точку A и ось i, пересекает поверхность β. Фронтальная проекция g'' должна быть параллельна g_1''. Для ее построения на горизонтальной проекции d' отмечаем точку $1'$, в которой $h_{0\gamma} \cap d'$; по $1'$ определяем $1''$. Через $1''$ проводим $g'' \parallel g_1''$. Для построения фронтальной проекции A'' через A' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с g''.

ПРИМЕР 7. На поверхности цилиндроида β указать фронтальную проекцию точки A, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 175).

РЕШЕНИЕ. Через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальную проекцию прямолинейной образующей g' поверхности β, для этого через A' проводим прямую $g' \parallel h_{0\alpha}$ и отмечаем точки D_1' и D_2', в которых прямая g' пересекает направляющие d_1' и d_2'.

По точкам D_1' и D_2' строим их фронтальные проекции D_1'' и D_2'', которые определяют фронтальную проекцию образующей g''. На g'' находим точку A''. Для ее построения через A' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с g''.

ПРИМЕР 8. Построить горизонтальную проекцию точки, принадлежащей поверхности вращения $\alpha(g, i)$, если известна ее фронтальная проекция A'' (рис. 176).

РЕШЕНИЕ. Через данную фронтальную проекцию точки A'' проводим фронтальную проекцию окружности l'', принадлежащей поверхности α. Строим горизонтальную проекцию этой окружности l'. Окружность l — параллель поверхности α, ее следует рассматривать как сечение поверхности α горизонтальной плоскостью γ. Длина отрезка $O''1''$ укажет величину радиуса окружности l'. На l' отмечаем A'. Для нахождения A' через A'' проводим линию связи перпендикулярно оси x и отмечаем точку ее пересечения с l'.

В рассмотренных примерах были заданы поверхности линейчатые или вращения. Это позволило для решения задачи на принадлежность точки поверхности использовать простые линии — прямые или окружности. Для нелинейчатых поверхностей, на которых невозможно провес-

ти такие линии, приходится строить кривые, принадлежащие поверхности.

Приведенный ниже пример показывает, как следует решать задачу на принадлежность точки поверхности в случае, когда поверхность нелинейчатая.

ПРИМЕР 9. Определить недостающую (фронтальную) проекцию точки A, принадлежащей нелинейчатой поверхности α, если известна ее горизонтальная проекция A' (рис. 177).

РЕШЕНИЕ. Определение недостающей проекции точки A осуществляется аналогично рассмотренным ранее случаям (см. примеры 1 ... 8). Вначале через точку A' проводим прямую l' — горизонтальную проекцию линии l. Чтобы линия l принадлежала поверхности α, необходимо, чтобы любые точки, взятые на этой линии, принадлежали поверхности α. В качестве таких точек принимаем точки $1', 2', 3', 4', 5'$, в которых l' пересекает горизонтальные проекции образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$; зная $1', 2', \ldots, 5'$, определяем $1'', 2'', \ldots, 5''$. Соединив эти точки плавной кривой, получим l''; на l'' отмечаем A''. Точка $A \in \alpha$, так как $A' \in l'$ и $A'' \in l''$, а $l \subset \alpha$.

Следует иметь в виду, что при решении подобных задач в качестве линии l целесообразно пользоваться плоской кривой, в частности, принадлежащей проецирующей плоскости (в рассмотренном случае кривая l принадлежит горизонтально проецирующей плоскости γ).

§ 41. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ЛИНИИ ПОВЕРХНОСТИ ($l \subset \alpha$)

Построение линии, принадлежащей поверхности, принципиально не отличается от построения точки, принадлежащей поверхности (см. § 40, примеры 1 ... 9). Различие состоит лишь в том, что определяются проекции не одной, а n точек, принадлежащих линии.

ПРИМЕР 1. Построить фронтальную проекцию кривой l, принадлежащей поверхности гиперболического параболоида α, заданного направляющими d_1, d_2 и плоскостью параллелизма β, если известна горизонтальная проекция кривой l' (рис. 178).

РЕШЕНИЕ. Поверхность α представляет собой множество точек, а линия l, принадлежащая поверхности α, является подмножеством этого множества. Поэтому для соблюдения условия $l \subset \alpha$ необходимо, чтобы каждый элемент (точка) подмножества l принадлежал множеству α. Для обеспечения этого условия необходимо, чтобы любая точка $A_j \in l$ принадлежала линии $g_j \subset \alpha$.

Решение сводится к следующему:

1. На горизонтальной проекции поверхности α проводим горизонтальные проекции прямолинейных образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$ параллельно $h_{0\beta}$.
2. Находим фронтальные проекции этих образующих $g_1'', g_2'', g_3'', g_4'', g_5''$.
3. Отмечаем точки $1', 2', 3', 4', 5'$, в которых горизонтальная проекция кривой l' пересекает горизонтальные проекции образующих $g_1', g_2', g_3', g_4', g_5'$.
4. Находим фронтальные проекции точек $1'', 2'', 3'', 4'', 5''$ на соответствующих фронтальных проекциях образующих $g_1'', g_2'', g_3'', g_4'', g_5''$. Соединив их плавной кривой, получим искомую фронтальную проекцию l'' кривой $l \subset \alpha$.

Если необходимо определить проекцию прямой, принадлежащей плоскости, то решение задачи значительно упрощается.

ПРИМЕР 2. Построить фронтальную проекцию прямой m, принадлежащей плоскости α, если известна ее горизонтальная проекция m' (рис. 179).

РЕШЕНИЕ. Прямая однозначно определяется двумя не тождественными точками, поэтому для определения m'' необходимо и достаточно найти фронтальные проекции двух не тождественных точек 1 и 2, принадлежащих прямой m, т. е. дважды решить задачу по определению проекций точки, принадлежащей плоскости, если известна одна из ее проекций (см. § 40 пример 3).

На рис. 179 решение выполнено в следующем порядке:

1. Отметили на горизонтальной проекции прямой m' две различные точки $1'$ и $2'$.
2. Определили их фронтальные проекции $1''$ и $2''$. Положение точек $1''$ и $2''$ найдено с помощью фронталей $f_1 \ni 1$ и $f_2 \ni 2$.
3. Точки $1''$ и $2''$ определяют искомую фронтальную проекцию прямой m''.

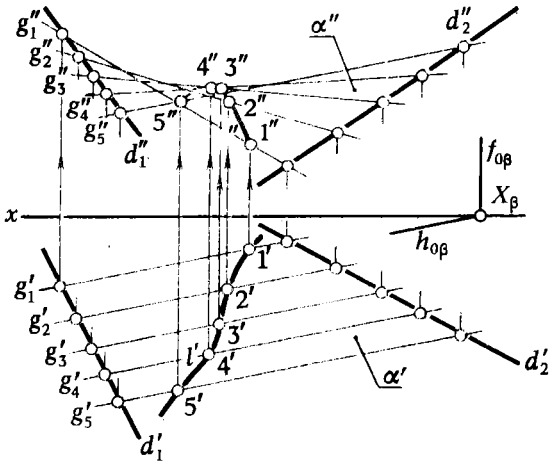


Рис. 178

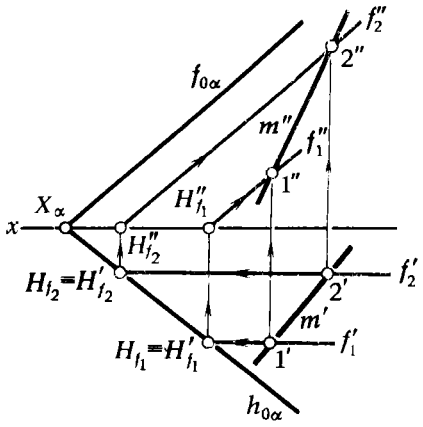


Рис. 179

§ 42. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ЛИНИЕЙ ($l \cap m$)

Решение задач на определение общей точки, принадлежащей как линии l, так и линии m, или иначе, задач по определению точки пересечения двух линий, вытекает непосредственно из инварианта ортогонального проецирования

$$K = a \cap b \iff K' = a' \cap b' \wedge K'' = a'' \cap b''.$$

ПРИМЕР 1. Показать на эпюре Монжа две произвольные пересекающиеся линии m и n (рис. 180).

РЕШЕНИЕ. Пусть $K = m \cap n$, тогда $K \in m$ и $K \in n$. Из условия принадлежности $K \in m$ вытекает $K' \in m'$ и $K'' \in m''$. Так как $K \in n$, то $K' \in n'$ и $K'' \in n''$. Для того чтобы $m \cap n$, необходимо, чтобы K' и K'' принадлежали одному перпендикуляру к оси x. На рис. 180 показаны пересекающиеся кривые m и n.

ПРИМЕР 2. Данную кривую l пересечь горизонталью h, проходящей через точку A (рис. 181).

РЕШЕНИЕ. Через A'' проводим фронтальную проекцию горизонтали $h'' \parallel$ оси x. Отмечаем точку $K'' = h'' \cap l''$. Находим $K' \in l'$. Точки K' и A' определяют горизонтальную проекцию h' горизонтали h.

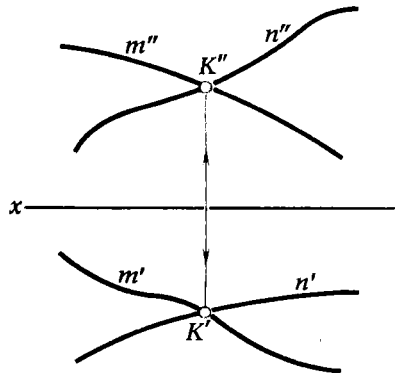


Рис. 180

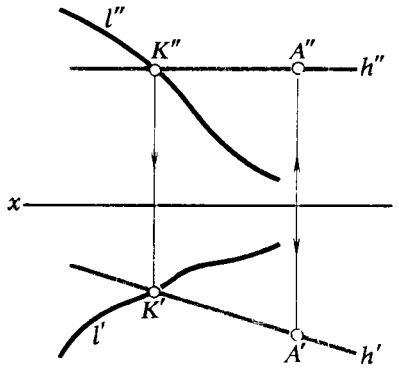


Рис. 181

§ 43. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ($\alpha \cap \beta$)

Две поверхности пересекаются по линии, точки которой принадлежат каждой из пересекающихся поверхностей. Поэтому построение линии пересечения двух поверхностей α и β сводится к нахождению общих точек, принадлежащих как множеству точек, составляющему поверхность α, так и другому множеству точек, входящих в состав поверхности β.

Способ построения линии пересечения двух поверхностей состоит в следующем: заданные поверхности пересекают третьей, вспомогательной поверхностью (вид и расположение вспомогательной секущей поверхности выбирают с таким расчетом, чтобы можно было легко определить линии пересечения этой поверхности с заданными); находят линии, по которым эта вспомогательная секущая поверхность пересекает каждую из данных поверхностей. Далее отмечают точку (точки), в которой пересекаются полученные линии пересечения (рис. 182).

Построив отмеченные операции n раз, получим множество точек. Линия l, соединяющая эти точки, является искомой линией пересечения поверхностей.

Используя геометрический язык, ход решения задачи можно представить в виде формализованного алгоритма, записанного в символической форме.

В табл. 8 дано традиционное для начертательной геометрии словесное описание алгоритма (слева) и соответствующая ему символическая запись на геометрическом языке (справа).

Таблица 8. Описание алгоритма решения задачи по определению линии пересечения двух поверхностей

Словесное описание на традиционном языке начертательной геометрии	Символическая запись на геометрическом языке
1. Вводим вспомогательную секущую поверхность	Вводим γ_j
2. Определяем линии пересечения этой вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей	Определяем $m_j = \gamma_j \cap \alpha$ $n_j = \gamma_j \cap \beta$
3. Находим точки, в которых пересекаются полученные линии пересечения. Соединяем эти точки плавной линией	Находим $L_j = m_j \cap n_j$ $l = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n$*
* В некоторых случаях линия пересечения может распадаться на две и более линий, т. е. множество l может состоять из подмножеств $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Эти линии могут быть как кривыми (пространственными или плоскими), так и прямыми. При этом линии могут быть как действительными, так и мнимыми.	

Алгоритм нахождения точек, общих для двух заданных множеств точек — поверхностей α и β, можно записать в виде

$$l = (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n);\ [L_j = (\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]. \qquad (4)$$

Повторяя многократно последовательность операций, обозначенных в приведенном алгоритме (каждый раз, естественно, меняя положение вспомогательной секущей поверхности γ_j), можно получить любое число точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Рассматриваемый алгоритм определения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей, является универсальным, так как

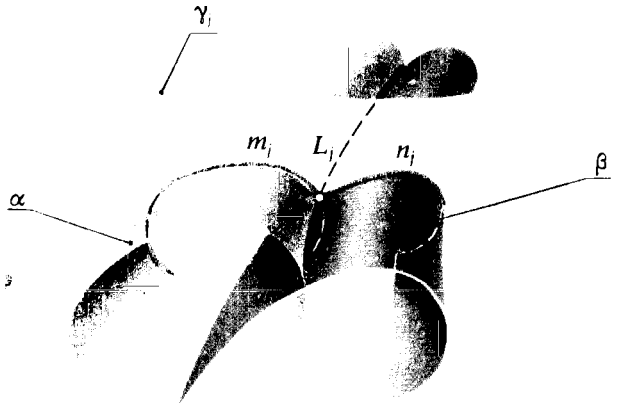


Рис. 182

под α и β могут подразумеваться любые поверхности, в том числе и плоскости. На выбор вида и расположения вспомогательной секущей поверхности γ_j в приведенном алгоритме также не накладывается никаких ограничений.

Вдумчивый читатель может задать вполне справедливый вопрос: "Что это за алгоритм, который предписывает решать задачи по определению точки (точек), принадлежащей линии пересечения двух поверхностей, путем решения двух задач, в каждой из которых также приходится строить линию пересечения поверхностей?".

Такое, на первый взгляд, нелогичное построение алгоритма становится вполне оправданным, если учесть, что данные поверхности α и β могут иметь любую форму и занимать произвольное положение в пространстве, что не позволяет непосредственно, по эпюру, определить линию их пересечения. А в качестве вспомогательной секущей поверхности γ_j мы можем выбрать поверхность удобной формы и так ориентировать ее относительно плоскостей проекций, чтобы получить простое решение для определения линии ее пересечения с каждой из заданных поверхностей.

Среди инвариантных свойств ортогонального проецирования находим $(\Phi \subset \gamma) \wedge (\gamma \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\gamma}$, т. е., если фигура Φ принадлежит поверхности $\gamma \perp$ плоскости π_1, то ортогональная проекция Φ' на эту плоскость принадлежит следу поверхности $h_{0\gamma}$ (см. § 6, свойство 2 г). Поэтому, если принять за вспомогательную секущую поверхность $\gamma_j \perp \pi_1$ (или π_2), то линии m_j и n_j пересечения этой поверхности с поверхностями α и β будут иметь горизонтальные (или фронтальные) проекции $m_j' \subset h_{0\gamma_j}$ и $n_j' \subset h_{0\gamma_j}$ ($m_j'' \subset f_{0\gamma_j}$ и $n_j'' \subset f_{0\gamma_j}$), т. е. решение подчас сложной задачи на построение линии пересечения поверхностей α и β мы заменяем решением двух простейших задач: 1) определить линию пересечения проецирующей поверхности γ_j с поверхностью α; 2) определить линию пересечения той же поверхности γ_j с поверхностью β. Очевидно, что каждая из этих задач сводится к построению второй проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна из ее проекций. Решение последней задачи состоит из многократного определения недостающей проекции точки, принадлежащей поверхности, т. е. сводится к решению позиционной задачи второго вида $A \in \alpha$ (см. § 40).

§ 44. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Использование универсального алгоритма для решения задач по определению линии пересечения поверхностей проследим вначале на наиболее простых примерах пересечения двух плоскостей.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей.

Чтобы найти такие точки, достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости γ_1 и γ_2, т. е. дважды выполнить последовательность операций, предусмотренных частью алгоритма (4), заключенной в квадратные скобки (см. § 43):

$$L_1 = (\gamma_1 \cap \alpha) \cap (\gamma_1 \cap \beta);$$
$$L_2 = (\gamma_2 \cap \alpha) \cap (\gamma_2 \cap \beta);$$
$$l = (L_1, L_2).$$

Рассмотрим общий случай пересечения плоскостей, когда обе плоскости — общего положения.

ПРИМЕР 1. Определить линию пересечения l плоскостей $\alpha(a \cap b)$ и $\beta(c \parallel d)$ (рис. 183).

РЕШЕНИЕ. Проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость $\gamma_1 (h_{0\gamma_1})$. Определяем проекции прямых $m_1 = \gamma_1 \cap \alpha$ и $n_1 = \gamma_1 \cap \beta$. Так как плоскость $\gamma_1 \perp \pi_1$, то m_1' и n_1' совпадут с $h_{0\gamma_1}$. С помощью точек 1′, 2′ и 3′, 4′, принадлежащих прямым m_1' и n_1', определяем фронтальные проекции этих точек 1″, 2″ и 3″, 4″, которые определяют прямые m_1'' и n_1''. Отмечаем точку пересечения фронтальных проекций прямых $L_1'' = m_1'' \cap n_1''$. Горизонтальная проекция L_1' принадлежит горизонтальным проекциям m_1' и n_1'.

Для нахождения точки L_2 вводим плоскость $\gamma_2 \parallel \gamma_1$. Плоскость γ_2 пересечет заданные плоскости по прямым m_2 и n_2, соответственно параллельным прямым m_1 и n_1. Поэтому для определения их проекций достаточно найти проекции только одной точки, принадлежащей каждой из прямых m_2 и n_2. На рис. 183

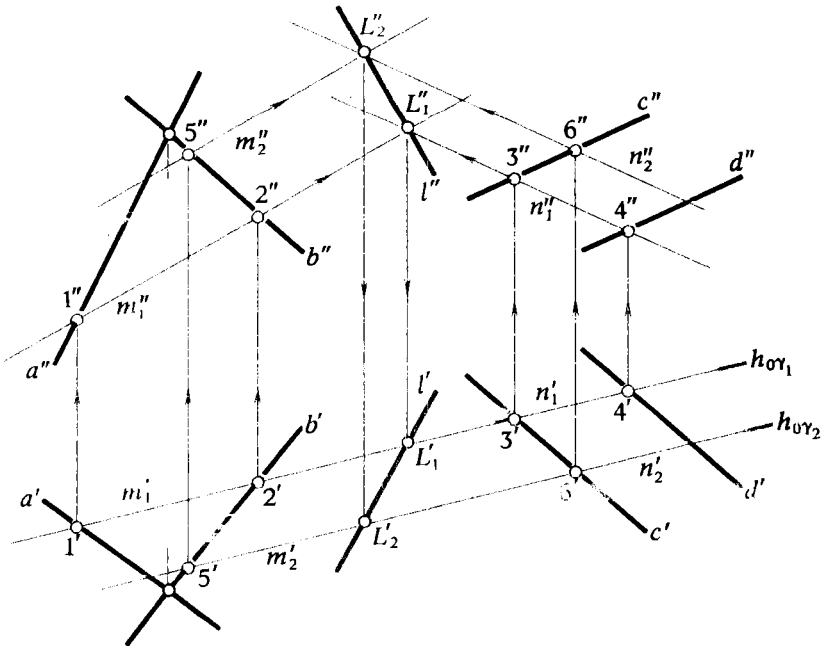


Рис. 183

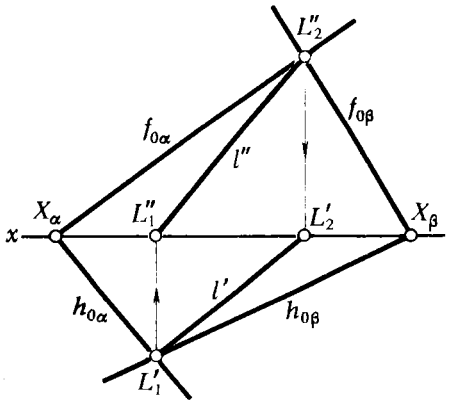


Рис. 184

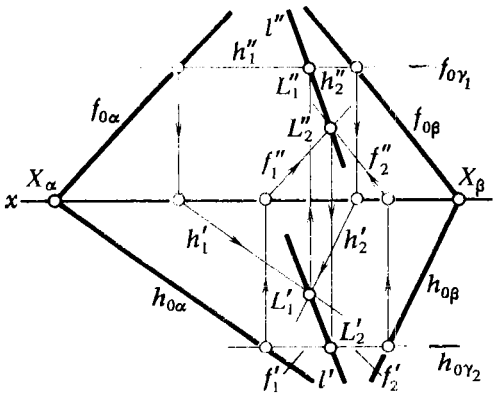


Рис. 185

за такие точки приняты 5 и 6. Пересечение $m_2 \cap n_2 = L_2$. Точки L_1 и L_2 определяют искомую прямую l.

ПРИМЕР 2. Определить линию пересечения плоскостей α и β, заданных следами (рис. 184).

РЕШЕНИЕ. В данном случае решение значительно упрощается в связи с тем, что отпадает необходимость в выполнении построений, предусмотренных первым и вторым пунктами алгоритма (см. § 43, табл. 8). Это происходит потому, что роль вспомогательных секущих плоскостей γ_1 и γ_2 при задании плоскости следами могут выполнять плоскости проекций π_1 и π_2, а соответствующие следы $h_{0\alpha}$, $h_{0\beta}$ и $f_{0\alpha}$, $f_{0\beta}$ несут функции проекций прямых m', n' и m'', n''. Следовательно, точки пересечения одноименных следов плоскостей α и β определяют положение проекций точек L_1 и L_2:

$$L_1' = h_{0\alpha} \cap h_{0\beta} \text{ и } L_2'' = f_{0\alpha} \cap f_{0\beta}.$$

Через одноименные проекции точек L_1 и L_2 проводим проекции искомой прямой l' и l''.

Если одноименные следы плоскостей не пересекаются в пределах чертежа, то не представляется возможным использовать плоскости проекций в качестве вспомогательных секущих плоскостей. В этих случаях приходится вводить секущие плоскости, которые целесообразно проводить параллельно плоскостям проекций. Поясним сказанное на примере решения задачи по определению линии пересечения плоскостей α и β.

ПРИМЕР 3. Определить линию пересечения плоскостей α и β (рис. 185).

РЕШЕНИЕ. Вводим вспомогательные секущие плоскости $\gamma_1 \parallel \pi_1$ и $\gamma_2 \parallel \pi_2$. Эти плоскости пересекают заданные α и β по горизонталям h_1 и h_2 (плоскость γ_1) и фронталям f_1 и f_2 (плоскость γ_2).

Находим точки L_1 и L_2: $L_1' = h_1' \cap h_2'$; $L_2'' = f_1'' \cap f_2''$. Зная L_1' и L_2'', определяем L_1'' и L_2'. Через одноименные проекции точек $L_1'L_2'$ и $L_1''L_2''$ проводим проекции l' и l'' искомой прямой пересечения плоскостей α и β.

Эту же задачу можно решить иначе. Вместо двух вспомогательных секущих плоскостей уровня взять одну плоскость γ общего положения, параллельную одной из заданных плоскостей α (или β). Такой вариант решения основан на том, что линии пересечения плоскости α двумя параллельными плоскостями β и γ параллельны между собой.

ПРИМЕР 4. Определить линию пересечения плоскостей α и β (рис. 186).

РЕШЕНИЕ. Проводим вспомогательную секущую плоскость $\gamma \parallel \beta$ ($h_{0\gamma} \parallel h_{0\beta}$ и $f_{0\gamma} \parallel f_{0\beta}$). Точку X_γ выбираем так, чтобы одноименные следы плоскостей α и γ пересекались в пределах чертежа. Находим l_1 — линию пересечения плоскостей α и γ. Проекции l_1' и l_1'' указывают направления проекций линии l пересечения плоскостей α и β.

Для определения точек, через которые пройдут эти проекции, рассмотрим $\Delta X_\alpha L_4'' X_\gamma \sim \Delta X_\alpha L_2'' X_\beta$. В $\Delta X_\alpha L_4'' X_\gamma$ $(L_4''L_3'') \parallel (L_2''L_1'')$ Δ $X_\alpha L_2'' X_\beta$, поэтому

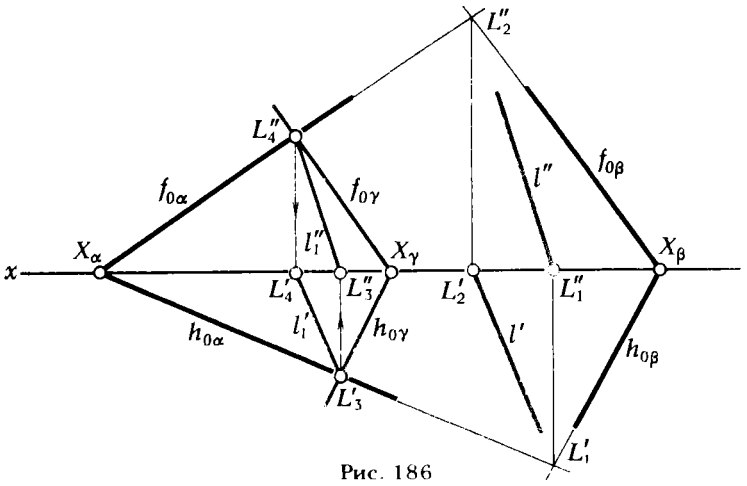


Рис. 186

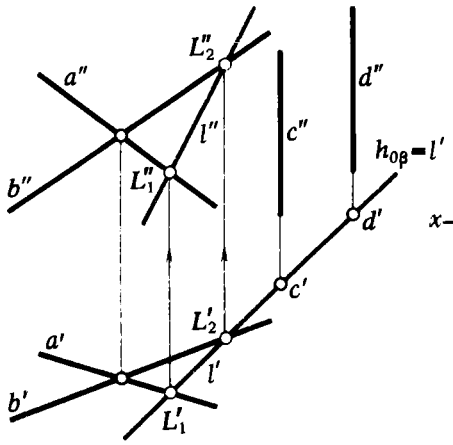


Рис. 187

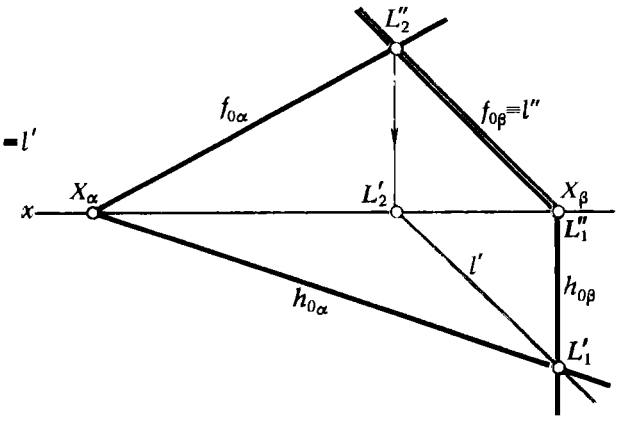


Рис. 188

$\frac{|X_\alpha X_\gamma|}{|X_\alpha X_\beta|} = \frac{|X_\alpha L''_3|}{|X_\alpha L''_1|}$. Из этой пропорции определяем $|X_\alpha L''_1|$ и через точку L''_1 проводим $l'' \parallel l''_1$.

Для нахождения горизонтальной проекции l' достаточно составить пропорцию:

$$\frac{|X_\alpha X_\gamma|}{|X_\alpha X_\beta|} = \frac{|X_\alpha L'_4|}{|X_\alpha L'_2|}.$$

Три отрезка из четырех заданы на чертеже, это дает возможность определить четвертый $[X_\alpha L'_2]$. Через точку L'_2 проводим $l' \parallel l'_1$.

Решение задачи по определению линии пересечения плоскостей значительно упрощается, если одна из плоскостей занимает проецирующее положение. Из рис. 187 и 188 видно, насколько проще решается задача, когда одна из пересекающихся плоскостей — проецирующая, по сравнению с задачей (см. пример 1, рис. 183), в которой обе плоскости занимают общее положение. В этих случаях появляется возможность воспользоваться инвариантом $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\beta}$, поэтому одна из проекций линии пересечения (l' на рис. 187 и l'' на рис. 188) входит в состав исходных данных задачи ($l' \equiv h_{0\beta}$ на рис. 187 и $l'' \equiv f_{0\beta}$ на рис. 188). Решение сводится к определению недостающей проекции прямой, принадлежащей плоскости (см. § 41, пример 2, рис. 179).

§ 45. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ (ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ)

При пересечении поверхности или какой-либо геометрической фигуры плоскостью получается плоская фигура, которую называют *сечением*.

Сечение поверхности плоскостью в общем случае представляет собой кривую (или прямую, если пересекаются плоскости), принадлежащую секущей плоскости.

Определение проекций линий сечения следует начинать с построения опорных точек — точек, расположенных на очерковых образующих поверхности (точки, определяющие границы видимости проекций кривой); точек, удаленных на экстремальные (максимальное и минимальное) расстояния от плоскостей проекций. После этого определяют произвольные точки линии сечения.

Если произвольные точки определяются с помощью одного и того же приема, то для нахождения опорных точек, как правило, приходится пользоваться различными способами.

В дальнейшем при построении сечения поверхности и линии пересечения поверхностей будет показано нахождение как опорных так и произвольных точек сечения.

А. Построение сечения многогранников.

Многогранником называют пространственную фигуру, ограниченную замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников (в частном случае треугольников).

Стороны многоугольников образуют *ребра*, а плоскости многоугольников — *грани* многогранника.

Проекциями сечения многогранников, в общем случае, являются многоугольники, вершины которых принадлежат ребрам, а стороны — граням многогранника*. Поэтому задачу по определению сечения многогранника можно свести к многократному решению задачи по определению точки встречи прямой (ребер многогранника) с плоскостью или к задаче по нахождению линии пересечения двух плоскостей (грани многогранника и секущей плоскости).

Первый путь решения называют *способом ребер*, второй — *способом граней*. Какому из способов следует отдать предпочтение, надо решать в каждом конкретном случае.

ПРИМЕР 1. Определить сечение четырехгранной призмы $ABCDEFGH$ (рис. 189) плоскостью $\alpha(a \parallel b)$.

РЕШЕНИЕ. Решаем эту задачу способом ребер. Для этого заключаем ребра в горизонтально проецирующие плоскости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$: $\gamma_1 \supset (AE)$; $\gamma_2 \supset (BF)$; $\gamma_3 \supset (CG)$; $\gamma_4 \supset (DH)$.

Находим проекции линий пересечения этих плоскостей с плоскостью α (прямые 1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8). Отмечаем точки пересечения полученных прямых с соответствующими ребрами призмы $K = (1, 2) \cap (AE)$; $L = (3, 4) \cap (BF)$; $M = (5, 6) \cap (CG)$; $N = (7,8) \cap (DH)$. Четырехугольник $KLMN$ — искомое сечение.

Решение задачи значительно упрощается, если секущая плоскость или плоскости граней (если многогранник относится к призмам) занимает проецирующее положение.

ПРИМЕР 2. Определить сечение трехгранной пирамиды $SABC$ горизонтально проецирующей плоскостью α (рис. 190).

Для получения ответа на поставленную задачу не требуется никаких дополнительных построений. На основании инвариантного свойства 2г (§ 6) горизонтальная проекция сечения пирамиды плоскостью α должна принадлежать следу плоскости $h_{0\alpha}$. Поэтому достаточно отметить точки M', N', L', в которых горизонтальный след $h_{0\alpha}$ секущей плоскос-

*В частном случае многоугольник сечения может проецироваться в отрезок прямой (см. инвариантное свойство 2г, § 6).

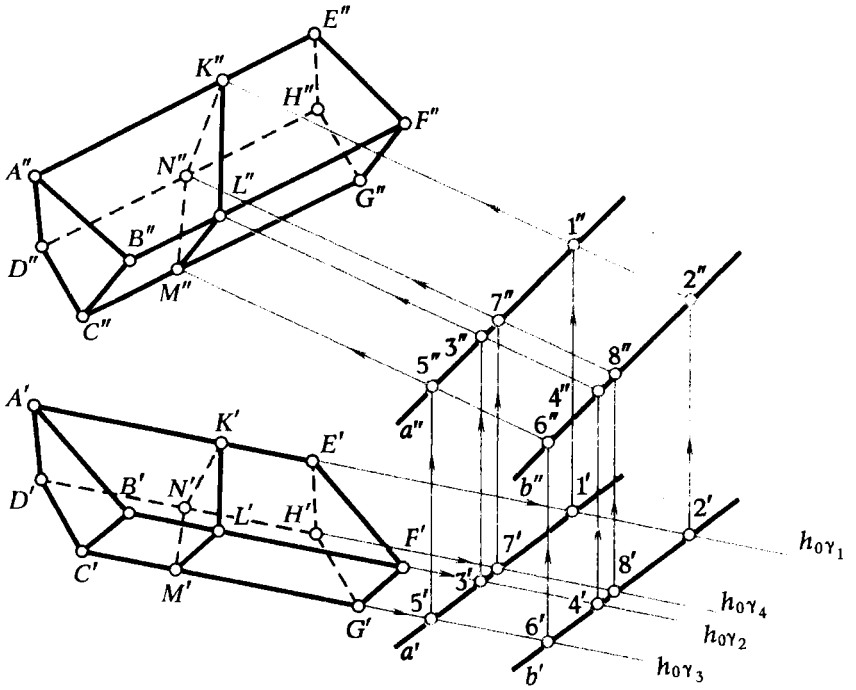


Рис. 189

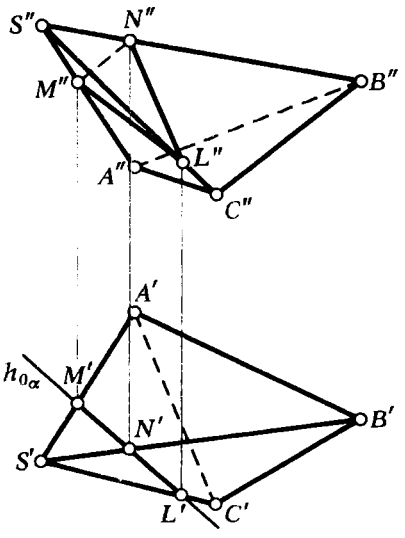


Рис. 190

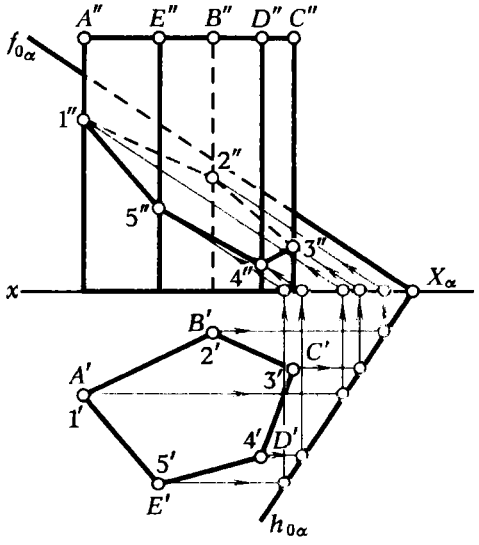


Рис. 191

ти α пересекает горизонтальные проекции ребер пирамиды.

Фронтальные проекции вершин треугольника сечения определяются по их горизонтальным проекциям. Для этого достаточно из точек M', N', L' провести линии связи — вертикальные прямые и отметить точки их пересечения с фронтальными проекциями ребер пирамиды.

ПРИМЕР 3. Определить сечение пятигранной призмы $ABCDE$, ребра которой перпендикулярны горизонтальной плоскости проекции, секущая плоскость α — общего положения (рис. 191).

Так как ребра призмы перпендикулярны плоскости π_1, то горизонтальные проекции точек пересечения этих ребер с плоскостью α (1′, 2′, 3′, 4′, 5′) совпада-

ют с горизонтальными проекциями ребер, т. е. точками A', B', C', D', E'.

Фронтальные проекции точек встречи определяем из условия принадлежности этих точек плоскости α. Решение сводится к нахождению недостающей проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна хотя бы одна из ее проекций (см. § 40, пример 3, рис. 171). На рис. 191 фронтальные проекции точек $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$ найдены с помощью фронтальной плоскости α.

Б. Построение сечения поверхности вращения.

Так как для рассматриваемого круга задач в алгоритме $l = (L_1 \cup \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n)$; $[L_j = (\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]$ α — поверхность вращения, а β — плоскость, то для нахождения общих точек $L_j, \ldots$, принадлежащих как поверхности α, так и плоскости β, целесообразно в качестве вспомогательных секущих поверхностей γ_j принять плоскости, перпендикулярные к оси вращения; в этом случае плоскости γ_j будут пересекать поверхность α по окружностям, а плоскость β по линиям уровня*. Определение точек L_j сводится к нахождению точек пересечения прямой с окружностью.

ПРИМЕР. Определить сечения поверхности сферы α плоскостью общего положения β (рис. 192).

РЕШЕНИЕ. При сечении поверхности сферы плоскостью получается окружность. Если секущая плоскость общего положения, то эта окружность проецируется на плоскости проекций в виде эллипсов.

Построения начнем с определения опорных точек. Для нахождения низшей A и высшей B точки кривой сечения проводим через центр сферы O вспомогательную секущую плоскость $\gamma_1 \perp h_{0\beta}$. Точки A и B принадлежат линии пересечения плоскостей γ_1 и β. Эти точки находят в результате пересечения прямой $(1, 2) = \gamma_1 \cap \beta$ с поверхностью α. A и $B = (1, 2) \cap \alpha$. Для их определения воспользуемся способом замены плоскостей проекций. Перейдем от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$. Ось x_1 проводим перпендикулярно $h_{0\beta}$. По отношению к π_3 плоскость β занимает проецирующее положение, поэтому точки A_1'' и B_1'', в которых след $f_{0\beta_1}$ пересекает новую фронтальную проекцию очерка сферы α_1'', будут вспомогательными проекциями искомых точек. Обратными построениями определяем положение горизонтальных A', B', а затем и фронтальных A'', B'' проекций искомых точек.

$[A'B']$ является малой осью (диаметром) горизонтальной проекции эллипса. Для определения большого диаметра этого эллипса $[D'E']$ достаточно из вспомогательной проекции центра сферы O_1'' провести прямую, перпендикулярную к отрезку $[A_1''B_1'']$. Точка $C_1''(C', C'')$, в которой перпендикуляр пересекает $[A_1'', B_1'']$, является центром эллипса, через который пройдет сопряженный (большой) диаметр эллипса DE.

DE принадлежит горизонтали плоскости β. Для определения точек D и E вводим вспомогательную секущую плоскость γ_2, проходящую через точку C и параллельную плоскости проекций π_1. Эта плоскость пересекает поверхность сферы по окружности c, которая проецируется на плоскость π_1 без искажения в окружность радиуса $R = [6'' 7'']$, проведенную из центра O'. Пересечение этой окружности с горизонтальной проекцией горизонтали h_2 определяет положение горизонтальных проекций точек D' и E'. Для нахождения точек F и G, являющихся граничными точками видимости для фронтальной проекции эллипса, воспользуемся плоскостью $\gamma_3 \| \pi_2$. Эта плоскость пересечет поверхность сферы по главному меридиану, который проецируется на π_2 во фронтальную проекцию очерка сферы, а плоскость β по фронтали f_3 (f_3' f_3''). Пересечение f_3'' с фронтальной проекции очерка сферы укажет положение точек F'' и G''.

Для нахождения точек M и N, указывающих границы видимости на горизонтальной проекции сечения, проводим плоскость $\gamma_4 \| \pi_1$ ($\gamma_4 \ni O$).

Плоскость $\gamma_4 \cap \beta = h_4$, а поверхность сферы — по окружности, которая проецируется на плоскость π_1 в горизонтальную проекцию очерка сферы.

---

*Имеется в виду, что ось поверхности вращения перпендикулярна плоскости проекции.

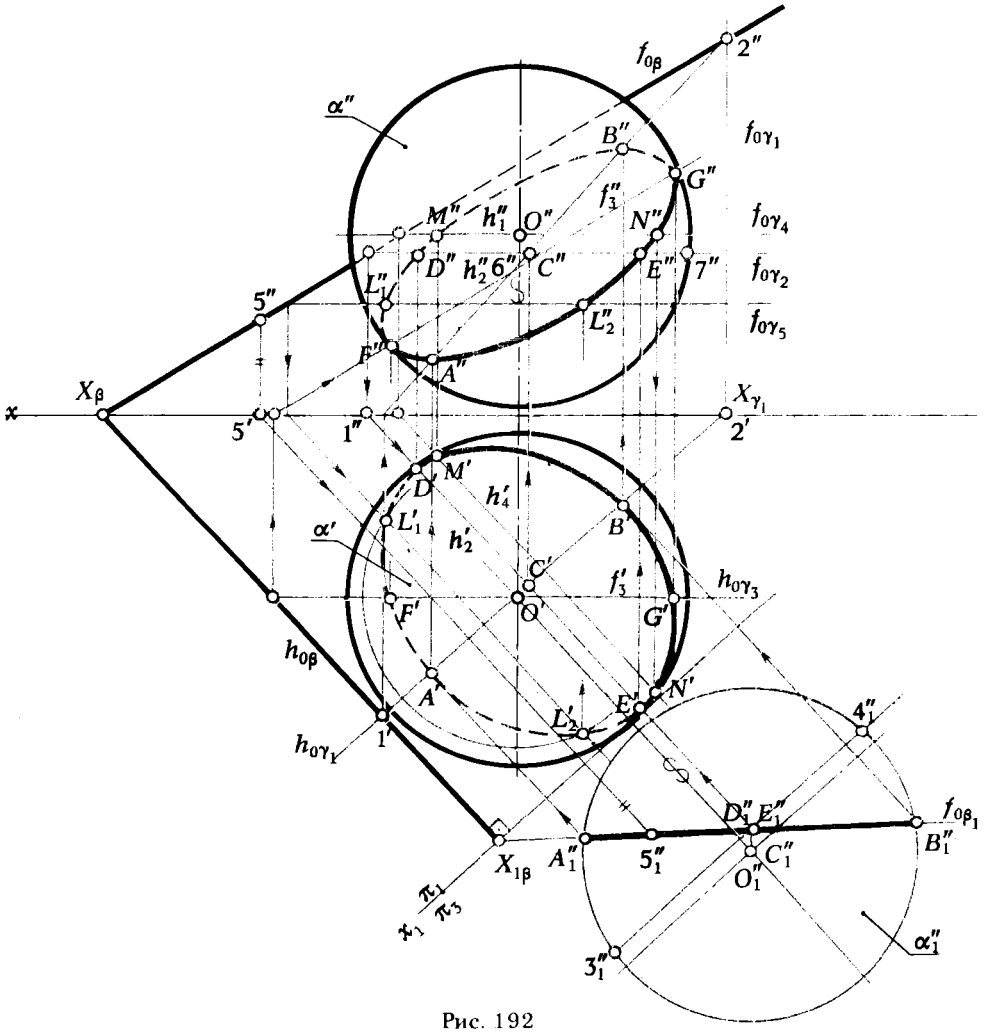


Рис. 192

Пересечение h_4' с горизонтальным очерком сферы α' определяет положение искомых горизонтальных проекций точек M' и N'

Для определения произвольных точек L_1 и L_2, принадлежащих линии сечения, как правило, целесообразно в качестве вспомогательной секущей плоскости использовать плоскости уровня.

На рис. 192 показано построение точек L_1 и L_2 с помощью горизонтальной плоскости γ_5. Проведя плоскости $\gamma_j \| \pi_1$, мы каждый раз будем получать окружность в результате пересечения γ_j с α и прямую — горизонталь при пересечении γ_j с β. Пересечения окружностей и прямых укажут положение горизонтальных проекций точек, принадлежащих горизонтальной проекции линии сечения.

Если задана произвольная поверхность вращения, то ход решения задачи и последовательность выполнения геометрических построений ничем не отличается от случая, рассмотренного на рис. 192.

На рис. 193 показано построение сечения произвольной поверхности вращения α плоскостью общего положения β. Как и в предыдущем примере, вначале определены опорные точки: низшая A и высшая B; точки C, D — границы видимости на фронтальной и точки E, F — на горизонтальной проекциях. На рис. 193 показано также построение произвольных точек L_1 и L_2.

Решение задачи по определению сечения поверхности вращения α плоскостью значительно упрощается, если секущая плоскость занимает проецирующее положение. В этом случае одна из проекций сечения — отрезок прямой, принадлежит следу плоскости.

Задача по определению второй проекции линии сечения сводится к многократному решению ранее рассмотренной задачи по нахождению второй проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна хотя бы одна ее проекция (см. § 40, пример 3, рис. 171).

Рис. 194 дает представление о таком частном случае решения задачи. Из чертежа видно, что оно проще решений, рассмотренных на рис. 192 и 193. Поэтому целесообразно при решении задач на определение сечения поверхности плоскостью предварительно перевести секущую плоскость в проецирующее положение.

В. Построение сечения поверхности прямого кругового конуса. Поверхность прямого кругового конуса относится к поверхностям вращения, но мы рассматриваем ее отдельно, так как она занимает особое место среди других поверхностей вращения. Эта поверхность в своем роде уникальна, она служит носителем замечательных кривых второго порядка: окружности, эллипса, параболы и гиперболы. Роль и области использования этих кривых в науке и, особенно, технике невозможно переоценить.

Все перечисленные кривые являются плоскими и, следовательно, могут быть получены в результате сечения конической поверхности плоскостью. В связи с этим перечисленные кривые называют также коническими сечениями. В частных случаях при определенном положении секущих плоскостей α_3, β_2, γ_1 (см. рис. 195, 196, 197) кривые

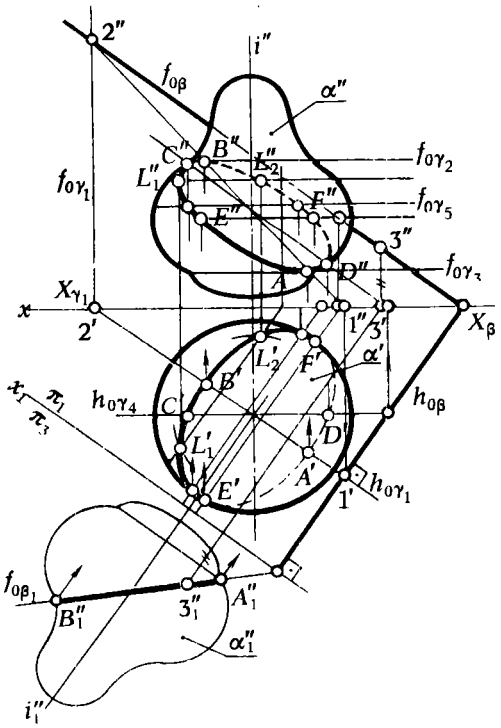


Рис. 193

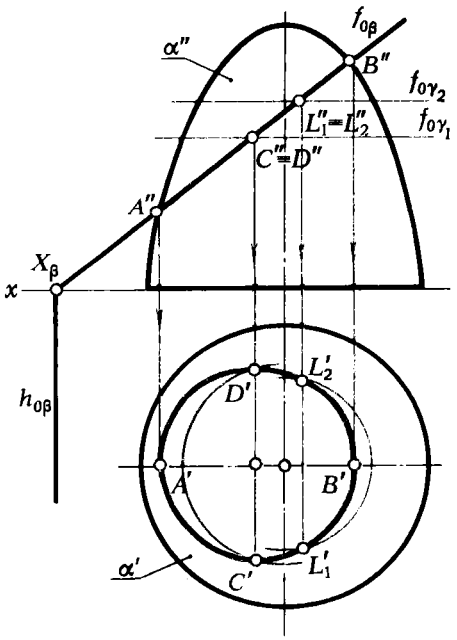


Рис. 194

второго порядка распадаются на две прямые (действительные или мнимые *).

Прежде чем говорить о построении ортогональных проекций сечения поверхности прямого кругового конуса, отметим существование теоремы, которой будем пользоваться при построении кривых второго порядка.

Т е о р е м а: *ортогональная проекция плоского сечения поверхности прямого конуса на плоскость, перпендикулярную к его оси, представляет собой кривую второго порядка и имеет одним из своих фокусов ортогональную проекцию на эту плоскость вершины конической поверхности.*

Условия, которые должны быть выполнены, чтобы получить ту или иную кривую второго порядка, при сечении конической поверхности плоскостью могут быть установлены из свойств кривых второго порядка.

Известно, что *эллипс представляет кривую второго порядка, не имеющую бесконечно удаленных (несобственных) точек.* Поэтому, чтобы получить в сечении конической поверхности эллипс, надо выбрать такую плоскость, которая пересекает все прямолинейные образующие этой поверхности. В частном случае, когда диаметры эллипса равны (секущая плоскость перпендикулярна к оси конической поверхности), в сечении получается окружность.

Из аффинной геометрии известно, что *параболой называется кривая второго порядка, касающаяся несобственной прямой*, или, что то же самое, кривая, имеющая одну несобственную точку. В связи с этим для получения параболы необходимо, чтобы секущая плоскость была параллельно одной образующей конической поверхности. В пределе, когда секущая плоскость переходит в касательную к поверхности, две симметричные дуги параболы преобразуются в две полупрямые, принадлежащие одной прямой.

---

*Плоскость α_3 (рис. 195) пересекает коническую поверхность по двум мнимым прямым, пересекающимся в собственной точке.

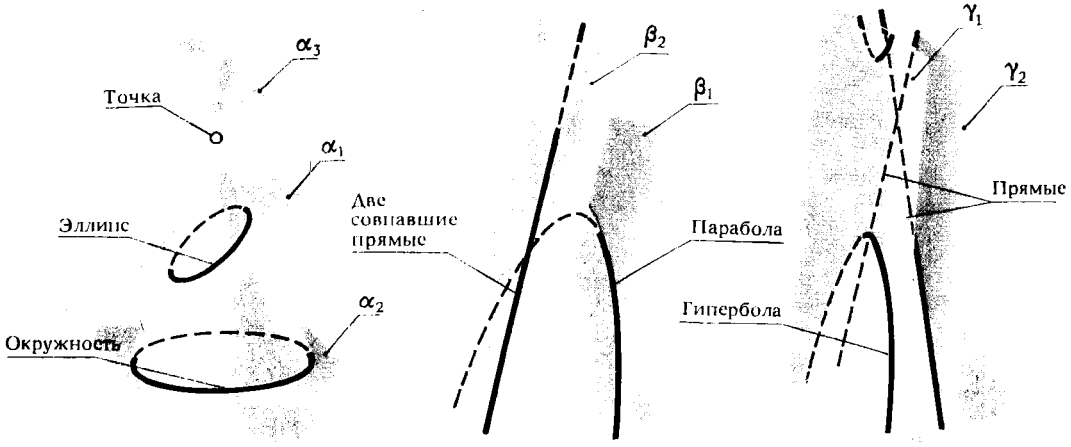


Рис. 195

Рис. 196

Рис. 197

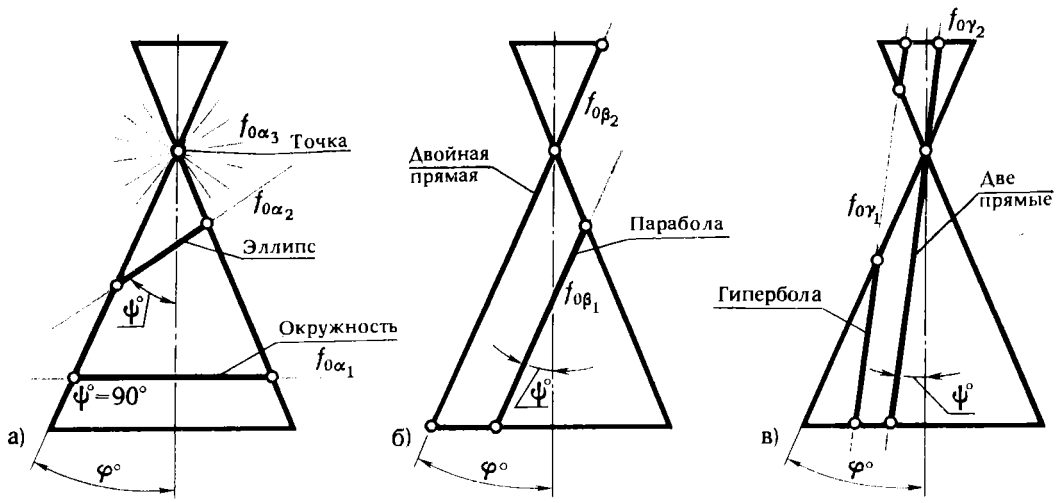


Рис. 198

И, наконец, *гипербола* с аффинной точки зрения *представляет собой кривую второго порядка, пересекающую несобственную прямую*, или, иначе, гипербола — кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки, т. е. чтобы получить гиперболу, нужно секущую плоскость взять параллельной двум прямолинейным образующим. В частном случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, гипербола распадается на две пересекающиеся прямые.

На рис. 195 показаны положение секущей плоскости для получения *эллипса* (плоскость α_1) и *окружности* (плоскость α_2) и одна из плоскостей, принадлежащих связке, проходящей через вершину конической поверхности, и пересекающих эту поверхность по двум мнимым прямым, пересекающимся в действительной точке (плоскость α_3). На рис. 196 показаны положение секущей плоскости для получения *параболы* (плоскость β_1) и плоскость β_2, имеющая с конической поверхностью общую прямую (точнее две совпавшие прямые). На рис. 197 изображены плоскость γ_1, пересекающая коническую поверхность по *гиперболе*, и плоскость γ_2, в сечении которой образуются *две пересекающиеся прямые*.

На рис. 198 приведены фронтальные проекции поверхности прямого кругового конуса, следы фронтально проецирующих секущих плоскостей и указан вид получаемой в сечении кривой. По рис. 198 можно установить признаки, обеспечивающие получение в сечении той или иной кривой второго порядка. Так, если обозначить угол наклона образующей конической поверхности к его оси через φ°, а угол между секущей плоскостью и той же осью через ψ°, то можно утверждать, что при $\widehat{\psi}^\circ > \widehat{\varphi}^\circ$ (рис. 198, *а*) в сечении получается эллипс (в частном случае, если $\psi^\circ = 90^\circ$, окружность), при $\widehat{\varphi}^\circ = \widehat{\psi}^\circ$ (рис. 198, *б*) — парабола и при $\widehat{\psi}^\circ < \widehat{\varphi}^\circ$ (рис. 198, *в*) — гипербола.

Проследим на примерах характер графических построений, которые должны быть выполнены для построения сечения поверхности прямого кругового конуса.

ПРИМЕР 1. Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса ω плоскостью α (рис. 199).

РЕШЕНИЕ. Плоскость α фронтально проецирующая. Угол между секущей плоскостью и осью конической поверхности $/\ \psi^\circ$ больше угла наклона образующей конической поверхности к его оси, поэтому в сечении получим эллипс, большая ось которого $|AB|$ будет проецироваться на плоскость π_2 без искажения в $|A''B''|$, а малая ось эллипса CD спроецируется на плоскость π_2 в точку $C''\equiv D''$, расположенную в середине отрезка $|A''B''|$. Величина малой оси $|CD|$ определяется из условия $(C, D)\in\alpha$. Проводим через $C''D''$ фронтальную проекцию параллели поверхности $\alpha\perp h''$. Для построения ее горизонтальной проекции из горизонтальной проекции фокуса эллипса S' проводим окружность радиусом $|1''2''|$ и отмечаем точки ее пересечения C' и D' с перпендикуляром, восставленным в середине $|A'B'|$ — горизонтальной проекции большой оси эллипса. Зная большой и малый диаметры эллипса, известным способом строим эллипс.

ПРИМЕР 2. На рис. 200 показаны проекции поверхности прямого кругового конуса ω и фронтально проецирующей плоскости β. Построить проекции линии сечения.

РЕШЕНИЕ. Угол наклона секущей плоскости β к оси конической поверхности равен углу наклона прямолинейной образующей к этой оси $\widehat{\psi}^\circ = \widehat{\varphi}^\circ$. Поэтому в сечении получится парабола, вершина которой спроецируется в точку A (A', A''), а горизонтальная проекция фокуса в точку S' (по теореме с. 136). Зная положение вершины A' и фокуса S', проводим директрису параболы. По данным директрисе и фокусу строим параболу. Фронтальная проекция дуги параболы проецируется в $|A''B''|$, совпадающий с $f_{0\beta}$.

ПРИМЕР 3. Построить проекции сечения поверхности прямого кругового конуса ω плоскостью γ (рис. 201).

РЕШЕНИЕ. Так как $/\ \psi^\circ$ наклона секущей плоскости γ к оси конической поверхности меньше угла наклона образующей конической поверхности $/\ \varphi^\circ$, то плоскость γ пересечет поверхность ω по гиперболе. Фокусы и вершины горизонтальной проекции ее ветвей определяются непосредственно из чертежа. С помощью фокусов и вершин строим асимптоты горизонтальной проекции гиперболы. Зная положение вершин, фокусов и асимптот, можно построить любое число точек, принадлежащих ветвям гиперболы.

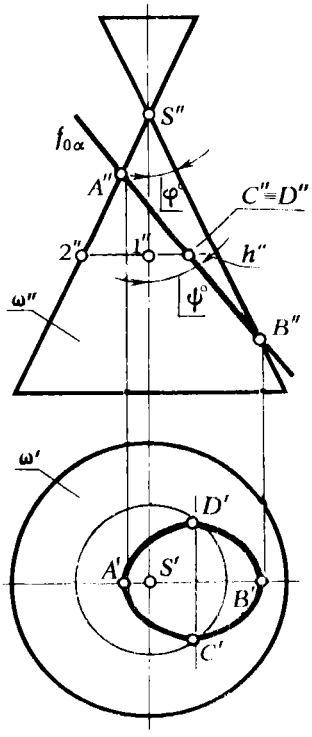


Рис. 199

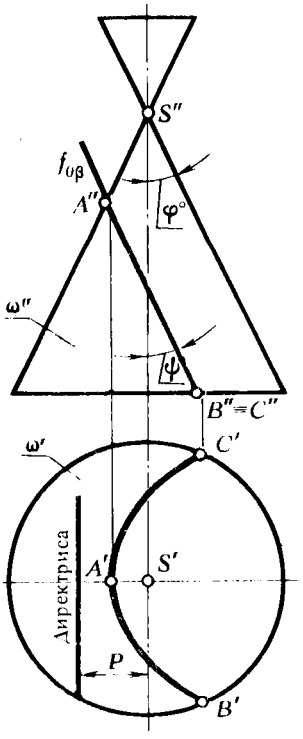


Рис. 200

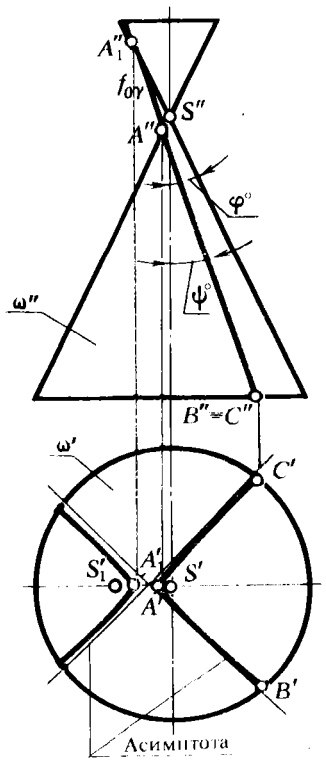


Рис. 201

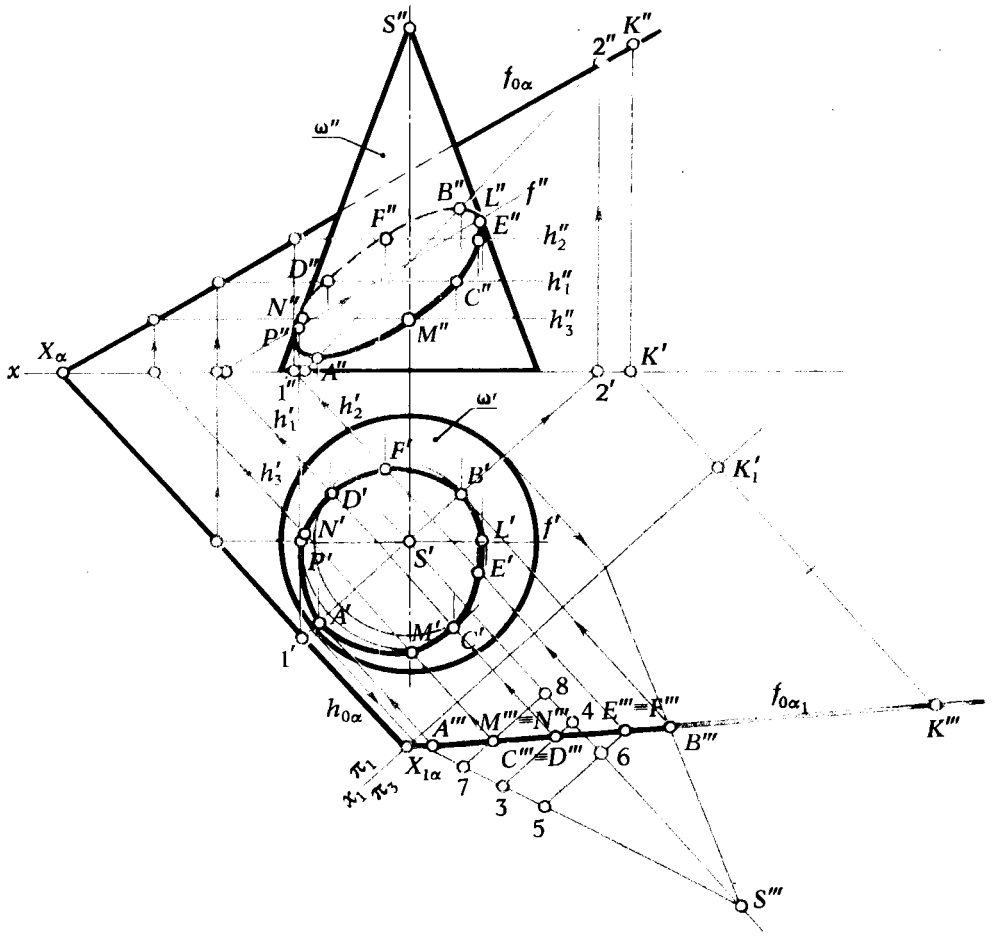


Рис. 202

В рассмотренных примерах пересекающая коническую поверхность плоскость занимала проецирующее положение. Если секущая плоскость общего положения, то целесообразно с помощью способов преобразования перевести ее в проецирующее положение. Это позволит свести задачу к простейшей — одному из рассмотренных случаев (рис. 199 ... 201).

ПРИМЕР 4. Построить проекции сечения конической поверхности ω плоскостью α (рис. 202).

РЕШЕНИЕ. Чтобы упростить решение задачи, осуществим замену плоскости π_2 новой плоскостью π_3. Плоскость π_3 выбираем так, чтобы по отношению к ней секущая плоскость α заняла проецирующее положение. Спроецируем на плоскость π_3 коническую поверхность ω. Выполненные преобразования позволили свести решение к случаю, рассмотренному ранее (см. пример 1, рис. 199).

Для построения фронтальной проекции эллипса сечения на рис. 202, кроме точек A, B и C, D, на вспомогательной проекции взяты точки E, F и M, N, горизонтальные и фронтальные проекции этих точек определены с помощью горизонталей h_2 и h_3. Кроме опорных точек A и B, являющихся высшей (B) и низшей (A) точками сечения, на рис. 202 показаны точки P и L, принадлежащие фронтальным проекциям очерковых образующих конической поверхности ω. Эти точки служат границей видимости для фронтальной проекции сечения. Для нахождения точек P'' и L'' пользуемся фронталью f.

§ 46. ПЛОСКОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательные плоскости играют большую роль в геометрии. Построение касательных плоскостей в практическом отношении имеет важное значение, так как наличие их позволяет определить направление нормали к поверхности в точке касания. Эта задача находит широкое применение в инженерной практике. К помощи касательных плоскостей обращаются также для построения очерков геометрических фигур, ограниченных замкнутыми поверхностями. В теоретическом плане плоскости, касательные к поверхности, используются в дифференциальной геометрии при изучении свойств поверхности в районе точки касания.

Основные понятия и определения

Плоскость, касательную к поверхности, следует рассматривать как предельное положение секущей плоскости (по аналогии с прямой, касательной к кривой, которая также определяется как предельное положение секущей).

Плоскость, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке, есть множество всех прямых — касательных, проведенных к поверхности через заданную точку.

В дифференциальной геометрии доказывается, что все касательные к поверхности, проведенные в обыкновенной точке, компланарны (принадлежат одной плоскости).

Выясним, как проводится прямая, касательная к поверхности. Касательная t к поверхности β в заданной на поверхности точке M (рис. 203) представляет предельное положение секущей l_1, пересекающей поверхность в двух точках (MM_1, MM_2, ..., MM_n), когда точки пересечения совпадают ($M \equiv M_n$, $l_n \equiv t_M$). Очевидно $\{M_1, M_2, ..., M_n\} \in g$, так как $g \subset \beta$. Из сказанного выше вытекает следующее определение:
касательной к поверхности называется прямая, касательная к какой-либо кривой, принадлежащей поверхности.

Так как плоскость определяется двумя пересекающимися прямыми, то для задания плоскости, касательной к поверхности в заданной точке, достаточно провести через эту точку две произвольные линии, принадлежащие поверхности (желательно простые по форме), и к каждой из них построить касательные в точке пересечения этих линий. Построенные касательные однозначно определяют касательную плоскость. Наглядное представление о проведении плоскости α, касательной к поверхности β в заданной точке M, дает рис. 204. На этом рисунке показана также нормаль n к поверхности β.

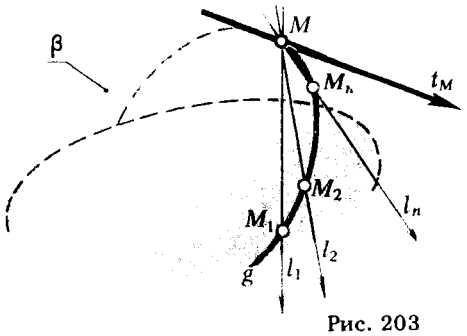


Рис. 203

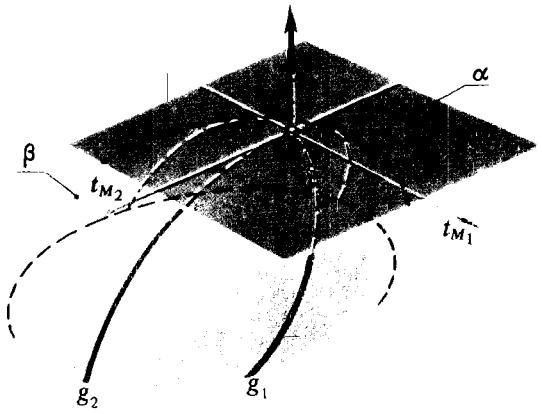


Рис. 204

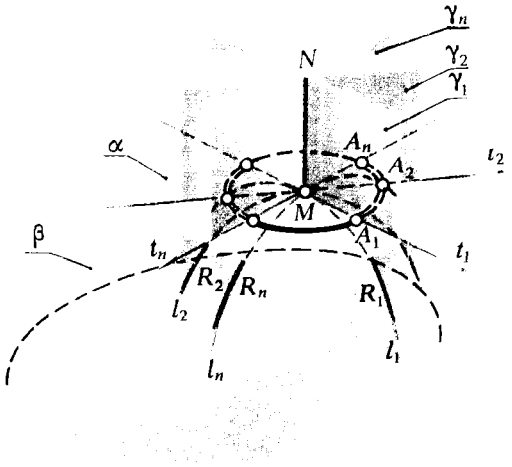


Рис. 205

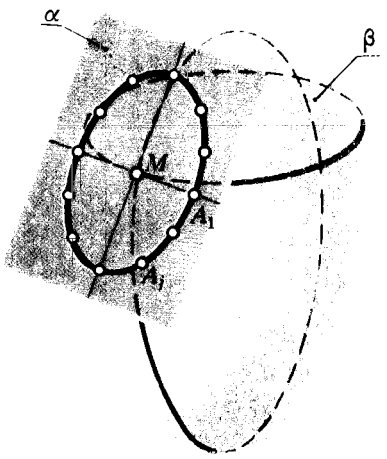


Рис. 206

Нормалью к поверхности в заданной точке называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Линию пересечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, называют нормальным сечением поверхности. В зависимости от вида поверхности касательная плоскость может иметь с поверхностью как одну, так и множество точек (линию). Линия касания может быть в то же время и линией пересечения поверхности с плоскостью.

Возможны также случаи, когда на поверхности имеются точки, в которых невозможно провести касательную к поверхности; такие точки называют особыми. В качестве примера особых точек можно привести точки, принадлежащие ребру возврата торсовой поверхности, или точку пересечения меридиана поверхности вращения с ее осью, если меридиан и ось пересекаются не под прямым углом.

Виды касания зависят от характера кривизны поверхности.

Кривизна поверхности

Вопросы кривизны поверхности были исследованы французским математиком Ф. Дюпеном (1784— 1873), который предложил наглядный способ изображения изменения кривизны нормальных сечений поверхности.

Для этого в плоскости, касательной к рассматриваемой поверхности в точке M (рис. 205, 206), на касательных к нормальным сечениям по обе стороны от данной точки откладываются отрезки, равные корням квадратным из величин соответствующих радиусов кривизны этих сечений. Множество точек — концов отрезков задают кривую, называемую *индикатрисой Дюпена*. Алгоритм построения индикатрисы Дюпена (рис. 205) можно записать:

1. $M \in \alpha,\ M \in \beta \wedge \alpha \pitchfork \beta$;
2. $[MN) \perp \alpha,\ [MN) \perp \beta$;
3. $[MN) \subset \gamma_1,\ [MN) \subset \gamma_2, \ldots,\ [MN) \subset \gamma_n$;
4. $\gamma_1 \cap \beta = l_1,\ \gamma_2 \cap \beta = l_2, \ldots, \gamma_n \cap \beta = l_n$;
5. $\gamma_1 \cap \alpha = t_1,\ \gamma_2 \cap \alpha = t_2, \ldots, \gamma_n \cap \alpha = t_n$;
6. $[MA_1] = \sqrt{R_{l_1}},\ [MA_2] = \sqrt{R_{l_2}}, \ldots, [MA_n] = \sqrt{R_{l_n}}$,

где R — радиус кривизны.

$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ — индикатриса Дюпена.

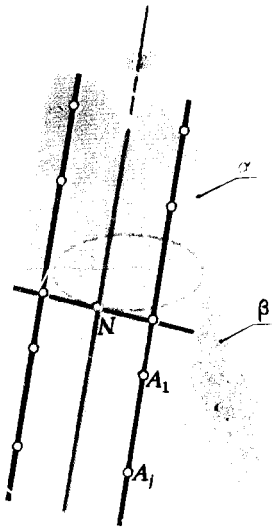


Рис. 207

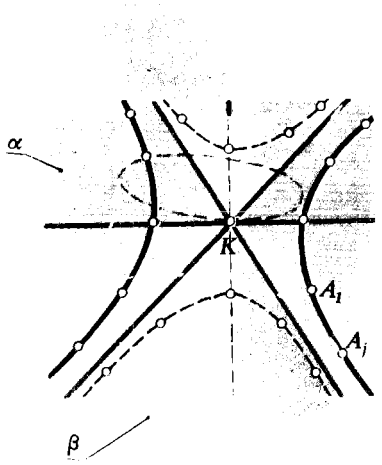


Рис. 208

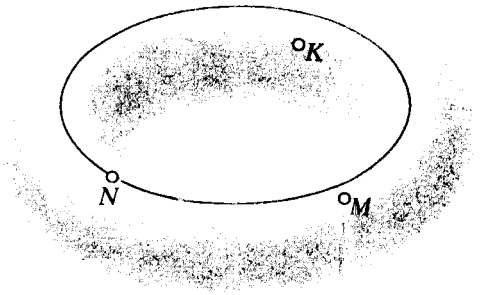


Рис. 209

Если индикатриса Дюпена поверхности — эллипс, то точка M называется эллиптической, а поверхность — поверхностью с эллиптическими точками (рис. 206). В этом случае касательная плоскость имеет с поверхностью только одну общую точку, а все линии, принадлежащие поверхности и пересекающиеся в рассматриваемой точке, расположены по одну сторону от касательной плоскости. Примером поверхностей с эллиптическими точками могут служить: параболоид вращения, эллипсоид вращения, сфера (в этом случае индикатриса Дюпена — окружность и др.).

При проведении касательной плоскости к торсовой поверхности плоскость будет касаться этой поверхности по прямой образующей. Точки этой прямой называются *параболическими, а поверхность — поверхностью с параболическими точками.* Индикатриса Дюпена в этом случае — две параллельные прямые (рис. 207*).

На рис. 208 показана поверхность, состоящая из точек, в кото-

*Кривая второго порядка — парабола — при определенных условиях может распадаться на две действительные параллельные прямые, две мнимые параллельные прямые, две совпадающие прямые. На рис. 207 мы имеем дело с двумя действительными параллельными прямыми.

рых касательная плоскость пересекает поверхность. Такая поверхность называется *гиперболической*, а принадлежащие ей точки — *гиперболическими точками. Индикатриса Дюпена в данном случае — гипербола.*

Поверхность, все точки которой являются гиперболическими, имеет форму седла (косая плоскость, однополостный гиперболоид, вогнутые поверхности вращения и др.).

Одна поверхность может иметь точки разных видов, например, у торсовой поверхности (рис. 209) точка M эллиптическая; точка N — параболическая; точка K — гиперболическая.

В курсе дифференциальной геометрии доказывается, что нормальные сечения, в которых величины кривизны $K_j = 1/R_j$ (где R_j — радиус кривизны рассматриваемого сечения) имеют экстремальные значения, расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Такие кривизны $K_1 = 1/R_{max}$, $K_2 = 1/R_{min}$ называются главными, а значения $H = (K_1 + K_2)/2$ и $K = K_1K_2$ — соответственно средней кривизной поверхности и полной (гауссовой) кривизной поверхности в рассматриваемой точке. Для эллиптических точек $K > 0$, гиперболических $K < 0$, параболических $K = 0$.

Задание плоскости касательной к поверхности на эпюре Монжа

Ниже на конкретных примерах покажем построение плоскости, касательной к поверхности с эллиптическими (пример 1), параболическими (пример 2) и гиперболическими (пример 3) точками.

ПРИМЕР 1. Построить плоскость α, касательную к поверхности вращения β, с эллиптическими точками. Рассмотрим два варианта решения этой задачи: а) точка $M \in \beta$ и б) точка $M \notin \beta$.

Вариант а (рис. 210).

Касательная плоскость определяется двумя касательными t_1 и t_2, проведенными в точке M к параллели и меридиану поверхности β.

Проекции касательной t_1 к параллели h поверхности β будут $t'_1 \perp (S'M')$ и $t''_1 \parallel$ оси x. Горизонтальная проекция касательной t'_2 к меридиану d поверхности β, проходящему через точку M, совпадет с горизонтальной проекцией меридиана. Чтобы найти фронтальную проекцию касательной t''_2, меридиональную плоскость $\gamma(\gamma \ni M)$ путем вращения вокруг оси поверхности β переводим в положение γ_1, параллельное плоскости π_2. В этом случае точка $M \to M_1$ (M'_1, M''_1). Проекция касательной $t''_2 \to t''_{2_1}$ определяется (M''_1S''). Если мы теперь возвратим плоскость γ_1 в первоначальное положение, то точка S'' останется на месте (как принадлежащая оси вращения), а $M''_1 \to M''$ и фронтальная проекция касательной t''_2 определится $(M''S'')$.

Две пересекающиеся в точке $M \in \beta$ касательные t_1 и t_2 определяют плоскость α, касательную к поверхности β.

Вариант б (рис. 211)

Для построения плоскости, касательной к поверхности проходящей через точку, не принадлежащую поверхности, нужно исходить из следующих соображений: через точку вне поверхности, состоящей из эллиптических точек, можно провести множество плоскостей, касательных к поверхности. Огибающей этих поверхностей будет некоторая коническая поверхность. Поэтому, если нет дополнительных указаний, то задача имеет множество решений и в таком случае сводится к проведению конической поверхности γ, касательной к данной поверхности β.

На рис. 211 показано построение конической поверхности γ, касательной к сфере β. Любая плоскость α, касательная к конической поверхности γ, будет касательной к поверхности β.

Для построения проекций поверхности γ из точек M' и M'' проводим касательные к окружностям h' и f'' — проекциям сферы. Отмечаем точки касания 1 (1′ и 1″), 2 (2′ и 2″), 3 (3′ и 3″) и 4 (4′ и 4″). Горизонтальная проекция окружности — линия касания конической поверхности и сферы спроецируется в [1′2′]. Для нахождения точек эллипса, в который эта окружность спроецируется на фронтальную плоскость проекций, воспользуемся параллелями сферы.

На рис. 211 таким способом определены фронтальные проекции точек E и F (E'' и F''). Имея коническую поверхность γ, строим к ней касательную плоскость α. Характер и последовательность графичес-

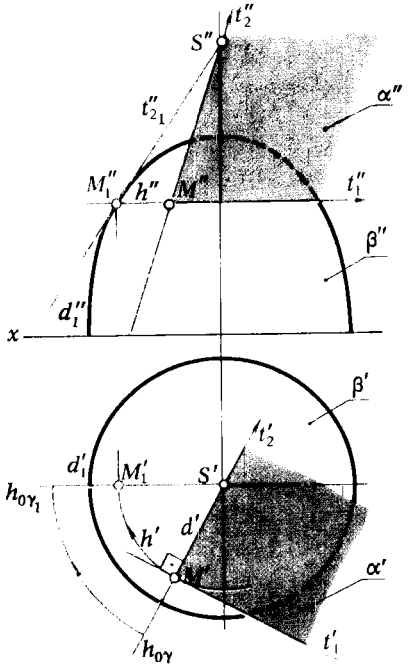


Рис. 210

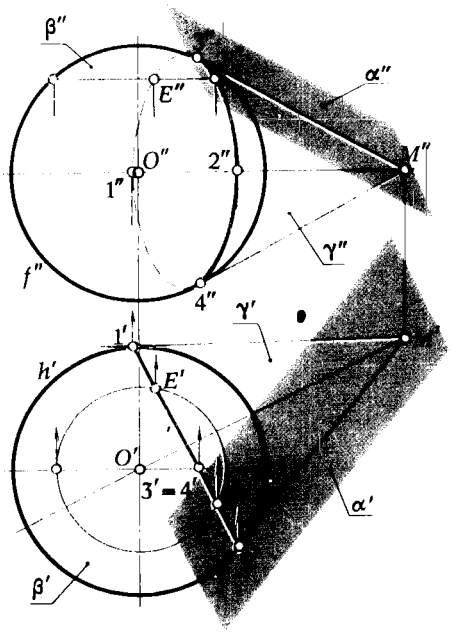


Рис. 211

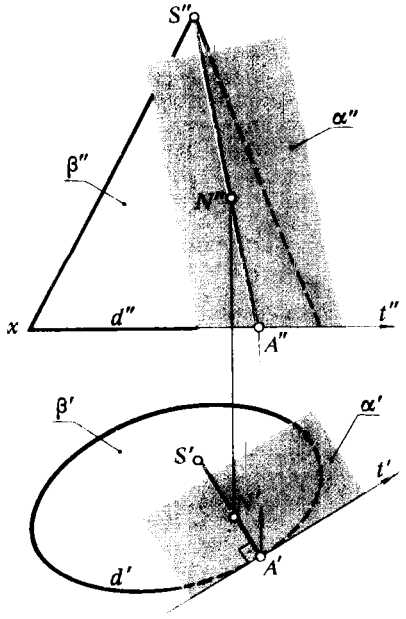


Рис. 212

ких построений, которые необходимо для этого выполнить, приведены в следующем примере.

ПРИМЕР 2. Построить плоскость α, касательную к поверхности β с параболическими точками.

Как в примере 1, рассмотрим два варианта решения: а) точка $N \in \beta$; б) точка $N \notin \beta$.

Вариант а (рис. 212).

Коническая поверхность относится к поверхностям с параболическими точками (см. рис. 207). Плоскость, касательная к конической поверхности, касается ее по прямолинейной образующей. Для ее построения необходимо:

1) через данную точку N провести образующую SN ($S'N'$ и $S''N''$);

2) отметить точку пересечения образующей (SN) с направляющей d: $(SN) \cap d = A$;

3) провести касательную t к d в точке A.

Образующая (SA) и пересекающая ее касательная t определяют плоскость α, касательную к конической поверхности β в данной точке N*.

Вариант б (рис. 213).

Для проведения плоскости α, касательной к конической поверхности β и проходящей через точку N, не принадле-

*Так как поверхность β состоит из параболических точек (кроме вершины S), то касательная к ней плоскость α будет иметь общую с ней не одну точку N, а прямую (SN).

жащую заданной поверхности, необходимо:

1) через данную точку N и вершину S конической поверхности β провести прямую a (a' и a'');

2) определить горизонтальный след этой прямой H_a;

3) через H_a провести касательные t_1' и t_2' к кривой $h_{0\beta}$ — горизонтальному следу конической поверхности;

4) точки касания A (A' и A'') и B (B' и B'') соединить с вершиной конической поверхности S (S' и S'').

Пересекающиеся прямые t_1, (AS) и t_2, (BS) определяют искомые касательные плоскости α_1 и α_2

ПРИМЕР 3. Построить плоскость α, касательную к поверхности β с гиперболическими точками.

Точка K (рис. 214) находится на поверхности глобоида (внутренняя поверхность кольца).

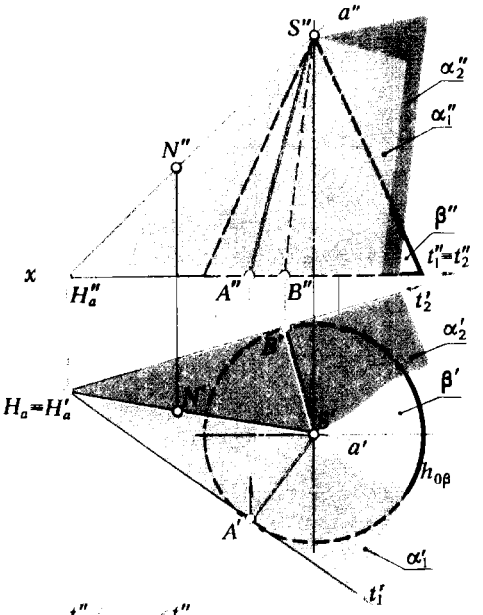


Рис. 213

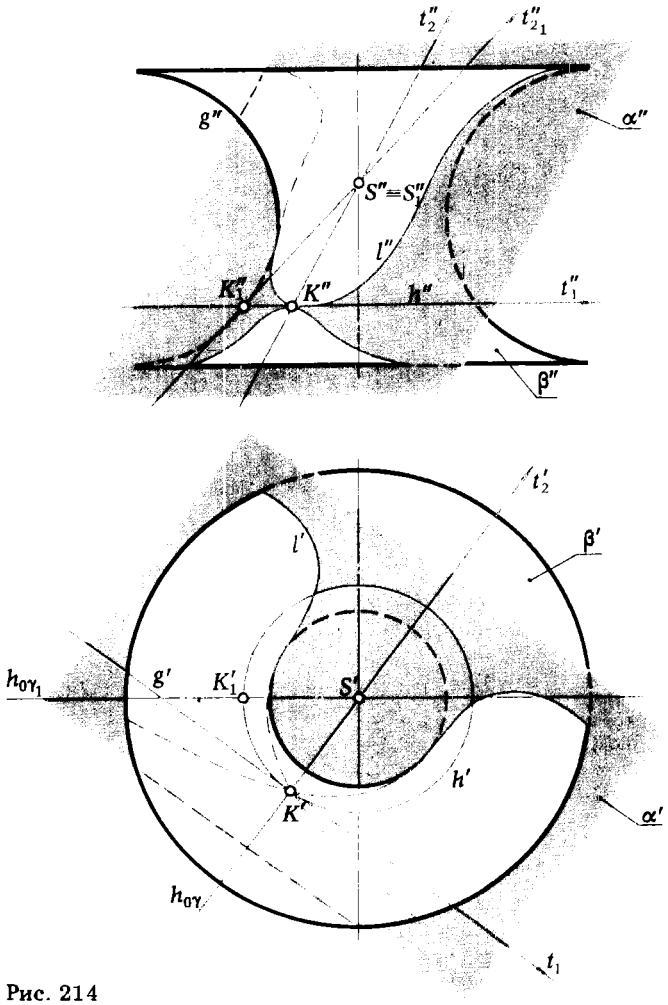


Рис. 214

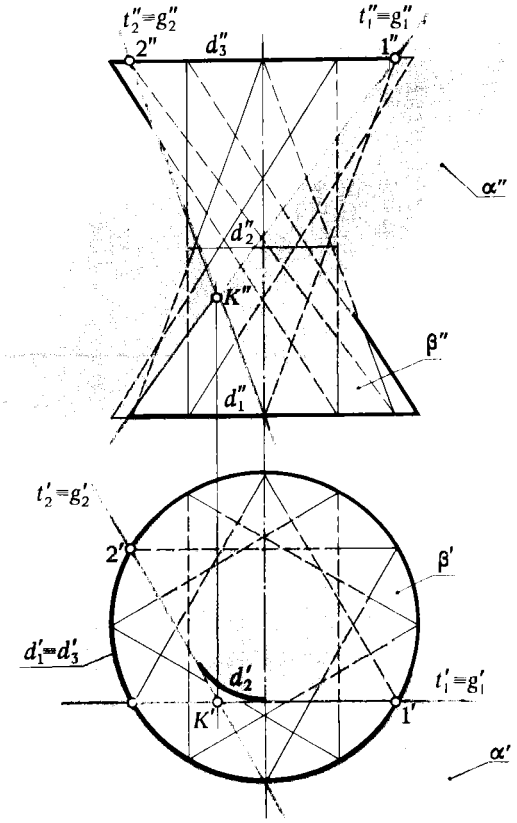


Рис. 215

Для определения положения касательной плоскости α необходимо:

1) провести через точку K параллель поверхности β $h(h', h'')$;

2) через точку K' провести касательную t_1' $(t_1'' \equiv h'')$;

3) для определения направлений проекций касательной к меридиональному сечению необходимо провести через точку K и ось поверхности плоскость γ, горизонтальная проекция t_2' совпадет с $h_{0\gamma}$; для построения фронтальной проекции касательной t_2'' предварительно переведем плоскость γ путем вращения ее вокруг оси поверхности вращения в положение $\gamma_1 \parallel \pi_2$. В этом случае меридиональное сечение плоскостью γ совместится с левой очерковой дугой фронтальной проекции — полуокружностью g''.

Точка K (K', K''), принадлежащая кривой меридионального сечения, переместится в положение K_1 (K_1', K_1''). Через K_1'' проводим фронтальную проекцию касательной t_{2_1}'' в совмещенном с плоскостью $\gamma_1 \parallel \pi_2$ положении и отмечаем точку ее пересечения с фронтальной проекцией оси вращения S_1''. Возвращаем плоскость γ_1 в исходное положение, точка $K_1'' \rightarrow K''$ (точка $S_1'' \equiv S''$). Фронтальная проекция касательной t_2'' определится точками K'' и S''.

Касательные t_1 и t_2 определяют искомую касательную плоскость α, которая пересекает поверхность β по кривой l.

ПРИМЕР 4. Построить плоскость α, касательную к поверхности β в точке K. Точка K находится на поверхности однополостного гиперболоида вращения (рис. 215).

Эту задачу можно решить, придерживаясь алгоритма, использованного в предыдущем примере, но учитывая, что поверхность однополостного гиперболоида вращения является линейчатой поверхностью, которая имеет два семейства прямолинейных образующих, причем каждая из образующих одного семейства пересекает все образующие другого семейства (см. § 32, рис. 138). Через каждую точку этой поверхности можно провести две пересекающиеся прямые — образующие, которые будут одновременно касательными к поверхности однополостного гиперболоида вращения.

Эти касательные определяют касательную плоскость, т. е. плоскость, касательная к поверхности однополостного гиперболоида вращения, пересекает эту поверхность по двум прямым g_1 и g_2. Для построения проекций этих прямых достаточно из горизонтальной проекции точки K провести касательные l'_1 и t'_2 к горизонтальной проекции окружности d'_2 — горла поверхности однополостного гиперболоида вращения; определить точки $1'$ и $2'$, в которых l'_1 и t'_2 пересекают одну из направляющих поверхности d_1. По $1'$ и $2'$ находим $1''$ и $2''$, которые совместно с K'' определяют фронтальные проекции искомых прямых.

§ 47. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

В алгоритме для решения задач на построение линии пересечения двух поверхностей $l = (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n)$; $[(\gamma_j \cap \alpha) \cap (\gamma_j \cap \beta)]$ в качестве вспомогательной поверхности (посредника) γ_j следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные поверхности α и β по наиболее простым для построения линиям — прямым или окружностям.

В качестве вспомогательных поверхностей — посредников наиболее часто используются плоскости и сферы; при решении некоторых задач бывает целесообразно обращаться за помощью к цилиндрическим и коническим поверхностям.

Ниже будет показано решение задач на определение линии пересечения поверхностей с помощью *вспомогательных секущих плоскостей* (§ 48), *цилиндрических* (§ 49), *конических* (§ 50), а также *сферических* (§ 51) *поверхностей.*

Прежде чем решить вопрос, какую вспомогательную секущую поверхность выбрать для построения линии пересечения поверхностей, следует выяснить, не занимает ли одна из пересекающихся поверхностей проецирующее положение, так как в данном случае решение поставленной задачи значительно упрощается. Это происходит из-за того, что одна из проекций линии пересечения будет совпадать со следом проецирующей поверхности, которая входит в условия поставленной задачи (см. инвариантное свойство 2г, § 6).

Поэтому решение сводится к определению недостающей проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна ее проекция и указаны проекции поверхности (см. § 41, пример 1, рис. 178).

Рис. 216 иллюстрирует решение задачи по определению линии $l = \alpha \cap \beta$, при этом $\beta \perp \pi_1$. Зелеными линиями показано построение фронтальной проекции l'' — линии пересечения сферической поверхности α с поверхностью горизонтально проецирующего прямого кругового цилиндра β. Точка A, принадлежащая линии пересечения поверхностей и являющаяся ближайшей к вертикальной оси i поверхности сферы, одновременно будет высшей точкой A'' на фронтальной проекции кривой l''. Точка B'' — крайняя правая на линии пересечения является также границей видимости кривой l''.

На рис. 217 показано определение горизонтальной проекции l' — линии пересечения произвольной конической поверхности α с фронтально проецирующей цилиндрической поверхностью β. В этом случае, как и в предыдущем примере, задача на построение линии пересечения поверхностей сводится к определению недостающей проекции линии l, принадлежащей поверхности α. Все построения, необходимые для нахождения точек A', B', C', ... кривой l' по заданным точкам A'', B'', C'', ..., выполнены зелеными линиями и не нуждаются в дополнительных пояснениях.

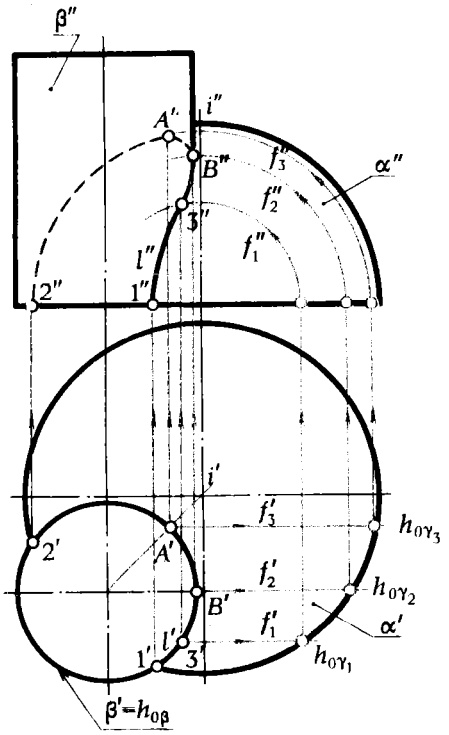


Рис. 216

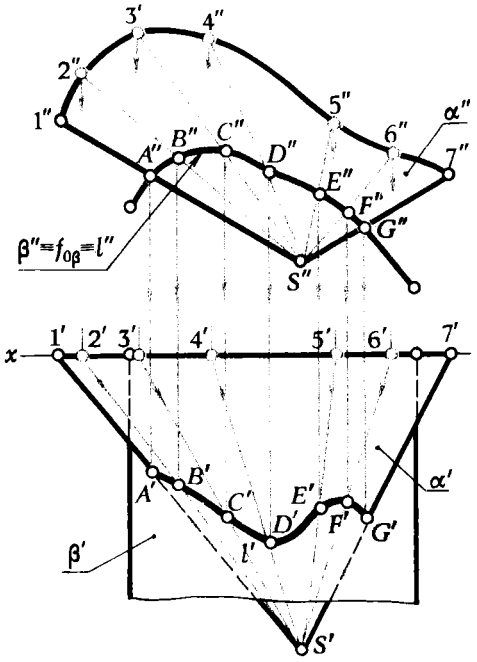


Рис. 217

§ 48. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

При определении линии пересечения поверхностей пользуются не отдельными плоскостями, а пучками плоскостей, причем ось пучка может быть как собственной, так несобственной прямой.

Рассмотрим каждый из этих вариантов в отдельности.

1. **Определение линии пересечения поверхностей с помощью пучка плоскостей, ось которого — собственная прямая.**

Этот способ применяется для построения линии пересечения:

а) двух конических поверхностей;

б) конической и цилиндрической поверхностей;

в) конической поверхности с поверхностью пирамиды или призмы;

г) двух цилиндрических поверхностей;

д) цилиндрической поверхности с поверхностью пирамиды или призмы.

Сущность способа легко проследить на примере решения задачи по определению линии пересечения двух произвольных конических поверхностей α и β (рис. 218).

Раньше (см. § 45, рис. 198,*в*) было установлено, что коническая поверхность пересекается плоскостью по двум пересекающимся прямым образующим в том случае, если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности. Поэтому, если через вершины S_1 и S_2 конических поверхностей α и β провести прямую a и заключить ее в плоскость γ_j, то эта плоскость пересечет поверхность α по прямым $(S_1\ 1)$, $(S_1\ 2)$ и поверхность β по прямым $(S_2\ 3)$, $(S_2\ 4)$. Эти прямые пересекаются в точках A, B, C, D, принадлежащих искомой линии пересечения.

Повернув вокруг прямой a плоскость γ_j на $\angle\ \varphi^\circ$, получим новое положение секущей плоскости γ_1. Плоскость γ_1 также пересечет поверхности α и β по прямым, которые, в свою очередь, пересекаются в точках, также принадлежащих линии пересечения. Поворачивая плоскость γ_j вокруг прямой a, мы будем получать различные положения секущих плоскостей и соответствующие им прямые линии их пересечения с заданными поверхностями*.

При построении проекций линий пересечения поверхностей на эпюре в первую очередь необходимо определить опорные точки, которые получаются при сечении поверхностей α и β плоскостями, касательными к одной, в частном случае к двум, пересекающимся поверхностям.

На рис. 218 показаны плоскость γ_2, проходящая через прямую a и касательная к поверхности α, и плоскость γ_3, также проходящая через прямую a и касательная к поверхности β.

Горизонтальные следы этих плоскостей $h_{0\gamma_2}$ и $h_{0\gamma_3}$ определяют $\angle\ h_{0\gamma_2} H_a h_{0\gamma_3}$, в пределах которого следует проводить горизонтальные следы вспомогательных секущих плоскостей. С помощью плоскостей γ_j и γ_1 можно определить четыре точки, принадлежащие линии пересечения. На рис. 218 показаны две точки E и F, полученные с помощью плоскости γ_j.

На рис. 219 приведен пример определения положения прямой a, через которую должны проходить вспомогательные секущие плоскости, с помощью которых можно найти точки, принадлежащие линии пересечения конической и цилиндрической поверхностей.

Решение этой задачи по существу не отличается от только что рассмотренного примера. Действительно, цилиндрическая поверхность отличается от конической тем, что точка S (вершина конической поверхности) у цилиндрической поверхности оказывается несобственной точкой S_∞. В этом случае прямая a, проходящая через точки S и S_∞,

*Поэтому описываемый способ называют также способом вращающейся плоскости.

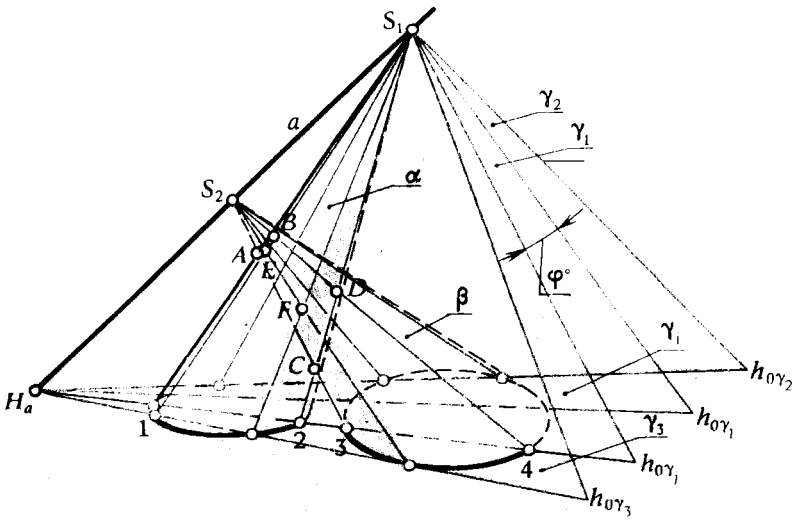


Рис. 218

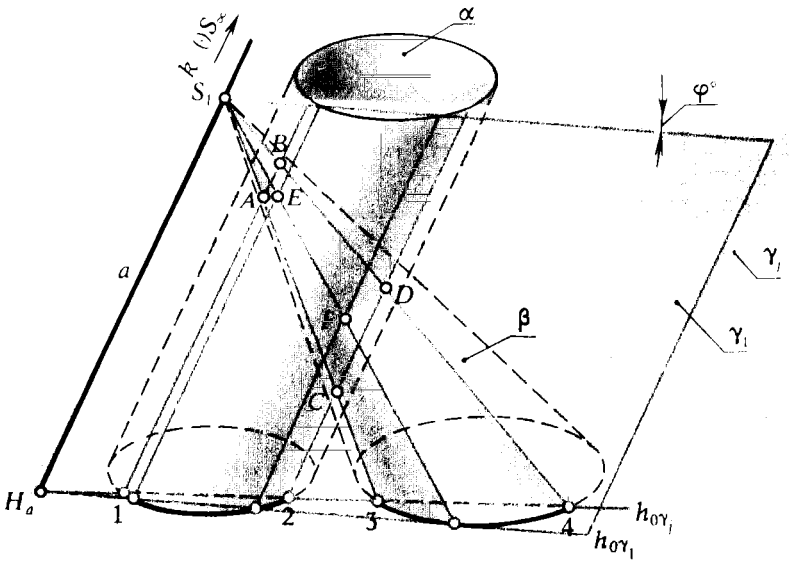


Рис. 219

будет параллельна образующей цилиндрической поверхности. Все остальные построения ничем не отличаются от рассмотренных в предыдущем примере (см. рис. 218).

В качестве примера использования пучка плоскостей для определения линии пересечения двух поверхностей по заданным их ортогональным проекциям рассмотрим следующую задачу.

ПРИМЕР. Построить линию пересечения двух конических поверхностей α и β (рис. 220).

РЕШЕНИЕ.

1. Через вершины конических поверхностей S_1 и S_2 проводим прямую a.

2. Определяем горизонтальный след прямой a — H_a.

3. Заключаем прямую a во вспомогательную секущую плоскость γ_1, касательную к конической поверхности α. Отмечаем прямые $(S_2\,2)$, $(S_2\,3)$ и $(S_1\,1)$, по которым эта плоскость пересекает поверхность β, и касается поверхности α.

4. Отмечаем точки M_1 и M_2, принадлежащие искомой линии пересечения $M_1 = (S_1\,1) \cap (S_2\,2)$ и $M_2 = (S_1\,1) \cap \cap (S_2\,3)$.

5. Через прямую a проводим плоскость γ_2, касательную к конической поверхности β. Находим прямые $(S_1\,4)$, $(S_1\,5)$ и $(S_2\,6)$ и отмечаем точки L_1 и L_2 их взаимного пересечения.

На рис. 220 показано также определение точек K_1, K_2 и N_1, N_2 с помощью вспомогательной секущей плоскости γ_j. Соединив в определенной последовательности плавными линиями одноименные проекции точек, получим проекции искомой кривой пересечения данных поверхностей.

2. Определение линии пересечения поверхностей с помощью пучка плоскостей, ось которого — несобственная прямая.

Этот способ является частным случаем предыдущего. Отличие состоит лишь в том, что прямая a — несобственная, она проходит через несобственные точки $S_{1\infty}$ и $S_{2\infty}$.

Рис. 221 иллюстрирует наглядную геометрическую модель рассматриваемого способа. Чтобы выбрать наиболее рациональное положение вспомогательной секущей плоскости для определения линии пересечения двух произвольно расположенных цилиндрических поверхностей, достаточно представить заданные цилиндрические поверхности как образованные из конических поверхностей с вершинами в несобственных точках

$S_{1\infty}$ и $S_{2\infty}$. Поэтому семейство секущих плоскостей будет составлять пучок параллельных плоскостей, проходящих через несобственную прямую a_∞ ($S_{1\infty} S_{2\infty}$). Для определения направления горизонтальных следов плоскостей этого пучка достаточно из произвольной точки пространства T провести две прямые: s_1, параллельную образующей илиндрической поверхности α, и s_2, параллельную образующей цилиндрической поверхности β. Эти пересекающиеся прямые определят направление вспомогательных секущих плоскостей γ, которые пересекают поверхности α и β по прямым линиям.

Проведя плоскость γ_j, параллельную γ, мы получим две прямые, по которым плоскость γ_j пересекает поверхность α, и две прямые при ее пересечении с поверхностью β. Взаимное пересечение этих прямых укажет четыре точки A, B и C, D, принадлежащие линии пересечения.

Для нахождения опорных точек, как и в предыдущем примере, проводим плоскости γ_1 и γ_2 соответственно касательные к поверхностям α и β. С помощью этих плоскостей находим точки M_1, M_2 и N_1, N_2. Положение горизонтальных следов $h_{0\gamma_1}$ и $h_{0\gamma_2}$ определяют область (полосу), внутри которой следует проводить вспомогательные секущие плоскости для определения общих точек, принадлежащих линии пересечения.

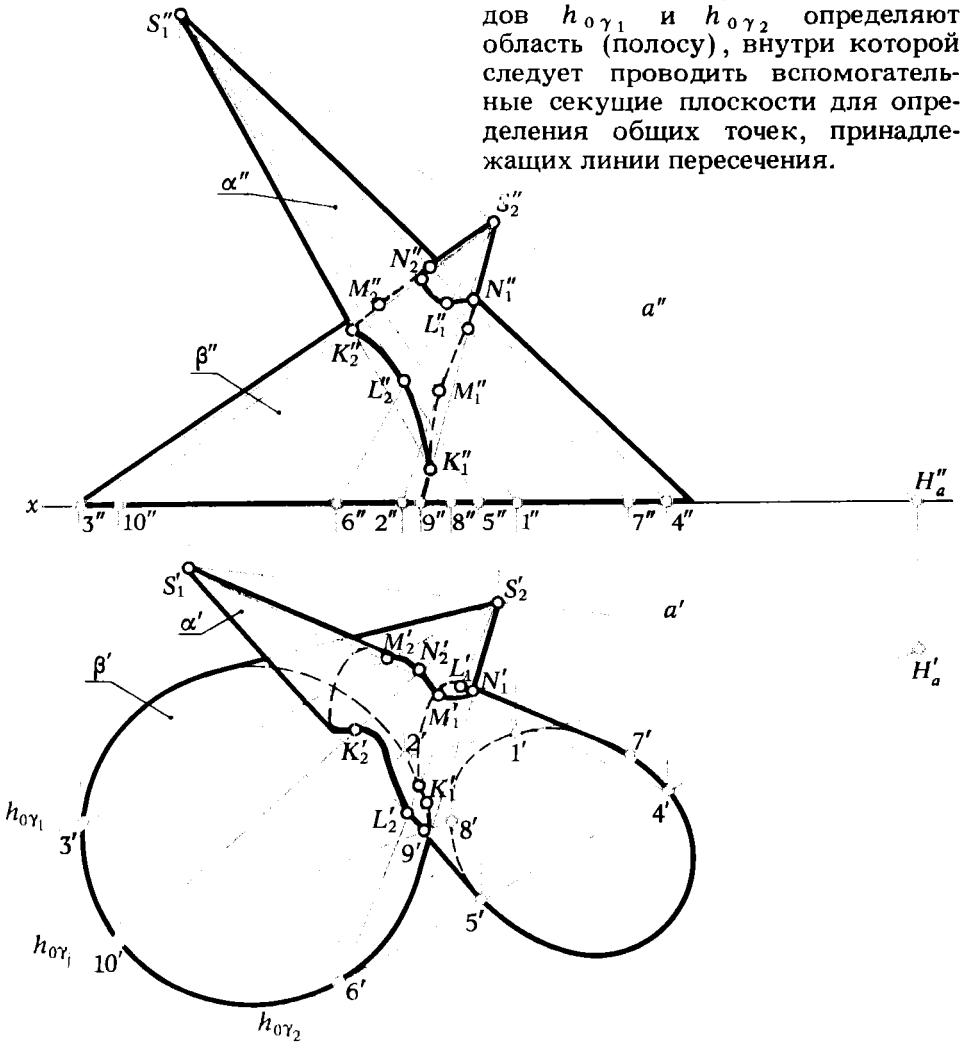


Рис. 220

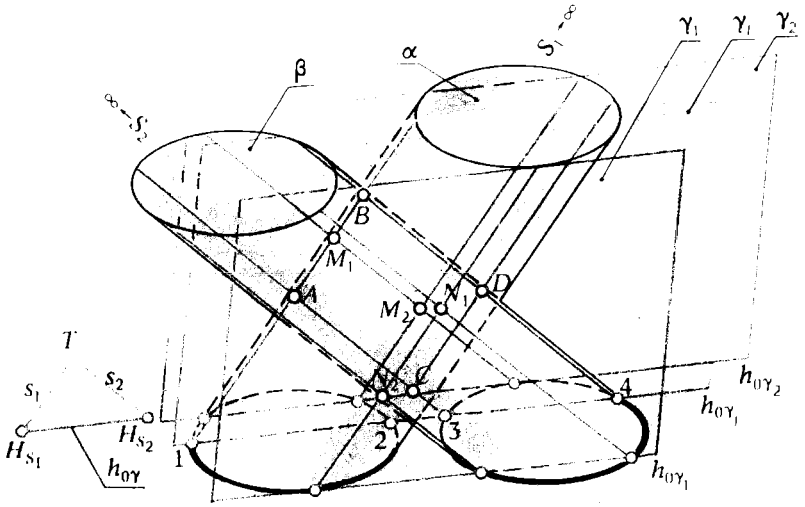


Рис. 221

Использование семейства вспомогательных секущих плоскостей, взятых из пучка плоскостей с несобственной осью, для определения на эпюре Монжа линии пересечения двух поверхностей проследим на следующем примере.

ПРИМЕР. Определить линию пересечения двух произвольно расположенных эллиптических цилиндрических поверхностей α и β (рис. 222).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление вспомогательных секущих плоскостей. Для этого через произвольную точку пространства T проводим прямые s_1 и s_2, параллельные образующим данных цилиндрических поверхностей α и β. Горизонтальные следы этих прямых H_{s_1} и H_{s_2} определяют след вспомогательной секущей плоскости γ.

2. Проводим секущую плоскость γ_1, параллельную плоскости γ и касательную к поверхности β. Эта плоскость пересечет цилиндрическую поверхность α по прямым $(S_1 \infty 1)$, $(S_1 \infty 2)$ и будет касаться поверхности β по прямой $(S_2 \infty 3)$. Взаимное пересечение этих прямых укажет точки M_1 и M_2, принадлежащие искомой линии пересечения.

3. Проводим плоскость γ_2, параллельную плоскости γ и касательную к поверхности α. Мы вновь получим две прямые $(S_2 \infty 5)$ и $(S_2 \infty 6)$, по которым плоскость γ_2 пересекает поверхность β. Плоскость γ_2 пересечет (коснется) поверхность α по прямой $(S_1 \infty 4)$. Полученные прямые пересекаются в точках N_1 и N_2.

На рис. 222 показано также построение точек K_1, K_2 и L_1, L_2 с помощью вспомогательной секущей плоскости γ_j и точек A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2, D_1, D_2, найденных при помощи плоскостей γ_3 и γ_4.

Способ параллельных секущих плоскостей можно использовать для определения линии пересечения и в том случае, когда эти плоскости пересекают заданные поверхности не только по прямым, но и по окружностям или комбинации из этих линий (одну поверхность плоскость пересекает по прямой, другую — по окружности) *.

Примером может служить пересечение сферической и цилиндрической поверхностей.

ПРИМЕР. Определить линию пересечения поверхности эллиптического цилиндра α с поверхностью сферы β (рис. 223).

РЕШЕНИЕ.

1. Проводим в интервале между точками 1′ и 2′ вспомогательные секущие

*Плоскость можно использовать и в том случае, когда она пересекает поверхности по произвольным кривым линиям.

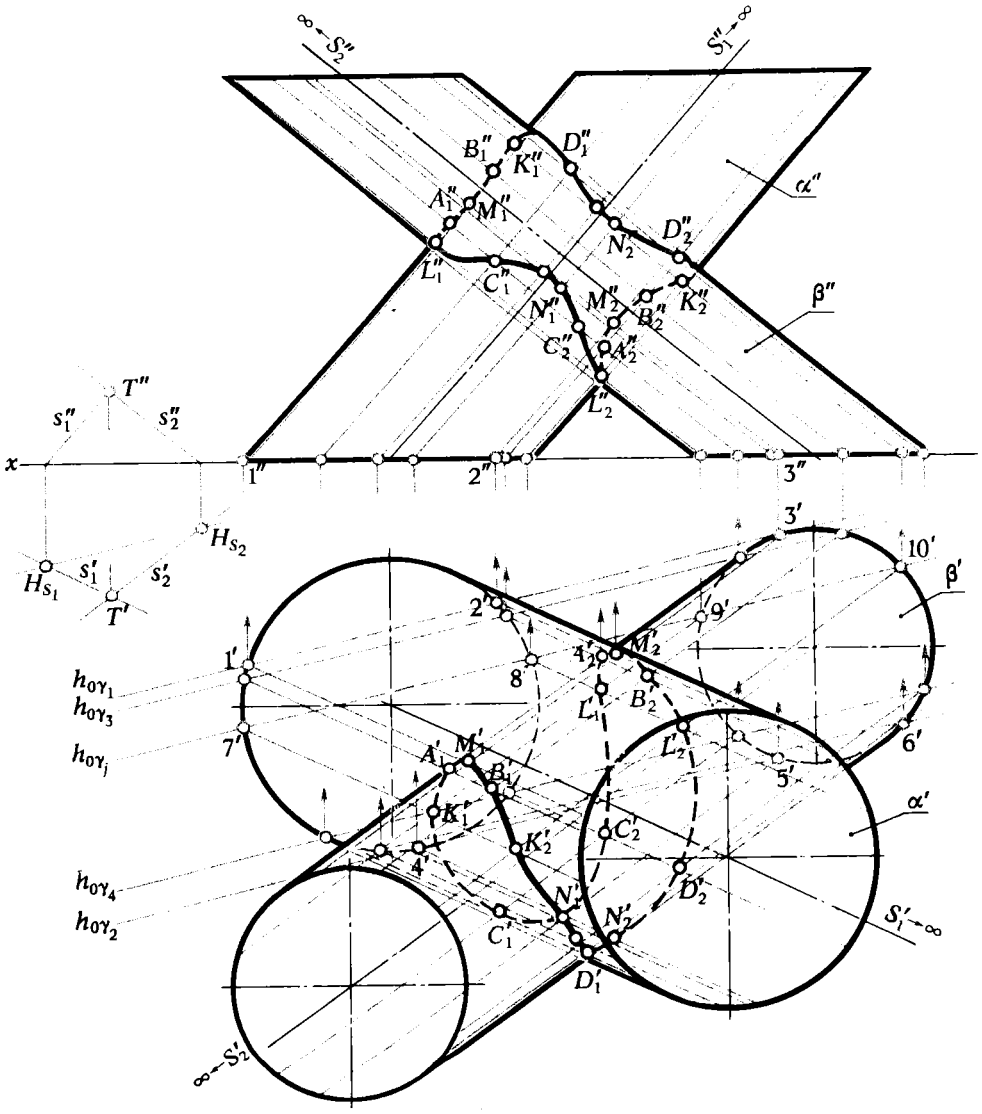


Рис. 222

плоскости γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, параллельные фронтальной плоскости проекции π_2. Каждая из этих плоскостей пересечет цилиндрическую поверхность по прямолинейным образующим, а поверхность сферы по окружностям.

2. Плоскости γ_1 и γ_5, параллельные π_2 и касательные к цилиндрической поверхности, укажут прямые a и b, которые будут содержать опорные точки A, A_1 и B, B_1 — дальние A, A_1 и ближние B, B_1 по отношению к плоскости π_2 точки кривой пересечения.

3. Для определения высшей M_1 и низшей N точек линии пересечения проводим плоскость γ_4, проходящую через центр поверхности сферы. Эта плоскость пересечет сферу по главному меридиану.

4. С помощью плоскости γ_3, проведенной через ось цилиндрической поверхности, определяем точки E, E_1 и F, F_1, указывающие границы видимости линии пересечения на фронтальной проекции.

На рис. 223 показано построение произвольных точек, принадлежащих линии пересечения, с помощью плоскости γ_2, проведенной в полосе, ограниченной плоскостями γ_1 и γ_5.

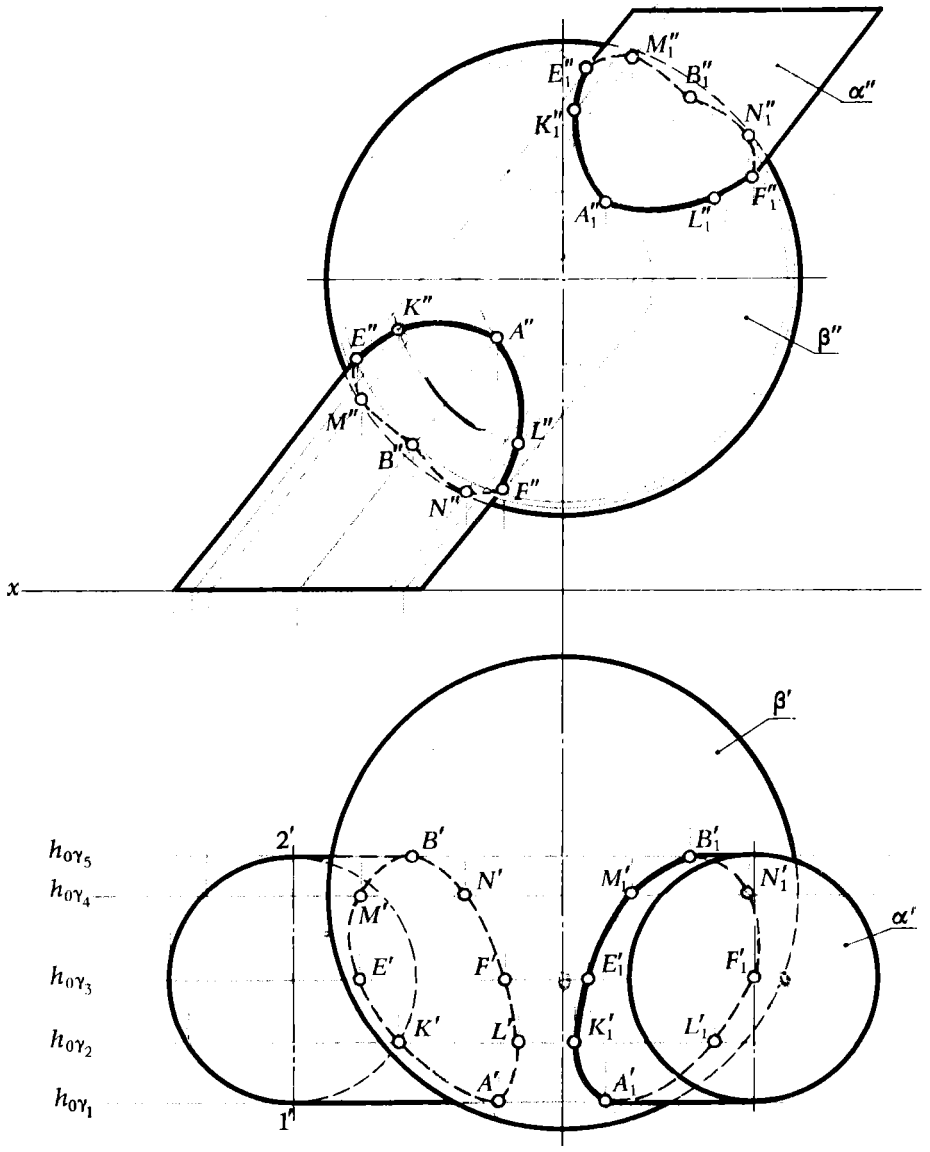


Рис. 223

§ 49. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В тех случаях, когда требуется построить линию пересечения двух поверхностей, из которых одна — линейчатая цилиндрическая, а другая — произвольная поверхность вращения, целесообразно в качестве поверхностей-посредников использовать цилиндрические поверхности.

На рис. 224 показано решение задачи по определению линии пересечения поверхности эллиптического цилиндра α и поверхности коль-

ца β. В данном примере в качестве вспомогательных секущих поверхностей целесообразно использовать поверхности эллиптических цилиндров, оси которых параллельны оси заданной цилиндрической поверхности α. За направляющие цилиндрических поверхностей следует принять окружности — параллели кольцевой поверхности β.

Определение точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей α и β, осуществляется следующим путем:

1. Пересекаем поверхность кольца плоскостями ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ..., параллельными плоскости π_1. Полученные в сечении окружности c_1, c_2, c_3, ... принимаем за направляющие цилиндрических поверхностей γ_1, γ_2, γ_3, ...

2. Определяем горизонтальные следы этих поверхностей $h_{0\gamma_1}$, $h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_3}$, ... и отмечаем точки пересечения этих следов с горизонтальным следом заданной цилиндрической поверхности $h_{0\alpha}$.

3. Через полученные точки проводим прямолинейные образующие g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, по которым поверхности γ_1, γ_2, γ_3, ... пересекают данную поверхность α.

4. Точку i_2' принимаем за центр окружностей — горизонтальных проекций линий пересечения поверхности кольца плоскостями ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ...

5. Отмечаем точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ пересечения этих окружностей с соответствующими прямолинейными образующими цилиндрической

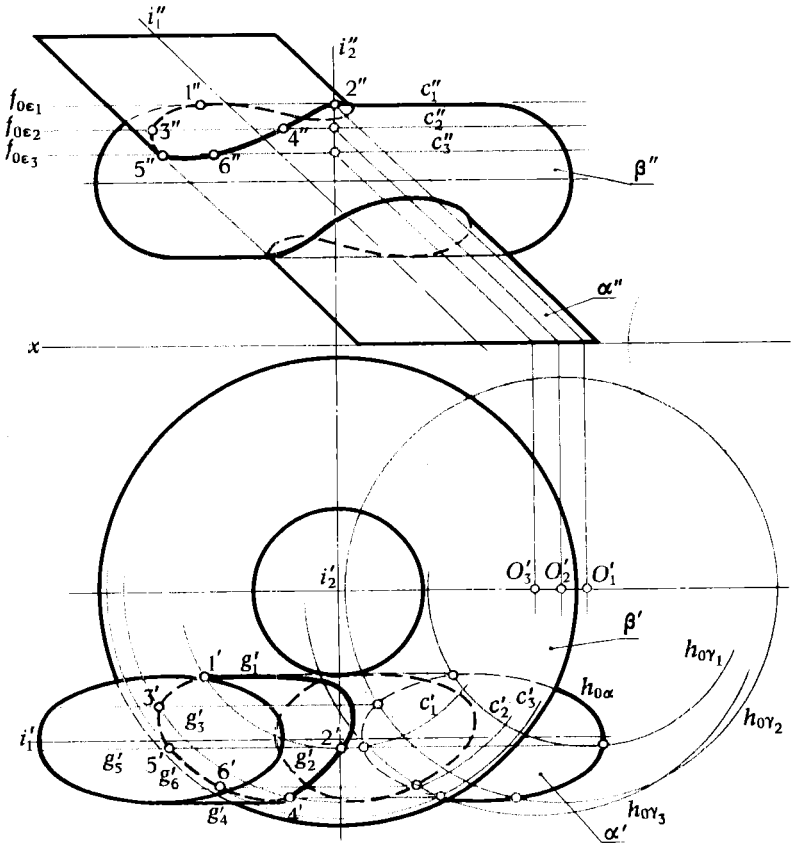


Рис. 224

поверхности α. Зная положение точек $1'$, $2'$ $3'$, ..., определяем их фронтальные проекции $1''$, $2''$, $3''$, ...

Отмеченным путем можно провести любое количество вспомогательных цилиндрических поверхностей и с их помощью определить достаточное число точек, необходимых для построения линии пересечения поверхностей α и β.

§ 50. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Использование вспомогательных конических поверхностей для упрощения построения линии пересечения двух поверхностей дает положительный эффект лишь в том случае, если мы для получения вспомогательной проекции воспользуемся центральным проецированием, приняв за центр проекции вершину конической поверхности S.

В этом случае любая коническая поверхность, принадлежащая связке конических поверхностей, вершины которых принадлежат точке S — центру связки, займет проецирующее положение относительно плоскости проекции, что даст возможность так же, как это было сделано при использовании плоскостей и цилиндрических поверхностей (§ 48 и 49), базироваться на инвариантном свойстве 2г* $\Phi \subset \gamma \wedge (\gamma \perp \perp \pi_1) \Rightarrow \Phi' \subset h_{0\gamma}$ и благодаря этому упростить решение задачи.

Построение линии пересечения поверхностей с помощью конических поверхностей целесообразно в тех случаях, когда одна из пересекающихся поверхностей коническая, а другая поверхность вращения.

Например, если заданы поверхность вращения и произвольная коническая поверхность, то для определения линии их пересечения следует воспользоваться вспомогательными коническими поверхностями, вершины которых совпадают с вершиной заданной конической поверхности, а за направляющие этих поверхностей принять окружности, проведенные на поверхности вращения.

На рис. 225 показано решение задачи на построение линии пересечения поверхности вращения с конической поверхностью.

Геометрические построения, которые необходимо осуществить для определения линии пересечения, выполняем в следующем порядке:

1) на поверхности вращения α проводим ряд окружностей c_1, c_2, c_3, ..., которые можно рассматривать как результат пересечения поверхности α пучком плоскостей $\{\epsilon \ldots\}$, параллельных плоскости π_1;

2) принимаем эти окружности за направляющие конических поверхностей γ_1, γ_2, γ_3, ... с вершиной в точке S. Горизонтальными следами этих поверхностей будут окружности $h_{0\gamma_1}$, $h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_3}$, ..., проведенные из центров $2'$, $7'$, $12'$ ..., радиусами, соответственно равными фронтальным проекциям отрезков $|2'', 3''|$, $|7'', 8''|$, $|12'', 13''|$;

3) определяем прямые $(S'4')$, $(S'5')$, $(S'9')$, $(S'10')$, $(S'14')$, $(S'15')$, по которым вспомогательные секущие поверхности γ_1, γ_2, γ_3 пересекают заданную коническую поверхность β;

---

*Инвариантное свойство 2г, сформулированное относительно плоскости при ортогональном проецировании, будет справедливым и для конической поверхности, если использовать центральное проецирование.

4) отмечаем точки пересечения этих прямых с соответствующими окружностями. Точки A, B, C, D, E, F принадлежат искомой линии пересечения.

На рис. 225 показано также определение высшей L и низшей K точек, принадлежащих линии пересечения. Положение этих точек найдено с помощью горизонтально проецирующей плоскости ζ, проходящей через вершину конической поверхности S и ось i поверхности вращения α. Плоскость ζ пересечет коническую поверхность по образующей ST, а поверхность вращения по меридиану g. Для определения точек пересечения меридиана g с образующей ST вращаем плоскость ζ, которой принадлежат эти точки, вокруг оси, перпендикулярной к π_1 и проходящей через вершину конуса S, до положения, параллельного плоскости π_2. Находим фронтальные проекции точек K_1'' и L_1'', а затем K'' и L''. Зная положение K'' и L'', определяем их горизонтальные проекции K' и L'. Соединив одноименные проекции полученных точек плавной кривой, получим проекции линии пересечения заданных поверхностей.

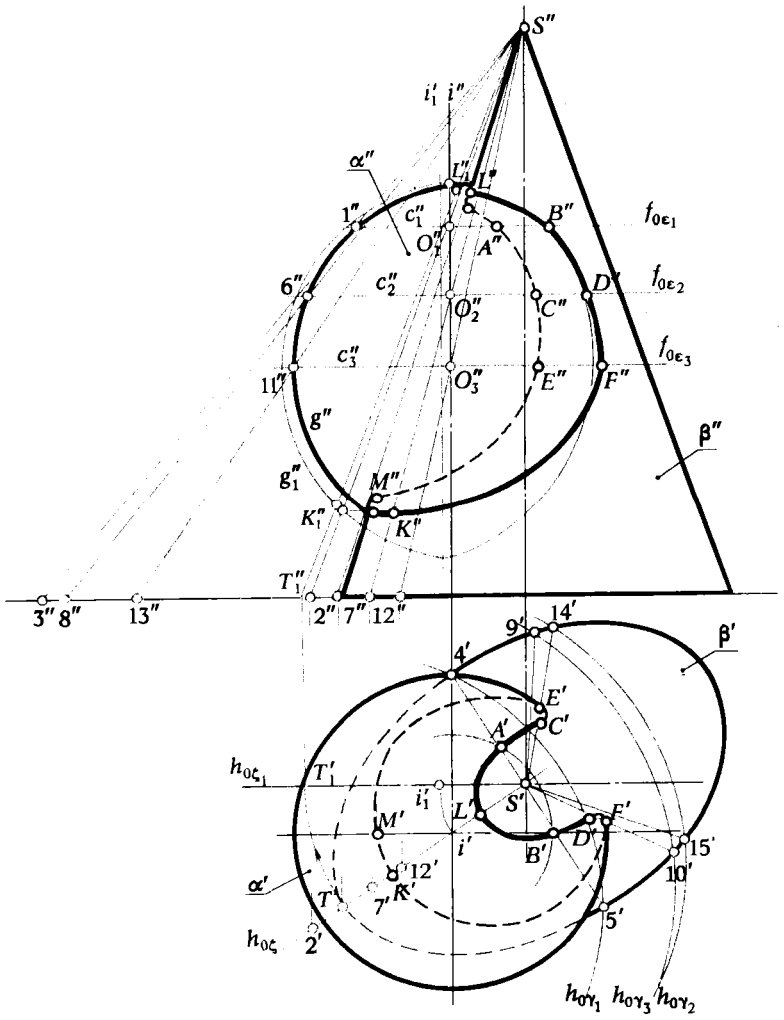


Рис. 225

§ 51. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СЕМЕЙСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для определения линии пересечения двух произвольных поверхностей вращения целесообразно воспользоваться одним свойством, присущим поверхностям вращения, которое состоит в том, что *две любые соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, проходящим через точки пересечения меридианов поверхностей* (рис. 226).

В частном случае, если одна из поверхностей вращения — сфера, приведенное выше предложение может быть сформулировано иначе: *если центр секущей сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечет данную поверхность по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных меридианов поверхностей* (рис. 227).

Если ось поверхности вращения перпендикулярна плоскости проекции π_1 (или π_2), то окружности проецируются на плоскость π_1 (или π_2) без искажения, а на плоскость π_2 (или π_1) в отрезки прямых, перпендикулярных фронтальной (горизонтальной) проекции оси вращения (см. рис. 226).

Поверхность сферы может пересекаться по окружности не только с соосной поверхностью вращения, но и с любой другой поверхностью, имеющей семейство окружностей, например, с циклической поверхностью, конической поверхностью второго порядка, имеющей в основании окружность, и др.

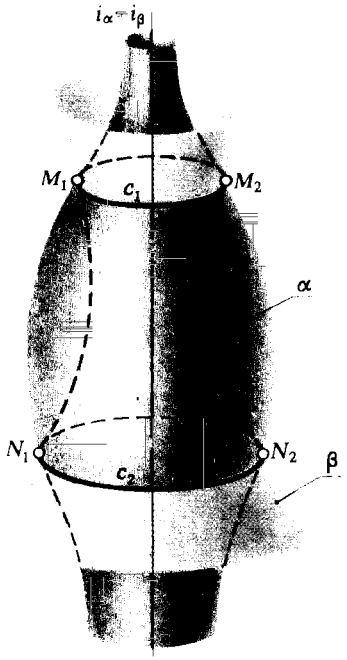


Рис. 226

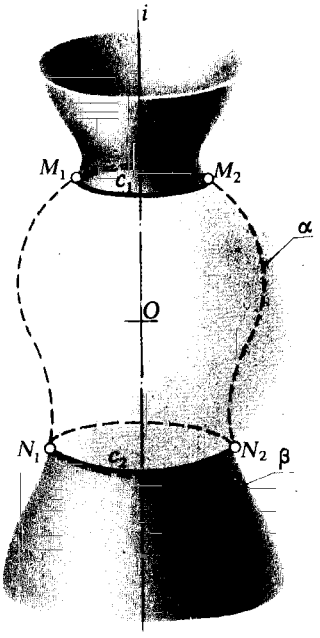


Рис. 227

Построить линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих сфер можно двумя способами:

1) способом концентрических сфер;

2) способом эксцентрических сфер.

Особенности каждого из этих способов и условия его применения проследим на конкретных примерах.

1. Способ концентрических сфер.

Этот способ применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются. Для упрощения графического решения необходимо, чтобы плоскость, определяемая осями поверхностей вращения, была параллельной какой-либо плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. Построить линию пересечения двух конических поверхностей вращения с пересекающимися осями (рис. 228).

РЕШЕНИЕ.

Сфера, проведеннан из точки O'' пересечения фронтальных проекций осей поверхностей вращения, пересечет поверхность α по окружности, которая проецируется на плоскость π_2 в отрезок [1″2″], а поверхность β — по окружности, проецирующейся на π_2 в отрезок [3″4″]. На горизонтальную плоскость проекции эта окружность спроецируется без искажения в окружность радиуса $|O_1''$, 3″|, проведенную из центра в точке O'.

Пересечение отрезков [1″2″] и [3″4″] укажет фронтальные проекции двух точек L_1'' и $L_2''(L_1'' \equiv L_2'')$, принадлежащих линии пересечения поверхностей α и β. Величина радиуса вспомогательных сфер для определения линии l_1 изменяется в пределах от $R_{min} = |O''M''|$ до $R_{max} = |O''B''|$ (точка M'' определяется как точка касания окружности, проведенной к главному меридиану поверхности β из центра O''). Для определения точек линии l_2 $R_{max} = |O''C''|$, $R_{min} = |O''M''|$. На рис. 228 показано определение точек N_1'' и N_2'', принадлежащих линии l_2. Горизонтальная проекция линии пересечения может быть найдена из условия ее принадлежности поверхности β. Для ее построения необходимо через фронтальные проекции точек кривых l_1'' и l_2'' провести горизонтальные прямые — фронтальные проекции параллелей поверхности β, а из точки O' — окружности — горизонтальные проекции параллелей, на которых с помощью линий связи можно определить горизонтальные проекции точек, принадлежащих кривым l_1' и l_2'. Особые точки A, B, C, D определяются пересечением главных меридианов поверхностей α и β. Они же являются высшими (точки A и C) и низшими (точки B и D) точками линии пересечения поверхностей. Границы видимости линии на горизонтальной плоскости проекции определяются точками, принадлежащими горизонтальному очерку поверхности α (точки E_1' и E_2' для линии l_2 и F_1' и F_2' для линии l_1).

ПРИМЕР 2. Построить линию пересечения поверхности вращения α произвольного вида с поверхностью прямого кругового цилиндра β. Оси поверхностей пересекаются (рис. 229).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем центр вспомогательных сфер — точку пересечения осей поверхностей вращения $O = i_1 \cap i_2$.

2. Находим проекции опорных точек, принадлежащие линии пересечения l (A'', B'', C'', D''). Так как эти точки принадлежат плоскости главных меридианов поверхностей, которая параллельна плоскости π_2, то эти точки определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей.

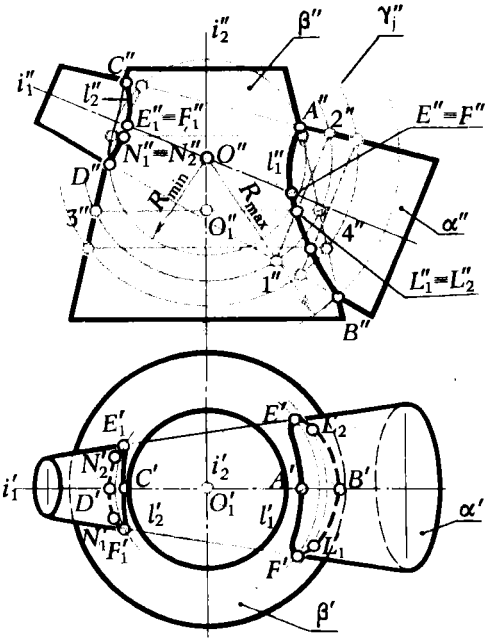


Рис. 228

3. Для определения произвольных (промежуточных) точек линии пересечения из точки O'' проводим семейство концентрических окружностей, являющихся фронтальными проекциями вспомогательных сфер.

Радиус максимальной сферы равен расстоянию от фронтальной проекции центра сферы O'' до наиболее удаленной проекции точки, принадлежащей линии пересечения — точки D''. Величина минимального радиуса вспомогательной секущей сферы равна радиусу окружности, касающейся цилиндра β''. На рис. 229 показано построение точек K, K_1 и L, L_1 с помощью вспомогательной сферы γ_j.

Горизонтальные проекции точек линии пересечения строятся при помощи параллелей поверхности вращения α, которые проецируются на плоскость π_1 без искажения.

ПРИМЕР 3. Построить линию пересечения поверхности тора α и сферы β, оси которых определяют плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекции (рис. 230).

РЕШЕНИЕ.

Так как осью сферической поверхности может быть любая прямая, проходящая через центр этой поверхности, то за центр вспомогательных сферических поверхностей можно принять произвольную точку на оси поверхности вращения α. Поэтому графическое решение задачи по определению линии пересечения заданных поверхностей сводится к выполнению следующих геометрических построений:

1. Принимаем точку O'' за центр окружностей — фронтальных проекций вспомогательных секущих сфер.

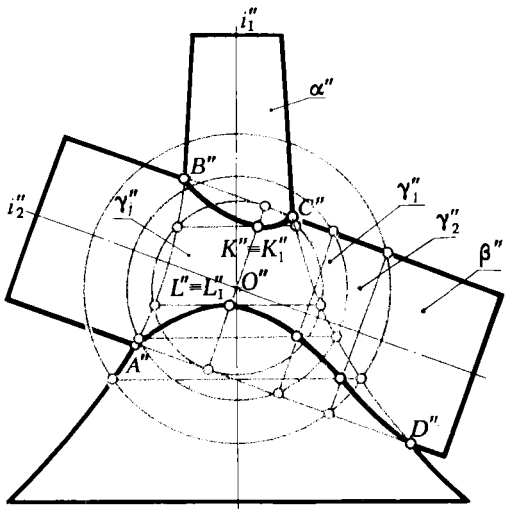


Рис. 229

2. Проводим фронтальную проекцию вспомогательной сферической поверхности γ_j.

3. Определяем отрезки [1″2″] и [3″4″] — фронтальные проекции окружностей, по которым $\gamma_j \cap \alpha$ и $\gamma_j \cap \beta$.

4. Точки пересечения окружностей (отрезков [1″2″] и [3″4″]) M_1'' и M_2'' принадлежат искомой линии пересечения.

5. Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций меридианов поверхностей α и β.

6. Горизонтальные проекции линии пересечения определяются с помощью параллелей поверхности β.

2. Способ эксцентрических сфер.

Способ эксцентрических сфер может быть использован для построения линии пересечения двух поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии. При этом каждая поверхность должна иметь семейство окружностей. Как и в способе концентрических сфер, плоскость симметрии должна быть параллельна одной из плоскостей проекции. Сущность способа легко уяснить из следующих примеров.

ПРИМЕР 1. Построить линию пересечения поверхности кольца (открытого тора) α с поверхностью вращения β, имеющих общую плоскость симметрии (рис. 231).

РЕШЕНИЕ.

Хотя мы и имеем дело с поверхностями вращения, но применить здесь способ концентрических сфер не представляется возможным, так как оси поверхностей не пересекаются.

Возможность использования способа эксцентрических сфер обусловливается тем, что обе поверхности несут на себе семейства окружностей, по которым они могут пересекаться эксцентрическими сферами, причем на кольцевой поверхности имеется несколько семейств окружностей, в том числе и окружностей, принадлежащих пучку плоскостей, ось которого совпадает с осью кольца.

Решение задачи сводится к следующим графическим построениям:

1. Рассечем кольцевую поверхность фронтально проецирующей плоскостью ϵ, проходящей через ось кольца; эта плос-

кость пересечет кольцевую поверхность по окружности, фронтальная проекция которой — отрезок [1″2″]. Эта же окружность может быть получена, если кольцевую поверхность пересекать семейством эксцентрических сфер, центры которых расположены на перпендикуляре, проведенном через центр окружности к плоскости ϵ.

Для того чтобы вспомогательная сфера пересекала по окружности и поверхность вращения β, необходимо, чтобы ее центр принадлежал оси этой поверхности. Поэтому за центр вспомогательной сферы следует брать точку O_1 пересечения упомянутого перпендикуляра с осью поверхности β. В этом случае сфера, радиус которой равен расстоянию от точки O_1 до точки 1, пересекает обе поверхности по окружностям. Окружность c, по которой сфера пересекает поверхность β, является параллелью поверхности β; эта параллель проецируется на плоскость π_2 в отрезок [3″4″]. Окружности 1″, 2″ и 3″, 4″ пересекаются в точках L_1'' и L_2'' ($L_1'' \equiv L_2''$). Аналогично строятся и другие произвольные точки, принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей α и β.

Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей α и β. Горизонтальные проекции (на рис. 231 не показаны) могут быть построены с помощью параллелей поверхности β так же, как это было сделано в примере 2.

Способ эксцентрических сфер можно применять и в тех случаях, когда одна из пересекающихся поверхностей не является поверхностью вращения. Необходимым условием является наличие на этой поверхности семейства окружностей, которые можно рассматривать как результат пересечения поверхности со сферой. В число условий входит также условие, чтобы перпендикуляры, восставленные из центров круговых сечений, пересекали ось поверхности вращения.

Задача, помещенная в следующем примере, иллюстрирует возможность использования эксцентрических сфер для построения линии пересечения двух поверхностей, когда одна из них не является поверхностью вращения.

ПРИМЕР 2. Построить линию пересечения поверхности вращения α с конической поверхностью второго порядка β, имеющей в основании окружность (рис. 232).

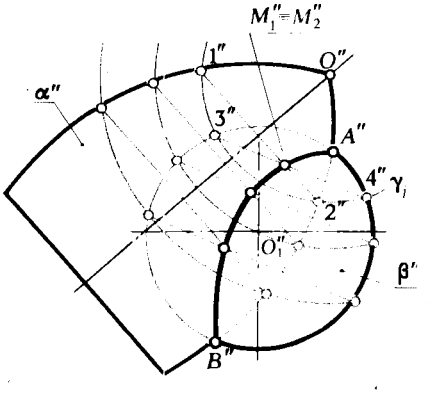


Рис. 230

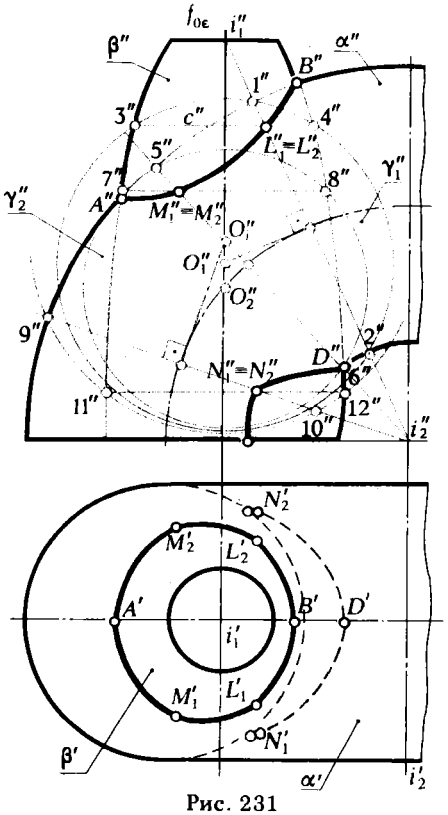


Рис. 231

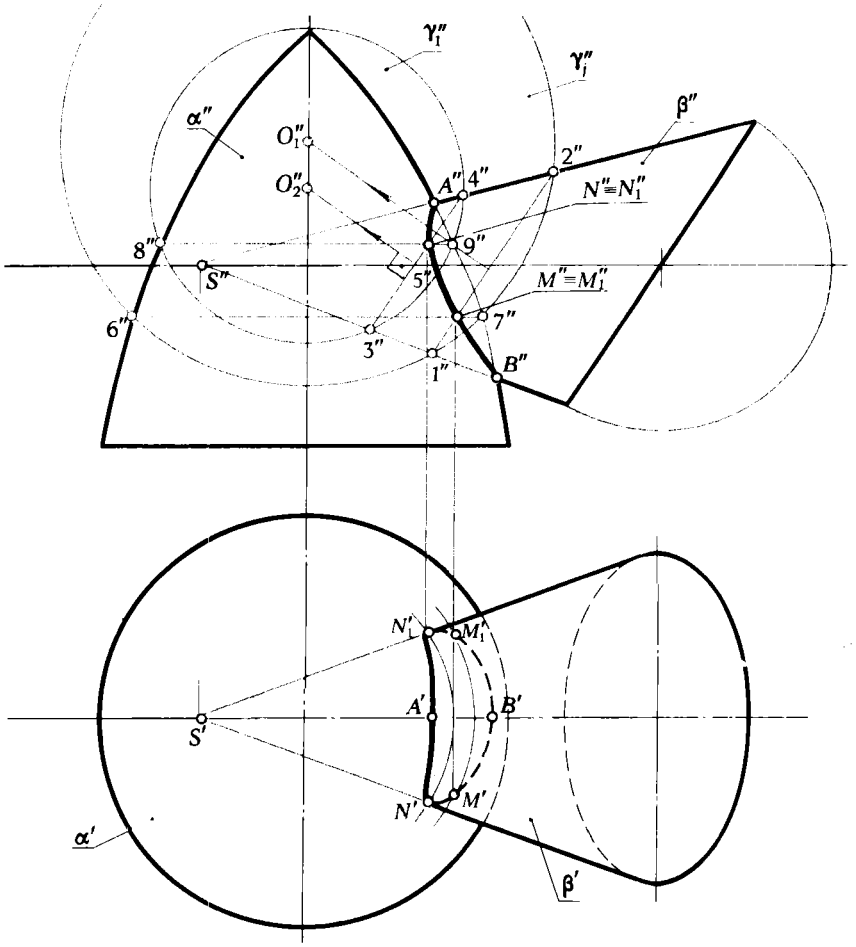


Рис. 232

РЕШЕНИЕ.

1. Выделим на конической поверхности β круговое сечение. Для этого пересечем поверхность β фронтально проецирующей плоскостью, параллельной основанию конуса. Эта плоскость пересечет коническую поверхность по окружности, которая проецируется на фронтальную плоскость проекции в виде отрезка $[1''2'']$.

2. Перпендикуляр, восставленный из центра этой окружности к ее плоскости, пересечет ось поверхности вращения в точке O_1, которую принимаем за центр вспомогательной секущей сферы γ_j. Центр другой эксцентрической сферы γ_j можно определить аналогично рассмотренному случаю. Построения начинаем с проведения прямой $(3''4'')$, параллельной прямой $(1''2'')$; из точки $5''$ (середины отрезка $[3''4'']$) восставляем перпендикуляр к отрезку $[3''4'']$ и определяем точку O_2 пересечения его с осью поверхности вращения α.

3. Сферы, проведенные из центров O_1 и O_2 радиусами, соответственно равными $|O_1''1''|$ и $|O_2''3''|$, пересекают по окружностям не только поверхность β, но и поверхность вращения α. Отрезки $[6'', 7'']$ и $[8'', 9'']$ являются фронтальными проекциями этих окружностей. Пересечения отрезков $[1'', 2'']$ и $[6'', 7'']$, $[3'', 4'']$ и $[8'', 9'']$ укажут точки M'', M_1'' и N'', N_1'', принадлежащие линии пересечения поверхностей α и β.

Фронтальные проекции опорных точек A'' и B'' определяются пересечением фронтальных проекций главных меридианов поверхностей α и β. Горизонтальные проекции точек, принадлежащих линии пересечения, определяются известным способом (см. пример 1, рис. 228).

§ 52. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

Рассмотрим некоторые частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.

Известно, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей, поэтому две поверхности второго порядка всегда пересекаются по кривой четвертого порядка. При определенных условиях эта кривая распадается на несколько линий более низкого порядка. При этом сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В частности, кривая четвертого порядка может распадаться на четыре прямые или две кривые второго порядка. Следует иметь в виду, что некоторые линии, на которые распадается кривая, могут быть мнимыми.

Случаи, когда кривая четвертого порядка распадается на четыре прямые (четыре линии первого порядка), можно проследить на примерах пересечения поверхностей двух цилиндров второго порядка с параллельными осями (рис. 233,*а*), а также двух конических поверхностей второго порядка, имеющих общую вершину (рис. 233,*б*).

Условия, при которых кривая четвертого порядка распадается на две кривые второго порядка, могут быть сформулированы следующими теоремами:

Теорема 1. *Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой.*

В качестве иллюстрации этой теоремы на рис. 234 показаны фронтальные проекции l_1'' и l_2'' кривых второго порядка (в частности, окружностей), полученных при пересечении поверхностей сферы α и эллиптического цилиндра β.

Теорема 2. *Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.*

На рис. 235 показано пересечение двух поверхностей второго порядка: конической α и цилиндрической β. Поверхности α и β имеют две общие касательные плоскости ϵ и δ и соответственно две общие

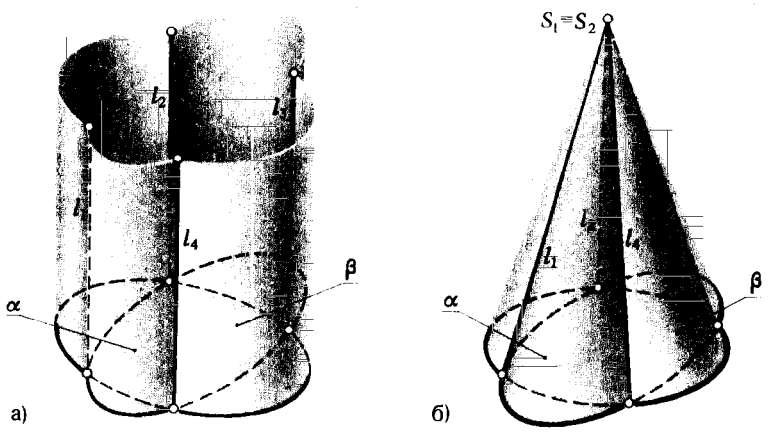


Рис. 233

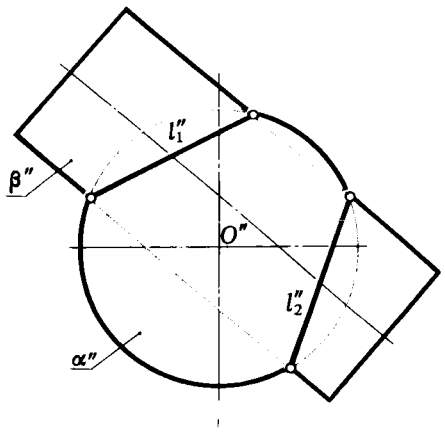


Рис. 234

точки касания A и B. Поэтому по теореме 2 они пересекаются по двум кривым второго порядка, расположенным в плоскостях ζ и η.

Плоскости ζ и η проходят через прямую (AB). Так как (AB) перпендикулярна плоскости проекции π_2, то плоскости ζ и η фронтально проецирующие, следовательно, принадлежащие им кривые проецируются на плоскость π_2 в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$, при этом $[C''D''] \subset f_{0\zeta}$, а $[E''F''] \subset f_{0\eta}$.

Теорема 2 может быть использована и для решения задачи на определение положения плоскостей, пересекающих поверхности второго порядка по окружностям.

ПРИМЕР. Определить положение плоскостей ζ и η, которые пересекают поверхность эллиптического цилиндра α по окружностям (рис. 236).

РЕШЕНИЕ. Проведем сферу β, имеющую две общие касательные плоскости с цилиндрической поверхностью (сфера β и цилиндр α имеют двойное соприкаса-

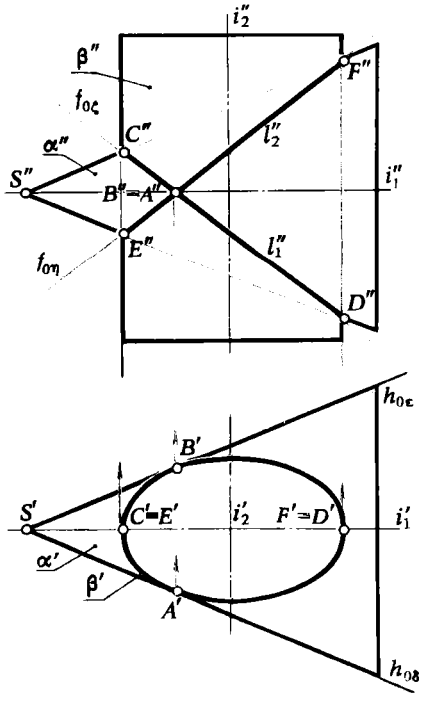


Рис. 235

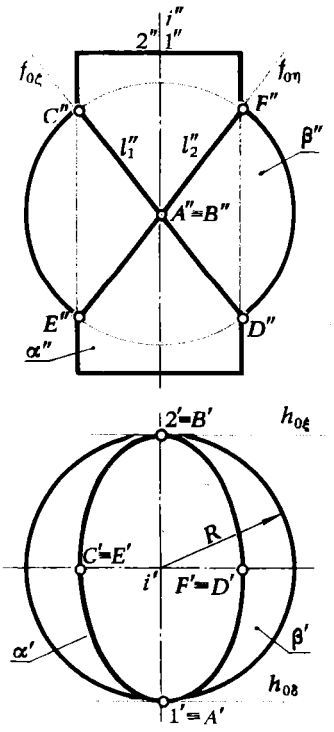


Рис. 236

ние). Для этого центр сферы должен находиться на оси i цилиндрической поверхности α, а ее радиус $R = |i'A'_1|$. Поверхности цилиндра и сферы соприкасаются в точках A и B. На основании теоремы 2 поверхности сферы и цилиндра пересекаются по двум кривым второго порядка, принадлежащим фронтально проецирующим плоскостям ζ и η. Эти кривые, проецирующиеся на плоскость π_2 в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$, являются окружностями, так как сопряженные диаметры замкнутой кривой второго порядка равны между собой $|AB| = |CD|$ и $|AB| = |EF|$.

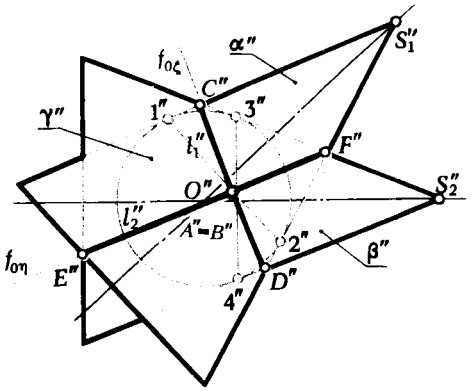


Рис. 237

Т е о р е м а 3. *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касанця**.

Эта теорема по существу является частным случаем теоремы 2. Практическое использование теоремы возможно в том случае, когда две поверхности вращения второго порядка могут быть описаны около сферы или вписаны в нее.

Рис. 237 дает представление о том, как можно определить линии пересечения двух конических поверхностей α и β, описанных около сферы γ. Поверхность α соприкасается со сферой γ по окружности, фронтальная проекция которой $[1''2'']$, а с поверхностью β — по окружности, проецирующейся в $[3''4'']$. Точки пересечения этих окружностей A и B являются точками соприкасания поверхностей α и β.

По теореме 3 плоскости кривых l_1 и l_2 должны проходить через прямую (AB). Так как $(AB) \perp \pi_2$, то плоскости $\zeta \supset l_1$ и $\eta \supset l_2$ фронтально проецирующие, а проекции кривых l_1 и l_2 проецируются в отрезки $[C''D'']$ и $[E''F'']$.

Показанные на рис. 237 конические поверхности α и β пересекаются по двум кривым, одна из которых l_1 — эллипс, другая l_2 — парабола (см. § 45, рис. 199, 200).

§ 53. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

В общем случае для графического решения задачи по определению положения точек пересечения (встречи) линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений в приведенной ниже последовательности: заключить данную линию во вспомогательную поверхность; определить линию пересечения этой вспомогательной поверхности с заданной поверхностью; отметить точки, в которых пересекаются полученная линия с заданной (рис. 238).

---

* Эта теорема известна также как "теорема Монжа", по имени основоположника начертательной геометрии Гаспара Монжа, доказавшего эту теорему.

Запишем указанную последовательность решения в виде табл. 9 (как это сделано в § 43 при составлении алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения двух поверхностей). В правой части таблицы приведена символическая запись, соответствующая смысловому содержанию отмеченных этапов решения.

Таблица 9

Словесное описание на традиционном языке начертательной геометрии	Символическая запись на геометрическом языке
1. Заключаем данную линию во вспомогательную поверхность	Заключаем $a \subset \gamma$
2. Определяем линию пересечения вспомогательной поверхности с заданной поверхностью	Определяем $l = \gamma \cap \alpha$
3. Отмечаем точки пересечения полученной линии пересечения с заданной	Отмечаем $\{K, \ldots\} = l \cap a$

Алгоритм для решения задачи определения точек пересечения линии с поверхностью в символической форме можно записать:

$$\{K, \ldots\} = (\gamma \cap \alpha) \cap a.$$

Здесь, как и у алгоритма определения линии пересечения двух поверхностей, в зависимости от порядка и взаимного расположения заданных кривой и поверхности множество искомых точек $\{K, \ldots\}$ может состоять из одной, двух и более точек.

Полученный алгоритм является универсальным, пригодным для решения задачи с любым вариантом задания исходных данных. Рассмотрим различные варианты решения задачи:

1. Пересечение кривой с поверхностью.
2. Пересечение кривой с плоскостью.
3. Пересечение прямой с поверхностью.
4. Пересечение прямой с плоскостью.

При решении всех этих задач, как правило, целесообразно для уменьшения графических построений и их упрощения пользоваться в качестве вспомогательной секущей поверхности γ — проецирующей цилиндричес-

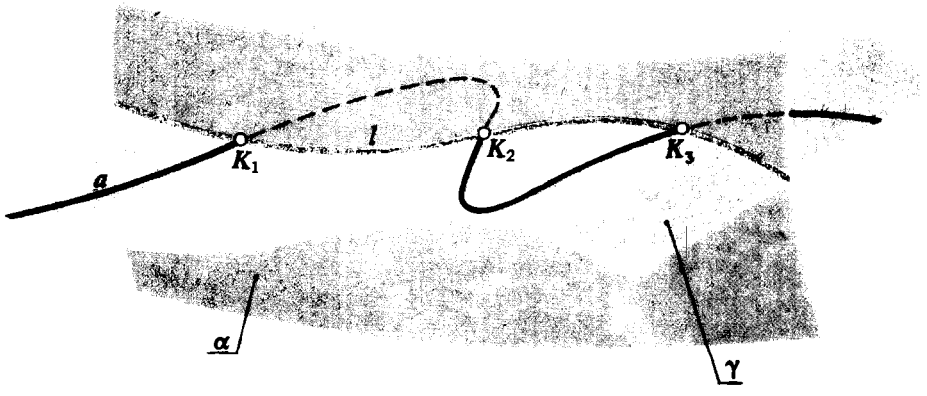


Рис. 238

кой поверхностью, в частности, если определяется точка пересечения прямой с поверхностью, — плоскостью. Упрощение решения достигается благодаря тому, что одна из проекций линии пересечения l автоматически определяется положением и формой следа проецирующей поверхности γ. Поэтому задача по определению точек встречи линии с поверхностью сводится к построению второй проекции линии, принадлежащей поверхности, если известна одна ее проекция, т. е. к задаче, которую мы неоднократно решали.

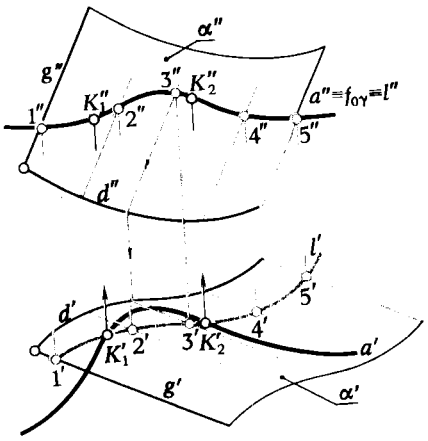


Рис. 239

1. Пересечение кривой с поверхностью.

При определении содержания и последовательности выполнения геометрических операций, входящих в состав алгоритма для решения задачи по определению точек пересечения кривой с поверхностью, мы пользовались наглядным чертежом, изображенным на рис. 238. Теперь проследим, как решается эта задача на эпюре Монжа.

ПРИМЕР. Определить точки пересечения кривой a с произвольной цилиндрической поверхностью α (рис. 239).

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем кривую a во фронтально проецирующую цилиндрическую поверхность γ.

2. Определяем линию пересечения поверхностей γ и α. Для этого отмечаем на $a'' \equiv f_{0\gamma} \equiv l''$ произвольные точки 1'', 2'', 3'', 4'', 5''; зная фронтальные проекции точек, находим их горизонтальные проекции 1', 2', 3', 4', 5'. Соединив эти точки плавной кривой, получим горизонтальную проекцию l' кривой l, по которой вспомогательная цилиндрическая поверхность γ пересекает данную поверхность α.

3. Отмечаем точки K'_1 и K'_2 пересечения кривых l' и a'. По горизонтальным проекциям определяем их фронтальные проекции K''_1 и K''_2.

2. Пересечение кривой с плоскостью.

Решение этой задачи аналогично только что рассмотренной, если и есть какое-либо отличие, то оно состоит лишь в том, что приходится определять вторую проекцию линии, принадлежащую не цилиндрической поверхности, как это было в приведенном выше примере, а плоскости.

ПРИМЕР. Определить точку встречи линии a с плоскостью α (рис. 240).

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем линию a в проецирующую цилиндрическую поверхность γ, безразлично какую $\gamma \perp \pi_1$ или $\gamma \perp \pi_2$ (на рис. 240 $\gamma \perp \pi_1$).

2. Обозначим линию пересечения $\gamma \cap \alpha = l$, тогда $l'' \subset f_{0\gamma}$.

3. Определяем горизонтальную проекцию l'. Для этого отмечаем на l'' ряд точек 1'', 2'', 3'', ..., с помощью горизонталей (h_1, h_2, h_3, ...) плоскости α находим точки 1', 2', 3', ..., принадлежащие l'.

4. Отмечаем точку $K' = l' \cap a'$, по K' находим K''.

3. Пересечение прямой с поверхностью.

В алгоритме решения задачи для определения точек встречи прямой с поверхностью в качестве вспомогательной секущей поверхности следует брать плоскость.

Сложность решения рассматриваемой группы задач зависит от трудоемкости нахождения линии пересечения $\gamma \cap \alpha$, которая определяется видом поверхности α и расположением прямой a как относительно поверхности α, так и по отношению к плоскостям проекций.

Чтобы получить рациональное решение, следует пользоваться наиболее простым способом определения линии l ($l = \gamma \cap \alpha$). Этого можно достигнуть двумя путями: 1) соответствующим выбором положения вспомогательной секущей плоскости γ или 2) переводом секущей прямой a в частное положение. Рассмотрим каждый из этих вариантов решения.

Вариант 1.

а) Вспомогательная секущая плоскость — проецирующая.

ПРИМЕР. Определить точку пересечения прямой a с поверхностью торса (рис. 241).

РЕШЕНИЕ. Заключаем прямую a во фронтально проецирующую плоскость γ. Фронтальная проекция линии пересечения l'' совпадает с $f_{0\gamma} \equiv a''$. Отмечаем точку 1'', в которой проекция l'' пересекает проекцию d'' ребра возврата d. Зная положение 1'', определяем горизонтальную проекцию 1'. Проводим ряд прямолинейных образующих торсовой поверхности (касательных к кривой d) и фиксируем точки 2'', 3'', в которых l'' пересекает фронтальные проекции этих образующих.

На горизонтальных проекциях соответствующих образующих определяем горизонтальные проекции 2', 3'. Соединив эти точки плавной кривой, получим горизонтальную проекцию l'. $l' \cap a' = K'$ — горизонтальная проекция искомой точки встречи. По K' определяем K''.

б) Вспомогательная секущая плоскость — общего положения. Использование вспомогательной проецирующей плоскости не всегда упрощает решение, возможны случаи, когда целесообразно применять плоскость общего положения.

В качестве иллюстрации, подтверждающей эту мысль, может служить задача по определению точек пересечения прямой общего положения с конической поверхностью.

Плоскость пересекает коническую поверхность по кривой. Исключение составляет только плоскость, проходящая через вершину кони-

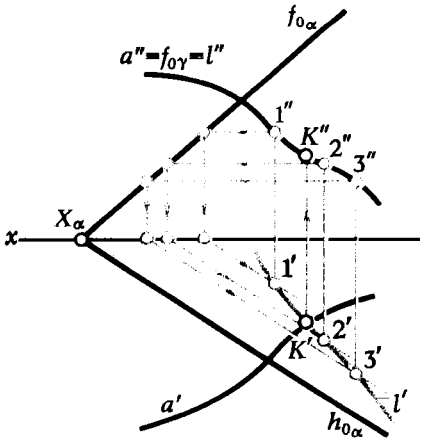


Рис. 240

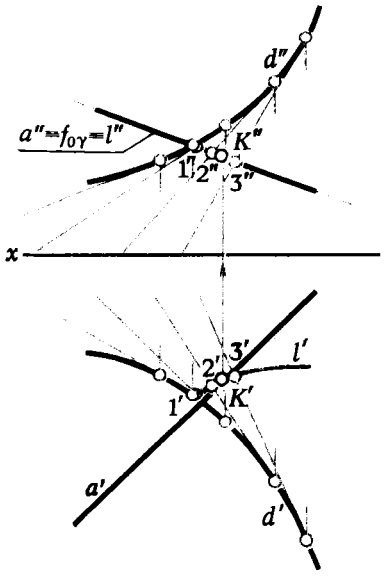


Рис. 241

ческой поверхности. В этом случае кривая второго порядка распадается на две прямые — образующие конической поверхности (см. § 45) *.

ПРИМЕР. Определить точки пересечения прямой a с поверхностью прямого кругового конуса α (рис. 242).

РЕШЕНИЕ. Заключаем прямую a в плоскость γ, проходящую через вершину конической поверхности S. На рис. 242 плоскость γ задана пересекающимися прямыми a и h, при этом h — горизонталь.

Определяем горизонтальный след плоскости γ; для этого находим горизонтальный след прямой H_a и через него проводим $h_{0\gamma}$ параллельно горизонтальной проекции горизонтали h'. Отмечаем точки 2′ и 3′, в которых $h_{0\gamma} \cap h_{0\alpha}$. $(S'2')$ и $(S'3')$ — образующие поверхности α, по которым она пересекается плоскостью γ.

Точки K_1' и K_2' ($K_1' = a' \cap (S'2')$ и $K_2' = a' \cap (S'3')$) — горизонтальные проекции искомых точек пересечения. Зная положение K_1' и K_2', определяем K_1'' и K_2''.

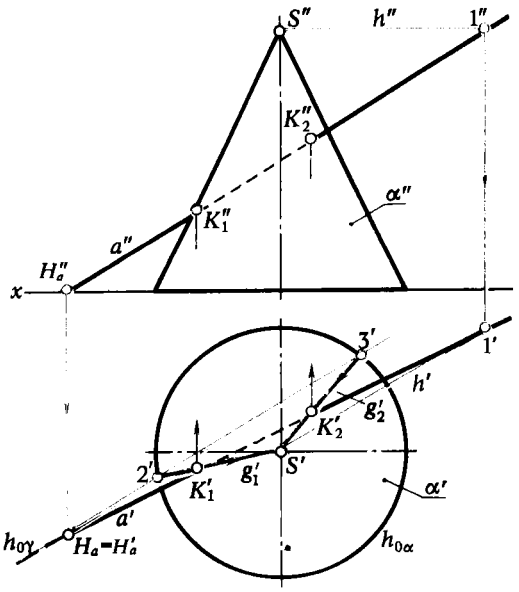


Рис. 242

Вариант 2. Перевод секущей прямой в частное положение.

При пересечении поверхности сферы плоскостью в сечении получается окружность, которая проецируется на плоскости проекции в общем случае в виде эллипсов или прямой и эллипса (если секущая плоскость проецирующая). В частном случае, когда секущая плоскость параллельна плоскости проекции, окружность проецируется на эту плоскость проекции без искажения. Поэтому, чтобы упростить решение задачи, следует произвольно расположенную прямую перевести в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции. Тогда представляется возможность заключить прямую в плоскость, параллельную плоскости проекции.

ПРИМЕР 1. Определить точки встречи прямой a, заданной отрезком $[AB]$ с поверхностью сферы α (рис. 243).

РЕШЕНИЕ. Переводим прямую, произвольно расположенную в пространстве, в положение, параллельное плоскости проекции. Для этого переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к системе $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$, в которой $\pi_3 \parallel a$.

В этом случае горизонтально проецирующая плоскость $\gamma \supset a$ пересечет поверхность сферы по окружности c радиуса R (см. рис. 243), которая спроецируется на плоскость π_1 в $[1'2']$, а на плоскость π_3 в окружность c_1'' того же радиуса R. Точки K_{1_1}'' и K_{2_1}'' пересечения c_1'' с $[A_1''B_1'']$ — вспомогательные проекции искомых точек, по ним определяем вначале K_1' и K_2', а затем и K_1'' и K_2''.

Если прямая a, пересекающая поверхность вращения, проходит через ось i этой поверхности, то перевод прямой a в частное положение целесообразно осуществить путем вращения прямой вокруг оси i.

ПРИМЕР 2. Определить точки встречи прямой a с поверхностью вращения α (рис. 244).

*Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности и составляет с ее осью угол больший, чем угол наклона к этой оси образующей конической поверхности, то сечение распадается на две мнимые прямые.

РЕШЕНИЕ. Горизонтально проецирующая плоскость γ, в которую заключаем прямую a, пересечет поверхность вращения по меридиану g_1.

Чтобы не строить искаженной фронтальной проекции меридионального сечения, поворачиваем плоскость γ и находящуюся в ней прямую a вокруг оси i до положения, параллельного π_2, тогда g'_1 совпадает с g' — горизонтальной проекцией главного меридиана, а $h_{0\gamma}$ с $h_{0\gamma_1}$. После поворота прямая a займет положение a_1 (a'_1, a''_1). С помощью точек K''_{1_1} и K''_{2_1}, в которых $a''_1 \cap g''_1$, определяем положение K''_1 и K''_2, а затем K'_1 и K'_2.

4. Пересечение прямой с плоскостью.

Определение точки встречи прямой с плоскостью относится к элементарной задаче, но ее значение для решения самых различных, более сложных задач, трудно переоценить. Задача по нахождению точки встречи прямой с плоскостью входит как составная часть (фрагмент) в алгоритм решения широкого круга как позиционных, так и метрических задач.

Решение этой задачи даже в самом общем случае, когда и плоскость и прямая занимают произвольное положение в пространстве, легко сводится к простейшей задаче по определению линии пересечения двух плоскостей, из которых одна — проецирующая (см. § 44, рис. 187, 188), с последующим определением второй проекции точки, принадлежащей плоскости, если известна одна из ее проекций (см. § 40, примеры 1 ... 3, рис. 169 ... ... 171). Для этого достаточно прямую заключить во вспомогательную проецирующую плоскость.

ПРИМЕР 1. Определить точку встречи прямой a с плоскостью α (рис. 245).

РЕШЕНИЕ. Так как a — прямая, то в алгоритме $K = (\gamma \cap \alpha) \cap a$ в качестве секущей поверхности следует выбирать плоскость. Эта плоскость пересечет заданную α по прямой l. Поэтому в рассматриваемом случае предписываемая алго-

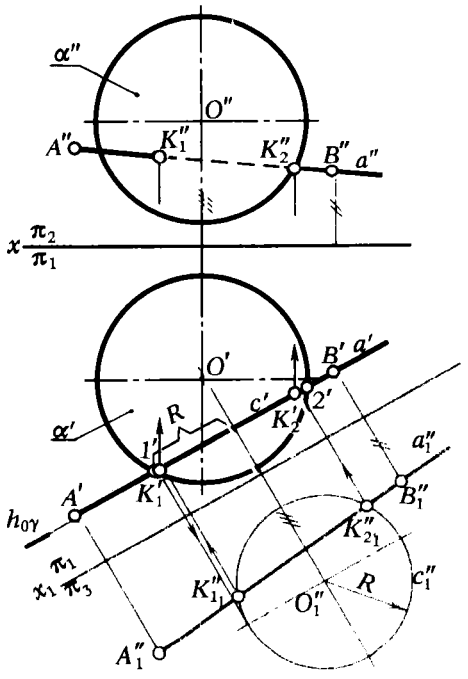


Рис. 243

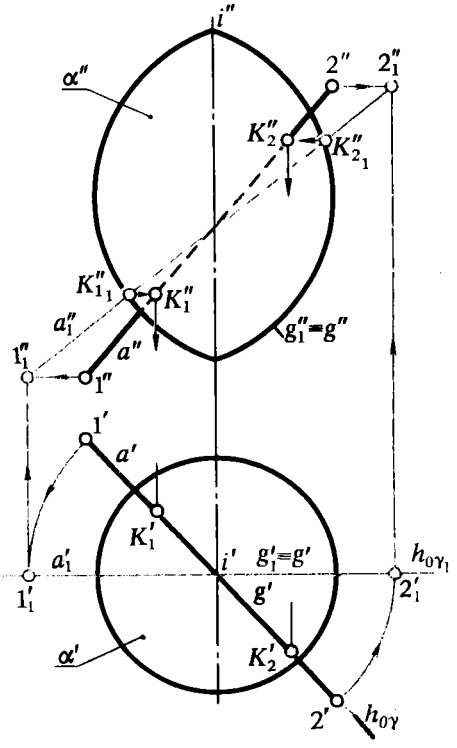


Рис. 244

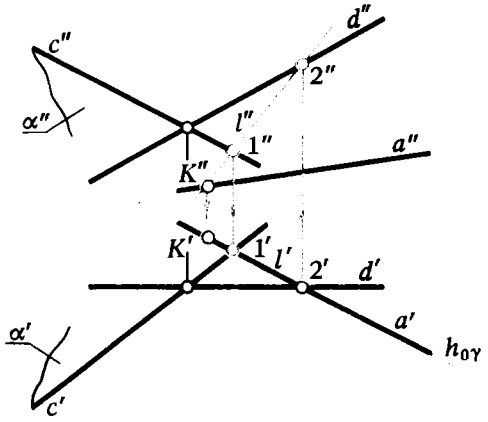


Рис. 245

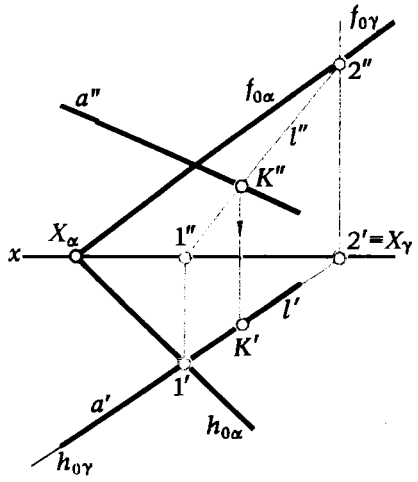


Рис. 246

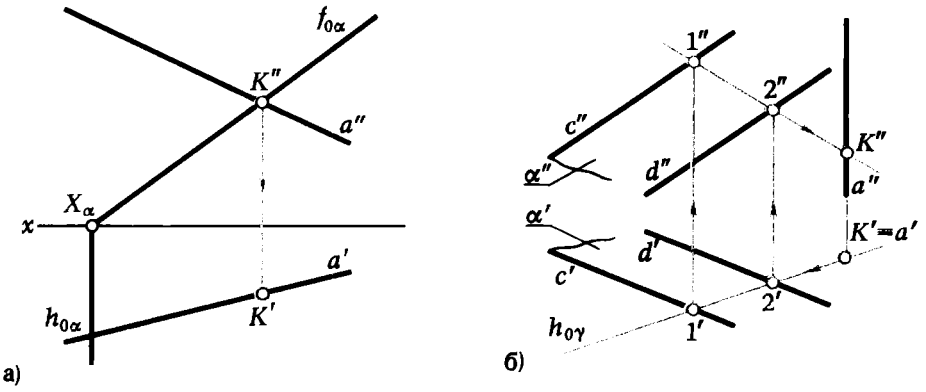


Рис. 247

ритмом последовательность выполнения геометрических построений будет иметь следующее содержание:

1) проводим через a' (или a'') горизонтальный (фронтальный) след горизонтально проецирующей (фронтально проецирующей) плоскости γ;

2) определяем фронтальную (горизонтальную) проекцию линии пересечения плоскости γ с данной плоскостью α $l'' = \gamma'' \cap \alpha''$ (или $l' = \gamma' \cap \alpha'$);

3) определяем $K'' = a'' \cap l''$ (или $K' = a' \cap l'$); зная K'', находим K' (или зная K', находим K'').

Алгоритм решения не меняется, если мы будем иметь дело с другим вариантом задания плоскости — параллельными прямыми или прямыми, по которым плоскость пересекает плоскости проекций (следами плоскости).

ПРИМЕР 2. Определить точку пересечения прямой a с плоскостью α (рис. 246).

РЕШЕНИЕ. Так же, как и в предыдущем примере, заключаем прямую a в проецирующую плоскость $\gamma \supset a$ ($h_{0\gamma} \equiv a'$). Строим линию пересечения плоскостей $\gamma \cap \alpha = l$. Отмечаем $K'' = l'' \cap a''$. По K'' находим K'.

Решение задачи упрощается, если одна из заданных фигур (прямая или плоскость) занимает проецирующее положение. Рис. 247, а и б иллюстрирует решение таких задач:

а) плоскость α — проецирующая, а прямая a — общего положения (рис. 247, а);

б) плоскость α — общего положения, а прямая a — проецирующая (рис. 247, б).

Решения задач настолько просты, что они ясны из чертежей и не требуют каких-либо пояснений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Изложите общий принцип построения обобщенного алгоритма для решения задачи по определению линии пересечения поверхностей.

2. Сформулируйте возможные варианты решения задачи по определению линии пересечения многогранника плоскостью.

3. В каких случаях для определения линии пересечения двух поверхностей можно применять способ:

а) вращающихся плоскостей;

б) пучка плоскостей с несобственной прямой;

в) концентрических сфер;

г) эксцентрических сфер?

4. Какие точки линии пересечения поверхностей называются опорными?

5. Напишите и дайте пояснение алгоритма решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью.

6. В чем заключается решение задач по определению сечения поверхности плоскостью с помощью способа граней и способа ребер?

7. В каких случаях плоскость пересекает поверхность прямого кругового конуса: по двум пересекающимся прямым, по окружности, эллипсу, параболе, гиперболе?

8. Что представляют собой фронтальные проекции линии пересечения двух поверхностей вращения второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную плоскости π_2?

9. Какая зависимость существует между порядком пересекающихся поверхностей и порядком линии, полученной в результате их пересечения?

10. Сформулируйте условия (теоремы), при которых кривая — линия пересечения поверхностей — распадается на две кривые второго порядка?

11. Приведите примеры, когда кривая — линия пересечения двух цилиндрических поверхностей — распадается на одну, две, три, четыре прямых.

12. В чем состоит содержание алгоритма решения задачи для определения точек пересечения линии с поверхностью?

13. Чем следует руководствоваться при выборе вспомогательной секущей поверхности при определении точек пересечения линии с поверхностью?

14. В каком случае можно для упрощения решения задачи по определению точек встречи прямой с поверхностью применять способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции?

ГЛАВА VI

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В § 6 гл. I отмечалось, что при параллельном, в частности ортогональном, проецировании геометрические фигуры, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, проецируются на эти плоскости с искажением их метрических характеристик (характеристик, которые могут быть получены путем измерения линейных и угловых величин). Для того чтобы иметь возможность по метрически искаженным проекциям судить о размерах и форме оригинала, необходимо знать способы решения задач по определению неискаженных линейных и угловых величин.

Метрическими называются задачи, решение которых связано с нахождением характеристик геометрических фигур, определяемых (измеряемых) линейными и угловыми величинами.

Все многообразие метрических задач, в конечном счете, сводится к двум видам: А — задачам на определение расстояния между двумя точками; Б — задачам на нахождение величины угла между двумя пересекающимися прямыми.

К метрическим относятся также задачи на построение отрезка и угла с наперед заданным значением соответственно линейной и градусной (радианной) величины.

Несмотря на то, что чисто метрические задачи встречаются редко, целесообразно выделить их в самостоятельную группу, включив в нее и те задачи, в которых на промежуточных этапах решения приходится выяснять позиционные отношения между геометрическими фигурами.

В основе алгоритма решения любой метрической задачи лежит инвариантное свойство ортогонального проецирования, заключающееся в том, что любая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекции, проецируется на эту плоскость в конгруентную фигуру, т. е. $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi$.

Рассмотрим возможные пути решения задач на определение метрических характеристик геометрических фигур.

А. Определение расстояний.

Решение задач на определение расстояния между точкой и прямой, двумя параллельными прямыми, точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, скрещивающимися прямыми, в конечном счете, сводится к нахождению расстояния между двумя точками.

Чертежи на рис. 248 подтверждают это утверждение. Из этих чертежей видно также, что, прежде чем приступить к решению задачи на определение расстояния между точкой и прямой или двумя параллельными прямыми (рис. 248, *а* и *б*), необходимо провести плоскость γ, перпендикулярную к прямой l, или опустить перпендикуляр из точки A ($A \in m$ или $A \in \beta$) на плоскость α (рис. 248, *в, г, д, е*). Поэтому, прежде чем решать задачи на определение расстояний, выясним характер и последо-

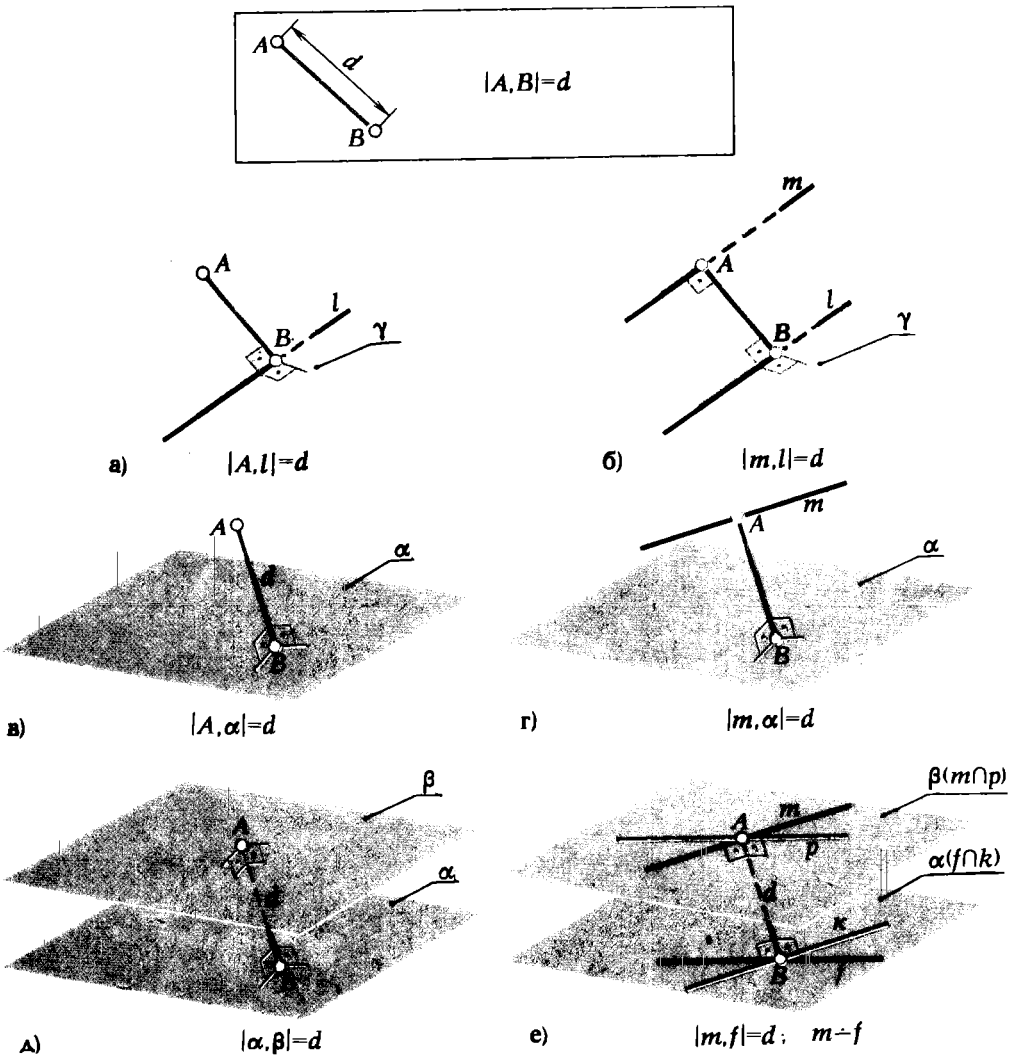


Рис. 248

вательность графических построений, которые должны быть выполнены для построения на эпюре взаимно перпендикулярных прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

§ 54. ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ПЛОСКОСТЕЙ

Не будет преувеличением утверждать, что построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей наряду с определением расстояния между двумя точками являются основными графическими операциями при решении метрических задач.

Теоретической предпосылкой для построения на эпюре Монжа проекций прямых и плоскостей, перпендикулярных по отношению друг к другу в пространстве, служит отмеченное раньше (см. § 6) свойство

проекции прямого угла, одна из сторон которого параллельна какой-либо плоскости проекции:

$$(\widehat{ABC} = 90^\circ) \wedge ([BC] \parallel \pi_1, [BA] \not\perp \pi_1) \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^\circ.$$

1. Взаимно перпендикулярные прямые.

Чтобы можно было воспользоваться отмеченным свойством для построения на эпюре Монжа двух пересекающихся под углом 90° прямых, необходимо, чтобы одна из них была параллельна какой-либо плоскости проекции. Поясним сказанное на примерах.

ПРИМЕР 1. Через точку A провести прямую l, пересекающую горизонталь h под прямым углом (рис. 249).

Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости π_1, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через A' проводим горизонтальную проекцию $l' \perp h'$. Отмечаем точку $M' = l' \cap h'$. Находим M'' ($M'' \in h''$). Точки A'' и M'' определяют l'' (см. рис. 249, а).

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $l \perp f$ аналогичны только что рассмотренным с той лишь разницей, что построения неискаженной проекции прямого угла следует начинать с фронтальной проекции (см. рис. 249, б).

ПРИМЕР 2. Через точку A провести прямую l, пересекающую прямую a, заданную отрезком $[BC]$, под углом 90° (рис. 250).

Так как данный отрезок занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций, мы не можем, как в предыдущем примере, воспользоваться свойством о частном случае проецирования прямого угла, поэтому вначале необходимо $[BC]$ перевести в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

На рис. 250 $[BC]$ переведен в положение, параллельное плоскости π_3. Это сделано с помощью способа замены плоскостей проекции путем замены плоскости $\pi_1 \to \pi_3 \parallel [BC]$.

В результате такой замены в новой системе $x_1 \frac{\pi_2}{\pi_3}$ $[BC]$ определяет горизонтальную прямую, поэтому все дальнейшие прострения выполнены так же, как это было сделано в предыдущем примере: после того, как была найдена точка M_1', ее перевели на исходные плоскости проекции в положение M'' и M', эти точки совместно с A'' и A' определяют проекции прямой l.

ПРИМЕР 3. Провести горизонтальную проекцию стороны $[BC]$ прямого угла ABC, если известны его фронтальная проекция $\angle A''B''C''$ и горизонтальная проекция стороны $[A'B']$ (рис. 251).

РЕШЕНИЕ:

1. Переводим сторону угла $[BA]$ в положение $\parallel \pi_3$ путем перехода от системы плоскостей проекций $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$.

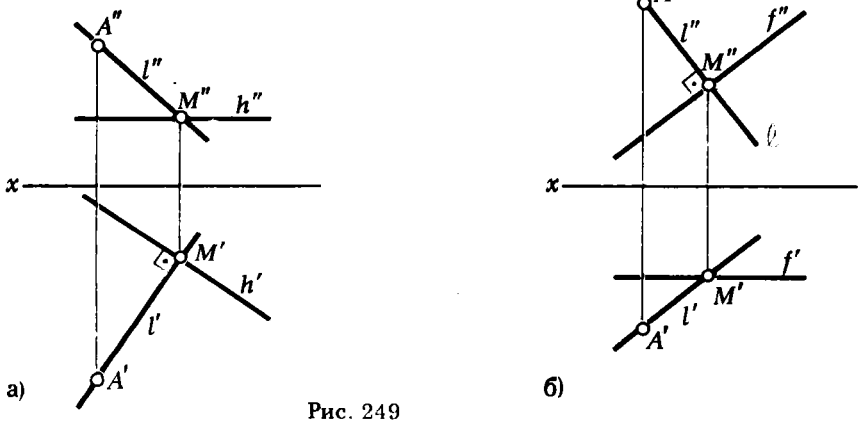


Рис. 249

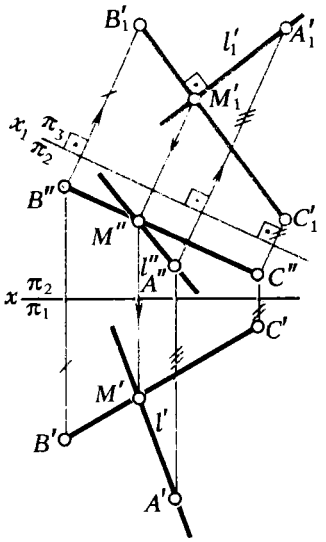


Рис. 250

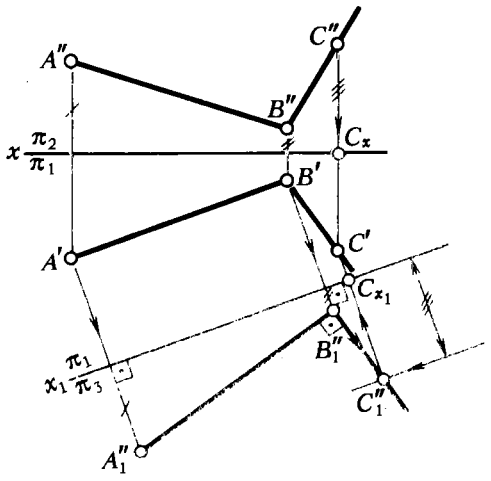


Рис. 251

2. Определяем новую фронтальную проекцию $[B_1''A_1'']$.

3. Из B_1'' восставляем перпендикуляр к $[B_1''A_1'']$. На этом перпендикуляре определяем точку C_1'' (C_1'' удалена от оси x_1 на расстояние $|C_{x_1}C_1''| = |C_xC''|$).

4. Горизонтальная проекция C' определяется как точка пересечения прямых $(C_1''C_{x_1}) \cap (C''C_x) = C'$.

2. Взаимно перпендикулярные прямая и плоскость.

Из курса стереометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна хотя бы к двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Если в плоскости взять не произвольные пересекающиеся прямые, а ее горизонталь и фронталь, то открывается возможность воспользоваться свойством проекции прямого угла, как это было сделано в примере 1, рис. 249.

Рассмотрим следующий пример; пусть из точки $A \in \alpha$ требуется восставить перпендикуляр к плоскости α (рис. 252).

Через точку A проводим горизонталь h и фронталь f плоскости α. Тогда, по определению (AB), перпендикулярная к плоскости α, должна быть перпендикулярна к прямым h и f, т. е. $\widehat{BAM} = \widehat{BAK} = 90°$. Но сторона $AM \angle BAM \parallel \pi_1$, поэтому $\angle BAM$ проецируется на плоскость π_1 без искажения, т. е. $\widehat{B'A'M'} = 90°$. Сторона $AK \angle BAK \parallel \pi_2$ и, следовательно, на плоскость π_2 этот угол проецируется также без искажения, т. е. и $\widehat{B''A''K''} = 90°$. Приведенные рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы: *для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция — к фронтальной проекции фронтали этой плоскости.*

Если плоскость задана следами, то теорема может быть сформулирована иначе: *для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы проекции этой прямой были перпендикулярны к одноименным следам плоскости.*

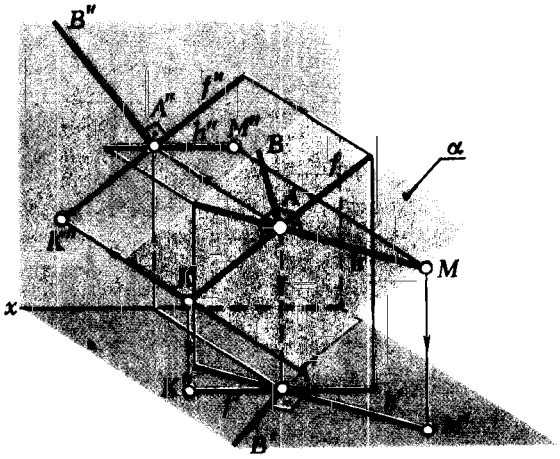


Рис. 252

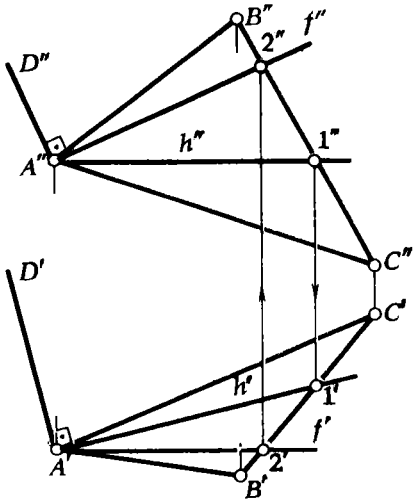


Рис. 253

Установленные теоремой зависимости между прямой в пространстве, перпендикулярной к плоскости, и проекциями этой прямой к проекциям линий уровня (следам) плоскости лежат в основе графического алгоритма решения задачи по проведению прямой, перпендикулярной к плоскости, а также построения плоскости, перпендикулярной к заданной прямой.

ПРИМЕР 1. Восставить в вершине A перпендикуляр AD к плоскости ΔABC (рис. 253).

Для того чтобы определить направление проекций перпендикуляра, проводим проекции горизонтали h и фронтали f плоскости ΔABC. После этого из точки A' восставляем перпендикуляр к h', а из A'' — к f''.

ПРИМЕР 2. Из точки A, принадлежащей плоскости α $(m \parallel n)$, восставить перпендикуляр к этой плоскости (рис. 254).

РЕШЕНИЕ. Для определения направления проекций перпендикуляра l' и l'', как и в предыдущем примере, проводим через точку A (A', A'') горизонталь h (h', h''), принадлежащую плоскости α. Зная направление h', строим горизонтальную проекцию перпендикуляра l' $(l' \perp h')$. Для определения направления фронтальной проекции перпендикуляра через точку A (A', A'') проводим фронталь f (f', f'') плоскости α. В силу параллельности f фронтальной плоскости проекции прямой угол между l и f проецируется на π_2 без искажения, поэтому проводим $l'' \perp f''$.

На рис. 255 эта же задача решена для случая, когда плоскость α задана следами. Для определения направлений проекций перпендикуляра отпадает необходимость в проведении горизонтали и фрон-

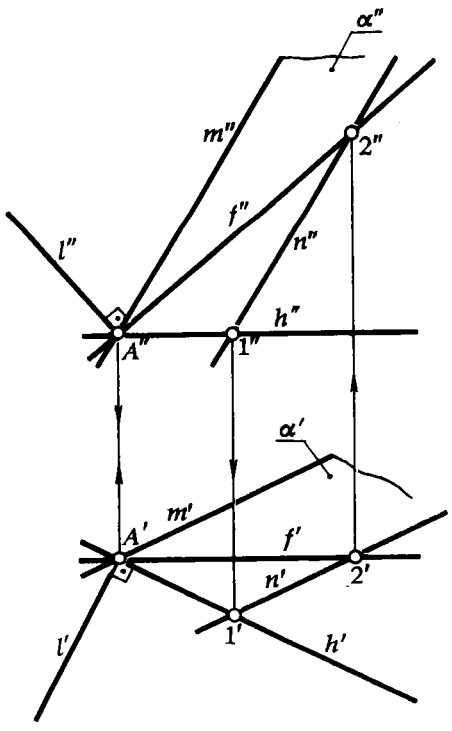


Рис. 254.

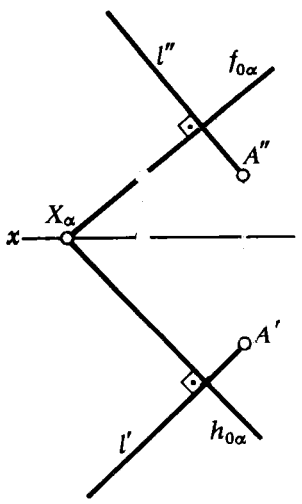


Рис. 255

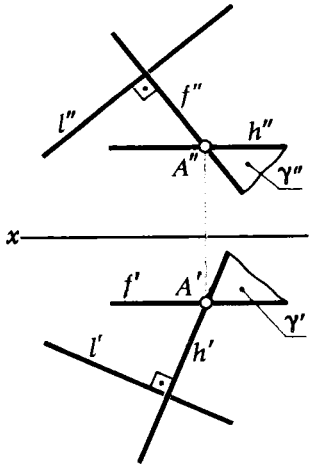


Рис. 256

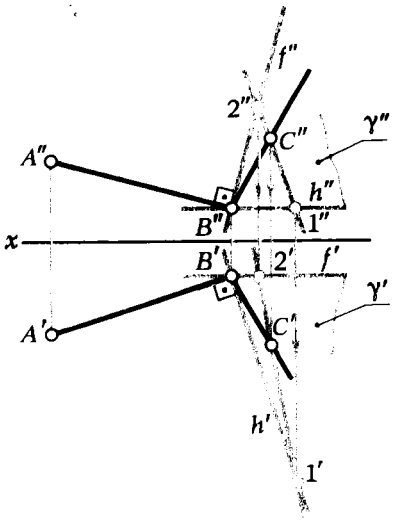


Рис. 257

тали, так как их функции выполняют следы плоскости $h_{0\alpha}$ и $f_{0\alpha}$. Как видно из чертежа, решение сводится к проведению через точки A' и A'' проекций $l' \perp h_{0\alpha}$ и $l'' \perp f_{0\alpha}$.

ПРИМЕР 3. Построить плоскость γ, перпендикулярную к данной прямой l и проходящую через заданную точку A (рис. 256).

РЕШЕНИЕ. Через точку A проводим горизонталь h и фронталь f. Эти две пересекающиеся прямые определяют плоскость; чтобы она была перпендикулярна к прямой l, необходимо, чтобы прямые h и f составляли с прямой l угол 90°. Для этого проводим $h' \perp l'$ и $f'' \perp l''$. Фронтальная проекция h'' и горизонтальная проекция f' проводятся параллельно оси x.

Рассмотренный случай позволяет по иному решать задачу, приведенную в примере 3 (с. 175 рис. 251). Сторона $[BC]$ $\angle ABC$ должна принадлежать плоскости $\gamma \perp [AB]$ и проходить через точку B (рис. 257).

Это условие и определяет ход решения задачи, который состоит в следующем: заключаем точку B в плоскость $\gamma \perp [AB]$, для этого через точку B проводим горизонталь и фронталь плоскости γ так, чтобы $h' \perp A'B'$ и $f'' \perp A''B''$.

Точка $C \in (BC)$, принадлежащей плоскости γ, поэтому для нахождения ее горизонтальной проекции проводим через C'' произвольную прямую $1''2''$, принадлежащую плоскости γ; определяем горизонтальную проекцию этой прямой $1'2'$ и на ней отмечаем точку C' (C' определяется пересечением линии связи — перпендикуляра, опущенного из C'', с горизонтальной проекцией прямой $1'2'$). C' совместно с B' определяют горизонтальную проекцию $(BC) \perp (AB)$.

3. Взаимно перпендикулярные плоскости.

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную к другой плоскости.

Исходя из определения перпендикулярности плоскостей, задачу на построение плоскости β, перпендикулярной к плоскости α, решаем следующим путем: проводим прямую l, перпендикулярную к плоскости α; заключаем прямую l в плоскость β. Плоскость $\beta \perp \alpha$, так как $\beta \supset l \perp \alpha$.

Через прямую l можно провести множество плоскостей, поэтому задача имеет множество решений. Чтобы конкретизировать ответ, необходимо указать дополнительные условия.

ПРИМЕР 1. Через данную прямую a провести плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (рис. 258).

РЕШЕНИЕ. Определяем направление проекций перпендикуляра к плоскости α, для этого находим горизонтальную проекцию горизонтали (h') и фронтальную проекцию фронтали (f''); из проекций произвольной точки $A \in a$ проводим проекции перпендикуляра $l' \perp h'$ и $l'' \perp f''$. Плоскость $\beta \perp \alpha$, так как $\beta \supset l \perp \alpha$.

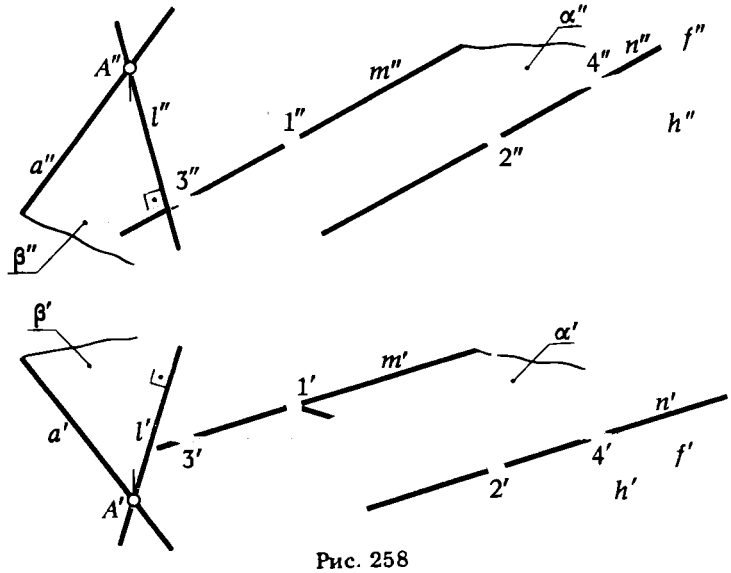


Рис. 258

ПРИМЕР 2. Через данную точку A провести горизонтально проецирующую плоскость γ, перпендикулярную к плоскости α, заданной следами (рис. 259, а).

Искомая плоскость γ должна содержать прямую, перпендикулярную плоскости α, или быть перпендикулярной к прямой, принадлежащей плоскости α. Так как плоскость γ должна быть горизонтально проецирующей, то прямая, перпендикулярная к ней, должна быть параллельна плоскости π_1, т. е. являться горизонталью плоскости α или (что то же самое) горизонтальным следом этой плоскости — $h_{0\alpha}$. Поэтому через горизонтальную проекцию точки A' проводим горизонтальный след $h_{0\gamma} \perp h_{0\alpha}$, фронтальный след $f_{0\gamma} \perp$ оси x.

На рис. 259, *б* показана фронтально проецирующая плоскость γ, проходящая через точку B и перпендикулярная к плоскости π_2.

Из чертежа видно, что отличительной особенностью эпюра, на котором заданы две взаимно перпендикулярные плоскости, из которых одна — фронтально проецирующая, является перпендикулярность их фронтальных следов $f_{0\gamma} \perp f_{0\alpha}$; горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости перпендикулярен оси x.

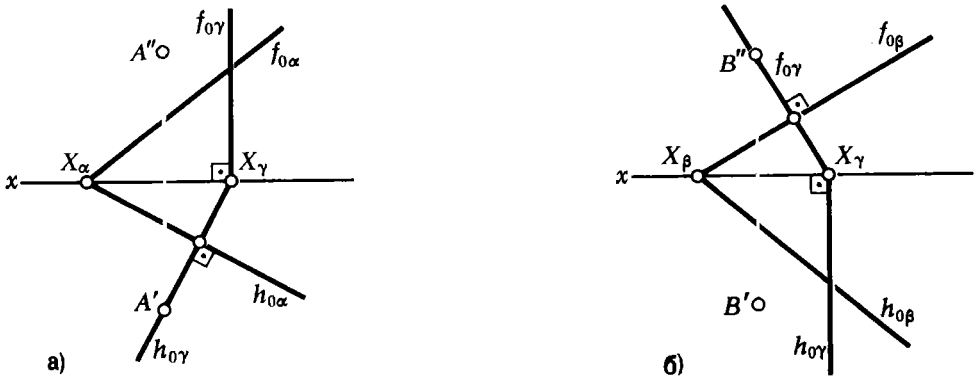


Рис. 259

§ 55. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

В § 8 гл. I (см. рис. 50) было показано графическое определение длины отрезка $[AB]$, являющегося мерой расстояния между точками A и B, путем построения прямоугольного треугольника.

Рассмотрим другие варианты решения этой задачи. Мы знаем, что ортогональная проекция геометрической фигуры будет конгруентна оригиналу в том случае, когда фигура занимает положение, параллельное плоскости проекции. Поэтому отрезок $[AB]$ проецируется на плоскость π_1 (или π_2) без искажения лишь в том случае, когда он параллелен плоскости π_1 (или π_2). Поэтому решение рассматриваемой задачи сводится к переводу отрезка в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

Перевод отрезка из общего положения в частное (параллельное плоскости проекции) можно осуществить, применив один из способов преобразования ортогональных проекций: или замену плоскости проекции, или плоскопараллельное перемещение (в частном случае — вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекции).

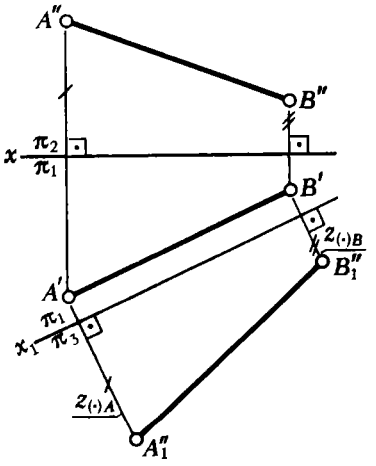


Рис. 260

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между точками A и B (рис. 260). Решение задачи сводится к нахождению длины отрезка, концами которого являются точки A и B. Переводим отрезок $[AB]$ из общего положения в частное — параллельное плоскости π_3, используя для этого замену плоскости π_2 плоскостью π_3. Новую плоскость π_3 выбираем так, чтобы отрезок $[AB]$ оказался параллелен этой плоскости. Для этого новую ось x_1 проводим параллельно $[A'B']$. Длина отрезка $[A''_1B''_1]$ — новой проекции отрезка $[AB]$ — укажет искомое расстояние.

ПРИМЕР 2. На рис. 261 приведено решение этой же задачи путем перемещения отрезка AB параллельно плоскости π_1 в положение A_1B_1, параллельное горизонтальной плоскости проекции. В этом случае отрезок будет проецироваться на π_1 без искажения.

ПРИМЕР 3. На рис. 262 для определения длины отрезка AB его перевели в положение, параллельное плоскости π_1, путем вращения вокруг оси $i \perp \pi_2$.

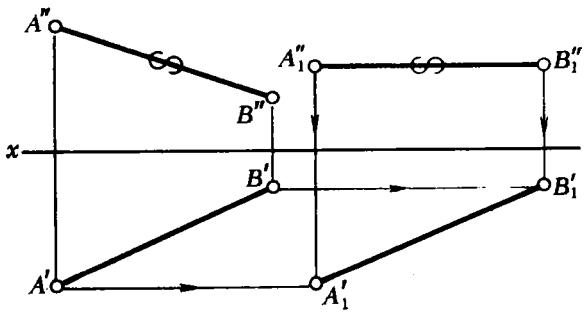


Рис. 261

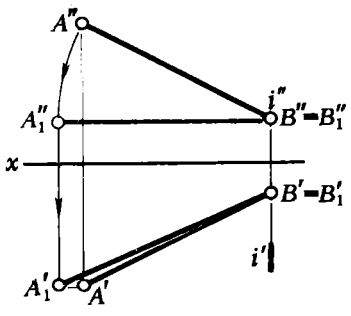


Рис. 262

§ 56. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ПРЯМОЙ, МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

Расстояние от точки до прямой определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Это определение может быть положено в основу составления алгоритма графического решения задачи определения расстояния от точки до прямой.

Рис. 263 дает наглядное представление о графическом решении задачи по определению расстояния от точки A до прямой a. Через точку A можно провести множество прямых $\{l_1, l_2, l_3, ..., l_n\}$, перпендикулярных к прямой a. Это множество прямых определяет плоскость γ. Чтобы выделить из $\{l_1, l_2, l_3, ..., l_n\}$ единственную прямую l_j, пересекающую прямую a, необходимо найти точку встречи прямой a с плоскостью $\gamma - M = a \cap \gamma$; определить длину отрезка $[AM]$.

Реализация этого алгоритма путем геометрических построений значительно упрощается, если прямая будет параллельна плоскости проекции.

В этом случае можно без каких-либо вспомогательных построений провести проекции прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку. На рис. 264 показано решение такой задачи. Как видно из чертежа, решение достигается минимальным числом геометрических построений. Поэтому нет смысла решать эту задачу в общем виде, а следует предварительно с помощью способов преобразования ортогональных проекций перевести прямую в положение, параллельное плоскости проекции (см. рис. 260, 261, 262).

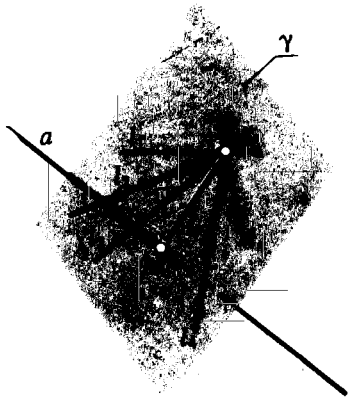


Рис. 263

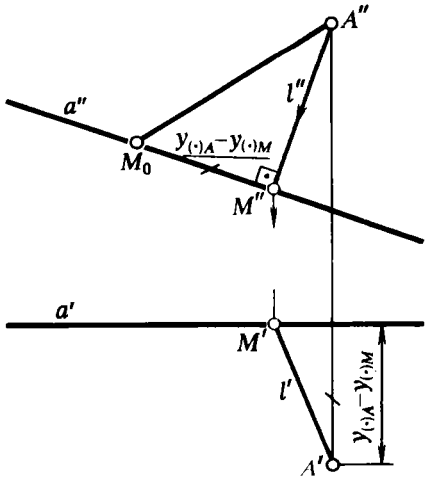


Рис. 264

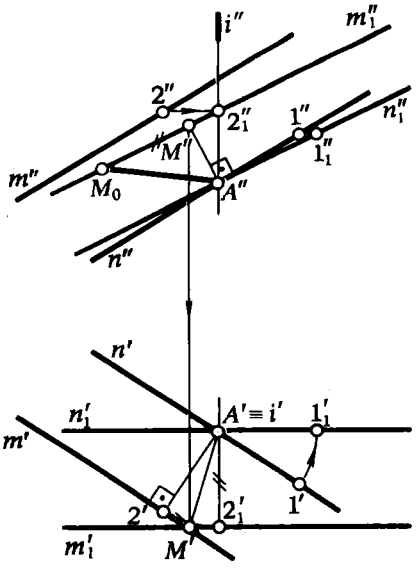


Рис. 265

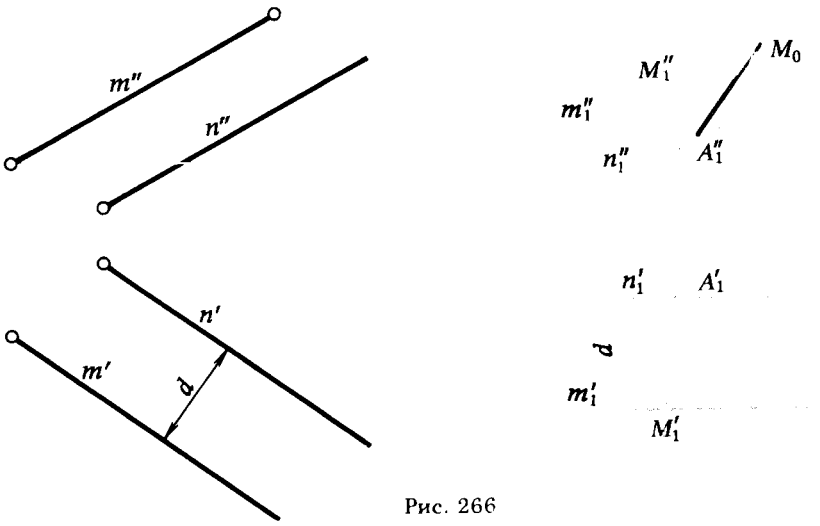


Рис. 266

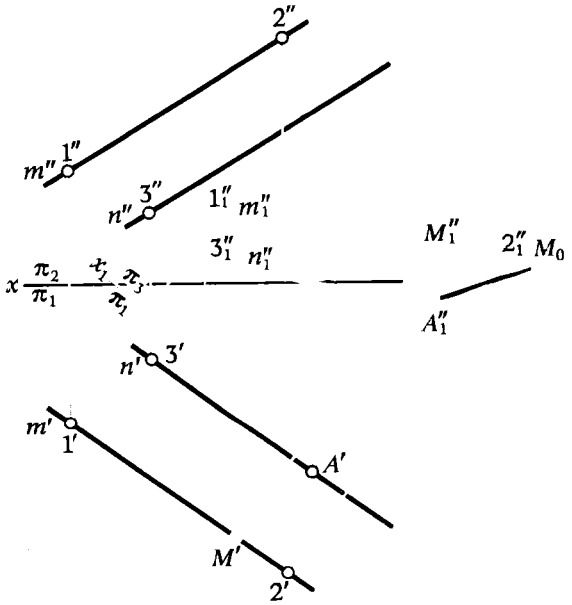


Рис. 267

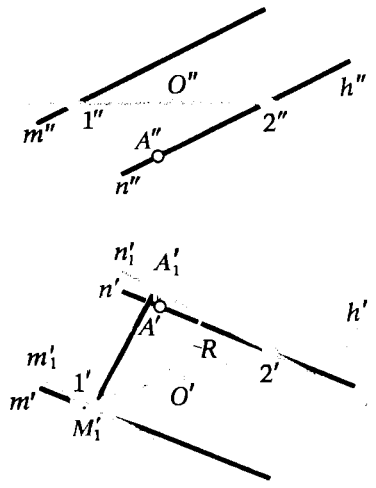


Рис. 268

Решение задачи на определение расстояния между параллельными прямыми ничем не отличается от только что рассмотренного примера. Это утверждение базируется на том, что расстояние между параллельными прямыми определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной прямой, на другую прямую.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между параллельными прямыми m и n (рис. 265).

РЕШЕНИЕ. На прямой n отмечаем произвольную точку $A \in n$. Вращаем прямые m и n вокруг оси i ($i \ni A$, $i \perp \pi_1$) до положения $m_1 \parallel \pi_2$ и $n_1 \parallel \pi_2$. Из точки A'' опускаем перпендикуляр $A''M''$ на прямую m_1''. Определяем действительную величину $[AM]$.

На рис. 266 показан второй вариант решения этой задачи. С помощью способа параллельного перемещения прямые m и n переведены в положение, параллельное плоскости π_2. Дальнейшее решение сводится к определению расстояния от точки A, взятой на одной прямой, до другой прямой m_1.

Перевод прямых m и n из общего положения в частное можно осуществить путем замены плоскости π_2 новой плоскостью π_3, параллельной прямым m и n. Решение задачи этим способом приведено на рис. 267.

На рис. 268 рассматриваемая задача решена путем вращения прямых m и n вокруг горизонтали h до положения, параллельного плоскости π_1.

§ 57. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ, МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ И СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Определение расстояния между: 1 — точкой и плоскостью; 2 — прямой и плоскостью; 3 — плоскостями; 4 — скрещивающимися прямыми рассматривается совместно, так как алгоритм решения для всех этих задач по существу одинаков и состоит из геометрических построений, которые нужно выполнить для определения расстояния между заданными точкой A и плоскостью α. Если и есть какое-то различие, то оно состоит лишь в том, что в случаях 2 и 3 прежде чем приступить к решению задачи, следует на прямой m (случай 2) или плоскости β (случай 3) отметить произвольную точку A. При определении расстояния между скрещивающимися прямыми предварительно заключаем их в параллельные плоскости α и β с последующим определением расстояния между этими плоскостями.

Рассмотрим каждый из отмеченных случаев решения задач.

1. Определение расстояния между точкой и плоскостью.

Расстояние от точки до плоскости определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Поэтому решение этой задачи состоит из последовательного выполнения следующих графических операций:

1) из точки A опускаем перпендикуляр a на плоскость α (рис. 269);

2) находим точку M пересечения этого перпендикуляра с плоскостью $M = a \cap \alpha$;

3) определяем длину отрезка $[AM]$.

Если плоскость α общего положения, то для того чтобы опустить на эту плоскость перпендикуляр, необходимо предварительно определить направление проекций горизонтали и фронтали этой плоскости. Нахождение точки встречи этого перпендикуляра с плоскостью также требует выполнения дополнительных геометрических построений.

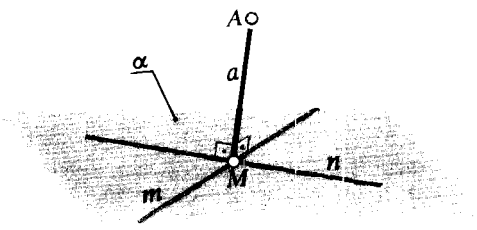


Рис. 269

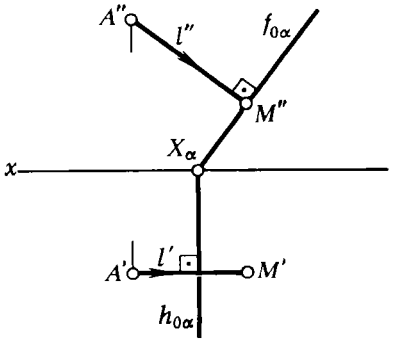


Рис. 270

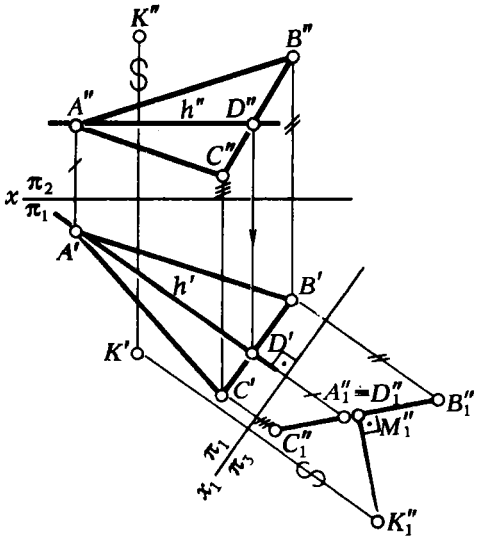


Рис. 271

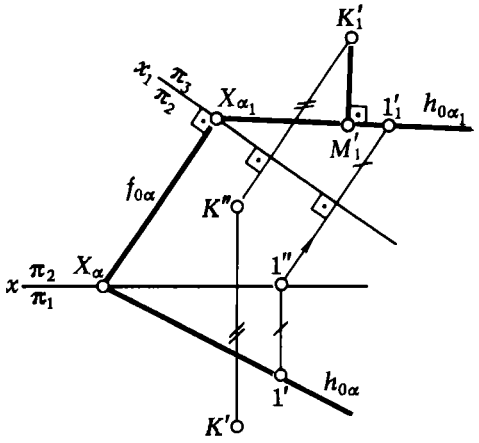


Рис. 272

Решение задачи упрощается, если плоскость α занимает частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае и проведение проекций перпендикуляра, и нахождение точки его встречи с плоскостью осуществляется без каких-либо дополнительных вспомогательных построений.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние от точки A до фронтально проецирующей плоскости α (рис. 270).

РЕШЕНИЕ. Через A' проводим горизонтальную проекцию перпендикуляра $l' \perp h_{0\alpha_1}$, а через A'' — его фронтальную проекцию $l'' \perp f_{0\alpha}$. Отмечаем точку $M'' = l'' \cap f_{0\alpha}$. Так как $AM \parallel \pi_2$, то $[A''M''] = |AM| = d$.

Из рассмотренного примера видно, насколько просто решается задача, когда плоскость занимает проецирующее положение. Поэтому, если в исходных данных будет задана плоскость общего положения, то, прежде чем приступить к решению, следует перевести плоскость в положение, перпендикулярное к какой-либо плоскости проекции.

ПРИМЕР 2. Определить расстояние от точки K до плоскости, заданной ΔABC (рис. 271).

РЕШЕНИЕ.

1. Переводим плоскость ΔABC в проецирующее положение*. Для этого переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_3}{\pi_1}$; направление новой оси x_1 выбирается перпендикулярным к горизонтальной проекции горизонтали плоскости треугольника.

2. Проецируем ΔABC на новую плоскость π_3 (плоскость ΔABC спроецируется на π_3 в $[C''_1B''_1]$).

3. Проецируем на ту же плоскость точку K ($K' \to K''_1$).

4. Через точку K''_1 проводим $(K''_1M''_1) \perp$ отрезку $[C''_1B''_1]$. Искомое расстояние $d = |K''_1M''_1|$.

Решение задачи упрощается, если плоскость задана следами, так как отпадает необходимость в проведении проекций линий уровня.

ПРИМЕР 3. Определить расстояние от точки K до плоскости α, заданной следами (рис. 272).

*Наиболее рациональным путем перевода плоскости треугольника в проецирующее положение является способ замены плоскостей проекций, так как в этом случае достаточно построить только одну вспомогательную проекцию.

РЕШЕНИЕ. Заменяем плоскость π_1 плоскостью π_3, для этого проводим новую ось $x_1 \perp f_{0\alpha}$. На $h_{0\alpha}$ отмечаем произвольную точку $1'$ и определяем ее новую горизонтальную проекцию на плоскости π_3 $(1'_1)$. Через точки X_{α_1} $(X_{\alpha_1} = h_{0\alpha_1} \cap x_1)$ и $1'_1$ проводим $h_{0\alpha_1}$. Определяем новую горизонтальную проекцию точки $K \to K'_1$. Из точки K'_1 опускаем перпендикуляр на $h_{0\alpha_1}$ и отмечаем точку его пересечения с $h_{0\alpha_1}$ — M'_1. Длина отрезка $K'_1M'_1$ укажет искомое расстояние.

2. Определение расстояния между прямой и плоскостью.

Расстояние между прямой и плоскостью определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из произвольной точки прямой на плоскость (см. рис. 248).

Поэтому решение задачи по определению расстояния между прямой m и плоскостью α ничем не отличается от рассмотренных в п. 1 примеров на определение расстояния между точкой и плоскостью (см. рис. 270 ... 272). В качестве точки можно брать любую точку, принадлежащую прямой m.

3. Определение расстояния между плоскостями.

Расстояние между плоскостями определяется величиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной плоскости, на другую плоскость.

Из этого определения вытекает, что алгоритм решения задачи по нахождению расстояния между плоскостями α и β отличается от аналогичного алгоритма решения задачи по определению расстояния между прямой m и плоскостью α лишь тем, что прямая m должна принадлежать плоскости α, т. е., чтобы определить расстояние между плоскостями α и β, следует:

1) взять в плоскости α прямую m;

2) выделить на прямой m произвольную точку A;

3) из точки A опустить перпендикуляр l на плоскость β;

4) определить точку M — точку встречи перпендикуляра l с плоскостью β;

5) определить величину отрезка $[AM]$.

На практике целесообразно пользоваться другим алгоритмом решения, который будет отличаться от приведенного лишь тем, что, прежде чем приступить к выполнению первого пункта, следует перевести плоскости в проецирующее положение.

Включение в алгоритм этой дополнительной операции упрощает выполнение всех без исключения остальных пунктов, что, в конечном счете, приводит к более простому решению.

ПРИМЕР 1. Определить расстояние между плоскостями α и β (рис. 273).

РЕШЕНИЕ. Переходим от системы $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к $x_1\frac{\pi_1}{\pi_3}$. По отношению к новой плоскости π_3 плоскости α и β занимают проецирующее положение, поэтому расстояние между новыми фронтальными следами $f_{0\alpha_1}$ и $f_{0\beta_1}$ является искомым.

В инженерной практике часто приходится решать задачу на построение плоскости, параллельной данной и удаленной от нее на заданное расстояние. Приведенный ниже пример 2 иллюстрирует решение такой задачи.

ПРИМЕР 2. Требуется построить проекции плоскости β, параллельной данной плоскости α $(m \parallel n)$, если известно, что расстояние между ними равно d (рис. 274).

РЕШЕНИЕ.

1. В плоскости α проводим произвольные горизонталь h (1, 3) и фронталь f (1, 2).

2. Из точки 1 восставляем перпендикуляр l к плоскости α $(l' \perp h', l'' \perp f'')$.

3. На перпендикуляре l отмечаем произвольную точку A.

4. Определяем длину отрезка $[1A]$ — $[1'A_0]$ (положение $[1'A_0]$ указывает на эпюре метрически неискаженное направление прямой l).

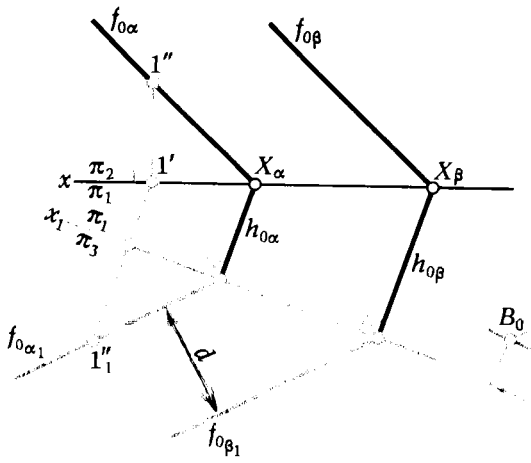


Рис. 273

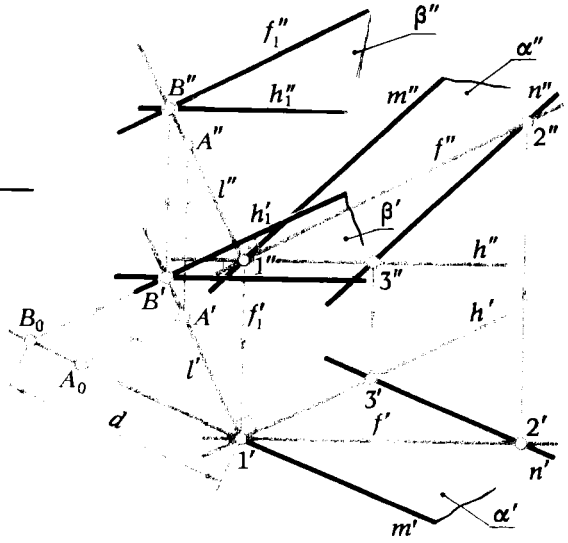


Рис. 274

5. Откладываем на прямой $(1'A_0)$ от точки $1'$ отрезок $[1'B_0] = d$.

6. Отмечаем на проекциях l' и l'' точки B' и B'', соответствующие точке B_0.

7. Через точку B проводим плоскость β $(h_1 \cap f_1)$. Чтобы $\beta \parallel \alpha$, необходимо соблюдать условие $h_1 \parallel h$ и $f_1 \parallel f$.

4. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между скрещивающимися прямыми определяется длиной перпендикуляра, заключенного между параллельными плоскостями, которым принадлежат скрещивающиеся прямые.*

Для того чтобы через скрещивающиеся прямые m и f провести взаимно параллельные плоскости α и β, достаточно через точку A $(A \in m)$ провести прямую p, параллельную прямой f, а через точку B $(B \in f)$ — прямую k, параллельную прямой m. Пересекающиеся прямые m и p, f и k определяют взаимно параллельные плоскости α и β (см. рис. 248, *е*). Расстояние между плоскостями α и β равно искомому расстоянию между скрещивающимися прямыми m и f.

Можно предложить и другой путь для определения расстояния между скрещивающимися прямыми, который состоит в том, что с помощью какого-либо способа преобразования ортогональных проекций одна из скрещивающихся прямых переводится в проецирующее положение. В этом случае одна проекция прямой вырождается в точку. Расстояние между новыми проекциями скрещивающихся прямых (точкой A'_2 и отрезком $C'_2D'_2$) является искомым.

На рис. 275 приведено решение задачи на определение расстояния между скрещивающимися прямыми a и b, заданными отрезками $[AB]$ и $[CD]$. Решение выполняют в следующей последовательности:

1. Переводят одну из скрещивающихся прямых (a) в положение, параллельное плоскости π_3; для этого переходят от системы плоскостей проекции $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к новой $x_1\frac{\pi_1}{\pi_3}$, ось x_1 проводят параллельно горизонтальной проекции прямой a. Определяют a''_1 $[A''_1B''_1]$ и b''_1 $[C''_1D''_1]$.

2. Путем замены плоскости π_1 плоскостью π_4 переводят прямую

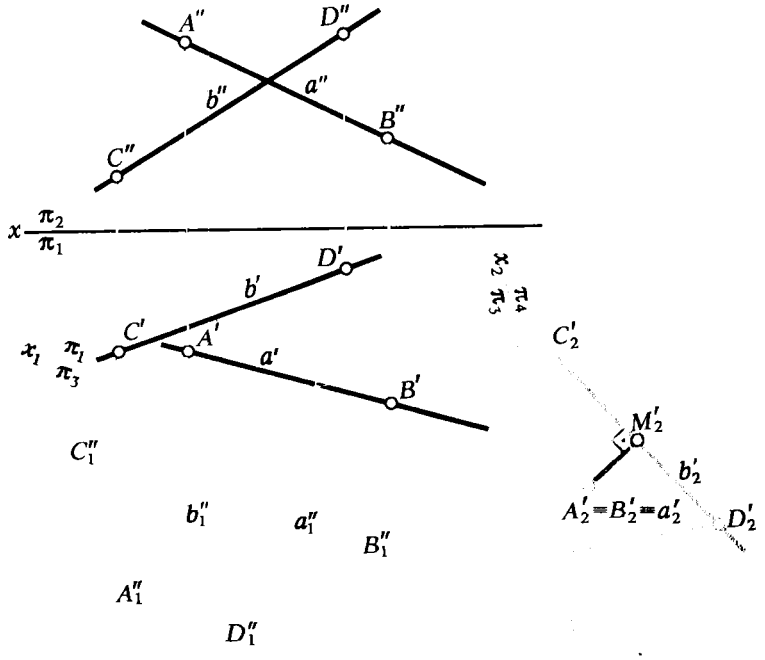


Рис. 275

a в положение a_2', перпендикулярное плоскости π_4 (новую ось x_2 проводят перпендикулярно a_1'').

3. Строят новую горизонтальную проекцию прямой b_2' — $[C_2'D_2']$.

4. Расстояние от точки A_2' до прямой $C_2'D_2'$ (отрезок $[A_2'M_2']$) является искомым.

Следует иметь в виду, что перевод одной из скрещивающихся прямых в проецирующее положение является ничем иным, как переводом плоскостей параллелизма, в которые можно заключить прямые a и b, также в проецирующее положение.

В самом деле, переведя прямую a в положение, перпендикулярное плоскости π_4, мы обеспечиваем перпендикулярность любой плоскости, содержащей прямую a, плоскости π_4, в том числе и плоскости α, определяемой прямыми a и m ($a \cap m$, $m \parallel b$). Если мы теперь проведем прямую n, параллельную a и пересекающую прямую b, то мы получим плоскость β, являющуюся второй плоскостью параллелизма, в которую заключены скрещивающиеся прямые a и b. Так как $\beta \parallel \alpha$, то и $\beta \perp \pi_4$.

§ 58. О ПРОЕКЦИЯХ ПЛОСКИХ УГЛОВ

Отметим ряд свойств ортогональных проекций плоских углов, знание которых поможет в дальнейшем правильно читать эпюр и решать задачи по определению величины угла, если известны его ортогональные проекции.

1. Если стороны угла не параллельны плоскости проекции, то угол проецируется на эту плоскость с искажением.

Следует иметь в виду, что проекции острого или тупого углов могут, при определенных условиях, проецироваться на плоскость проекции без искажения, будучи и не параллельными плоскости проекции.

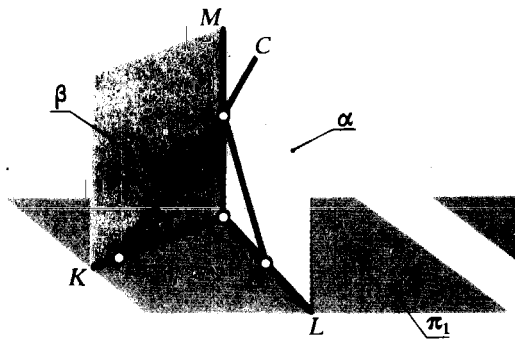


Рис. 276

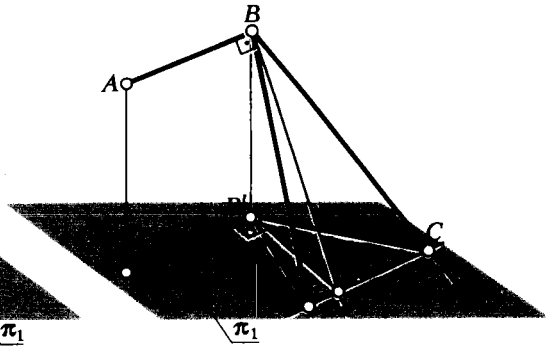


Рис. 277

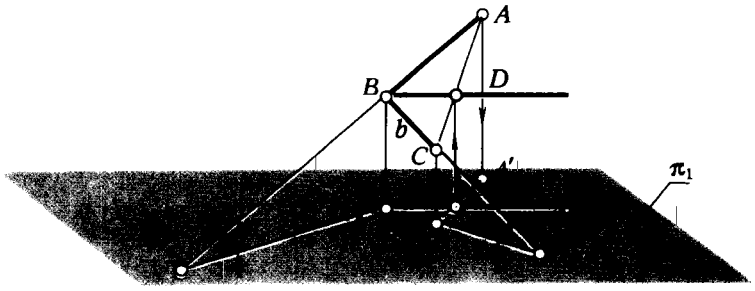


Рис. 278

Из рис. 276 видно, что все углы с вершиной на прямой (MN), стороны которых расположены в проецирующих плоскостях α и β, проецируются в $\angle KNL$; при этом проецируемые углы BAD и BAC могут изменяться в пределах от 0° до 180°. Естественно, что среди них будет угол, равный $\angle KNL$.

2. Если хотя бы одна сторона тупого, прямого или острого угла параллельна плоскости проекции, то проекцией угла на эту плоскость будет угол с тем же названием, что и сам угол (тупой, прямой, острый).

Убедиться в этом легко на примере, показанном на рис. 277. Пусть дан отрезок $[AB] \parallel \pi_1$, строим тупой $\angle ABC$ и острый $\angle ABD$. Сторону BD угла ABD проводим так, чтобы $[BD]$ принадлежал плоскости, определяемой точками A, B, C. Проводим в плоскости A, B, C отрезок $[BE] \perp [AB]$. Так как $\angle ABE$ прямой, а сторона угла $AB \parallel \pi_1$, то проекция этого угла на плоскость π_1 также будет равна 90°. Из чертежа видно, что $\angle A'B'D < 90^\circ$, а $\angle A'B'C > 90^\circ$.

3. Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекции, то на эту плоскость он проецируется без искажения.

Справедливость этого утверждения не вызывает сомнения — оно вытекает непосредственно из инвариантного свойства ортогонального проецирования $(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi_1) = \Phi' \cong \Phi$.

4. Если стороны угла параллельны плоскости проекции или одинаково наклонены к ней, то деление пополам проекции угла соответствует его делению пополам в пространстве (рис. 278).

Стороны $\angle ABC$ (рис. 278) наклонены под одинаковым углом к плоскости проекции π_1: $\overset{\frown}{AH_{0a}A'} = \overset{\frown}{BH_{0b}B'}$, $\angle A'B'C'$ — ортогональ-

ная проекция $\angle ABC$ на плоскость π_1, $[B'D']$ — биссектриса $\angle A'B'C'$. На основании свойства биссектрисы внутреннего угла в треугольнике $\frac{|A'D'|}{|D'C'|} = \frac{|B'A'|}{|B'C'|}$, но по свойству 2и (см. гл. I, § 6) $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|A'D'|}{|D'C'|}$, следовательно, $\frac{|B'A'|}{|B'C'|} = \frac{|AD|}{|DC|}$. Но $|B'A'| = |BA| \cos\varphi°$ и $|B'C'| = |BC| \cos\varphi°$, откуда $\frac{|B'A'|}{|B'C'|} = \frac{|BA| \cos\varphi°}{|BC| \cos\varphi°} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Следовательно, $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$, т. е. $[BD)$ — биссектриса $\angle ABC$.

В заключение следует еще раз заострить внимание читателя на частном случае проецирования прямого угла. Сформулируем его не в виде свойства, как это было сделано в гл. I, § 6, а в виде вытекающего из него следствия: *если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекции, равна прямому углу, то и проецируемый угол также прямой.*

Это следствие имеет весьма важное значение. Базируясь на нем, мы можем просто, с минимальным числом геометрических построений решать на эпюре Монжа задачи по построению:

а) прямых, перпендикулярных друг к другу;

б) прямой, перпендикулярной плоскости;

в) взаимно перпендикулярных плоскостей (см. гл. VI, § 54).

§ 59. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОСКОГО УГЛА ПО ЕГО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

В предыдущем параграфе было отмечено, что плоский угол проецируется на плоскость проекции без искажения в том случае, когда его стороны параллельны этой плоскости. Это свойство может быть принято за основу при составлении алгоритма решения задачи на определение величины угла по его искаженным ортогональным проекциям.

Решение задачи будет сводиться к перемещению плоскости общего положения, которой принадлежит угол, в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции. Такое перемещение можно осуществить с помощью способов преобразования ортогональных проекций.

Наиболее рациональное решение задачи по переводу плоскости угла в положение, параллельное плоскости проекции, достигается путем вращения плоскости угла вокруг линии уровня. В этом случае для получения ответа на поставленную задачу достаточно произвести поворот только одной точки вокруг горизонтали или фронтали плоскости угла — построить только одну вспомогательную проекцию.

При использовании других способов преобразования нам пришлось бы дважды менять плоскости проекции, либо дважды осуществлять перемещение (или вращение), параллельное плоскости проекции, т. е. в обоих случаях потребовалось бы построение двух вспомогательных проекций.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют использование способа вращения вокруг линии уровня для решения задачи по определению величины плоского угла.

ПРИМЕР 1. Определить угол между пересекающимися прямыми a и b (рис. 279).

РЕШЕНИЕ. Вращаем плоскость α, определяемую прямыми a и b, вокруг ее горизонтали h до нового положения, параллельного плоскости π_1. Точки A и B принадлежат оси вращения h, поэтому при вращении плоскости α вокруг оси h они не меняют своего положения. Следо-

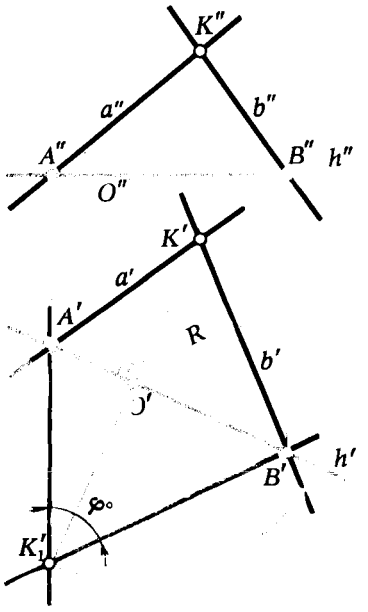


Рис. 279

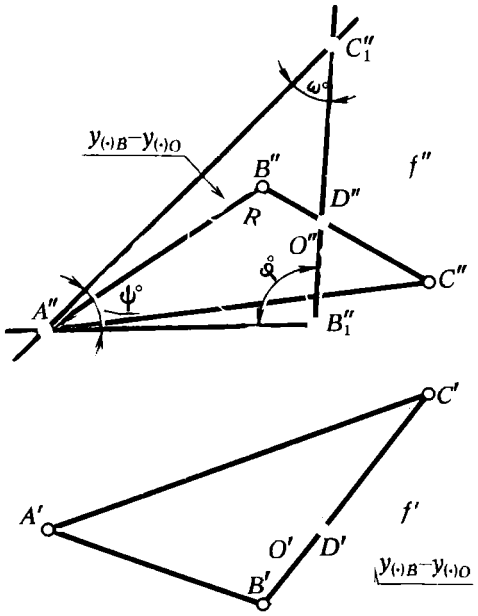


Рис. 280

вательно, для определения нового положения плоскости α_1 достаточно осуществить поворот только одной точки K. Для этого проводим через K' прямую, перпендикулярную h' (с этой прямой будет совпадать горизонтальная проекция окружности, по которой перемещается точка при ее вращении вокруг h). Далее определяем положение центра вращения O и величину радиуса вращения R для точки K (построения выполнены аналогично тому, как это было сделано на рис. 71, § 11). Положение точки K'_1 совместно с A' и B' определяет новые проекции прямых a'_1 и b'_1, задающих плоскость α_1. Поэтому $A'K'_1B'$ равен искомому углу φ°.

ПРИМЕР 2. Определить величину углов ΔABC (рис. 280).

РЕШЕНИЕ. Вращаем плоскость ΔABC вокруг фронтали f этого треугольника до положения, параллельного плоскости π_2. Через вершину A ΔABC проводим фронталь f (f', f''). Точки A и D как принадлежащие оси вращения не изменят своего положения в процессе преобразования. Поэтому, как и в предыдущем примере, достаточно повернуть только одну точку. На рис. 280 в качестве такой точки взята вершина B ΔABC.

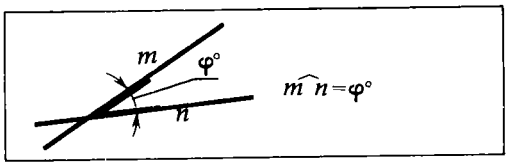
Вершина треугольника C при вращении вокруг фронтали будет перемещаться по дуге окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения f; поэтому фронтальная проекция этой окружности перпендикулярна f'' и новое положение C''_1 определится в точке пересечения этого перпендикуляра с новым положением прямой B''_1D''. После такого поворота плоскость треугольника переводится в положение, параллельное плоскости π_2. Следовательно, на основании инвариантного свойства 2д (см. § 6) углы при вершинах A'', B''_1 и C''_1 проецируются без искажения.

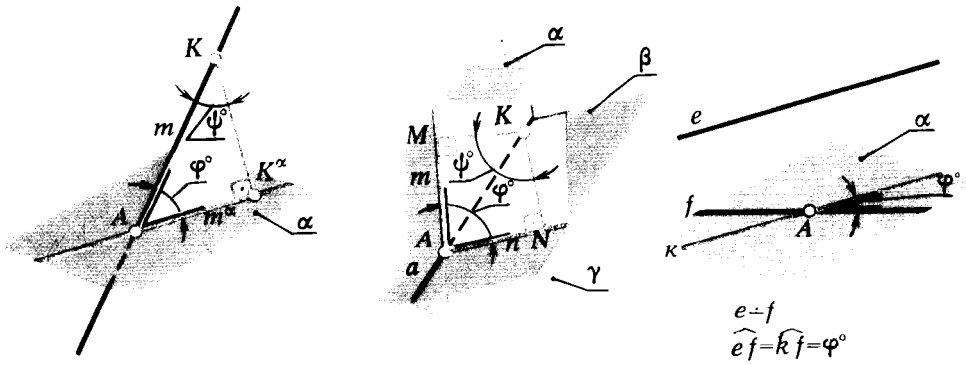
§ 60. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Определение угла между прямой и плоскостью, двумя плоскостями, скрещивающимися прямыми, сводится к нахождению угла между двумя прямыми.

Чертежи на рис. 281 подтверждают это высказывание. Известно, что *углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее прямоугольной проекцией на данную плоскость**.

*Естественно, речь идет о случае, когда прямая не перпендикулярна плоскости.





а) $\widehat{m\,\alpha}=\widehat{m\,m^{\alpha}}=\varphi^{\circ}$

б) $\widehat{\alpha\,\beta}=\widehat{m\,n}=\varphi^{\circ}$
$m=\gamma\cap\alpha$
$n=\gamma\cap\beta$

в) $e\dashv f$
$\widehat{e\,f}=\widehat{k\,f}=\varphi^{\circ}$
$k\ni A\in f$
$k\parallel e$

Рис. 281

Геометрическая интерпретация приведенного определения показана на рис. 281,*а*. План решения задачи может быть записан в следующем виде:

1. Из произвольной точки $K\in m$ опускаем перпендикуляр на плоскость α.
2. Определяем точку встречи этого перпендикуляра с плоскостью — K^{α} (точка K^{α} — ортогональная проекция K на плоскость α).
3. Находим точку A — пересечения прямой m с плоскостью α.
4. Проводим $(K^{\alpha}A)$ — проекцию прямой m на плоскость α.
5. Угол $\angle\, KAK^{\alpha}$ — искомый.

Решение этой задачи может быть значительно упрощено, если определять не угол между прямой и плоскостью $(\angle\,\varphi^{\circ})$, а дополнительный до 90° $\angle\,\psi^{\circ}$. В этом случае отпадает необходимость в определении точки K^{α} и проекции m^{α}. Зная величину $\hat{\psi}^{\circ}$, вычисляем $\hat{\varphi}^{\circ}=90^{\circ}-\hat{\psi}^{\circ}$.

ПРИМЕР 1. Определить угол между прямой a и плоскостью α $(m\parallel n)$ (рис. 282).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление горизонтальной проекции горизонтали h' и фронтальной проекции фронтали f'' плоскости α.
2. Из произвольной точки K прямой a проводим прямую $l\perp\alpha$; для этого через K' проводим $l'\perp h'$ и через K'' — $l''\perp f''$.
3. Определяем величину угла ψ° вращением его вокруг горизонтали до положения, параллельного плоскости π_1.
4. Вычисляем значение искомого угла $\hat{\varphi}^{\circ}=90^{\circ}-\hat{\psi}^{\circ}$

Решение аналогичной задачи упрощается, если плоскость задана следами, так как в этом случае отпадает необходимость в определении проекций линий уровня.

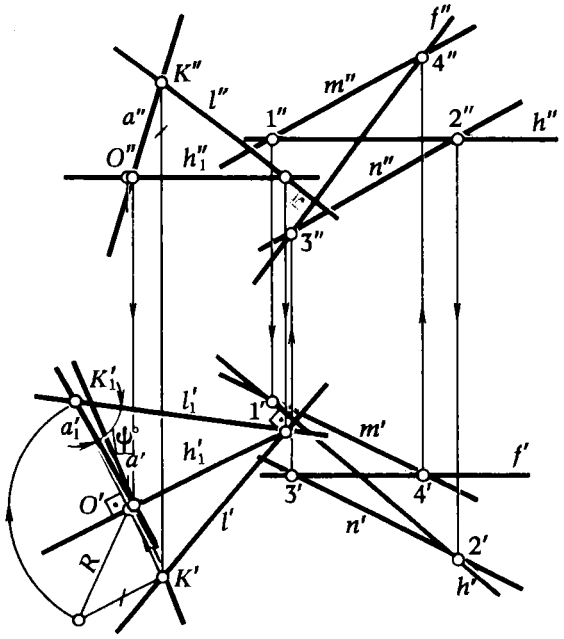


Рис. 282

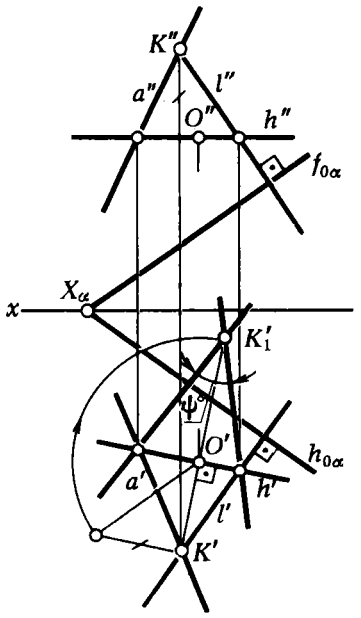


Рис. 283

ПРИМЕР 2. Определить угол между прямой a и плоскостью α, заданной следами (рис. 283).

РЕШЕНИЕ.

1. Из произвольной точки K прямой a опускаем перпендикуляр l на плоскость α ($l' \perp h_{0\alpha}, l'' \perp f_{0\alpha}$).

2. Определяем величину угла ψ°.

3. Вычисляем значение искомого угла $\varphi^\circ = 90^\circ - \psi^\circ$.

§ 61. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми — сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру.

Для построения линейного угла, являющегося мерой двугранного угла, необходимо выполнить следующие геометрические построения:

1. Определить прямую a — линию пересечения данных плоскостей α и β, $a = \alpha \cap \beta$ (рис. 284).

2. Провести плоскость γ ($\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$).

3. Построить прямые $m = \gamma \cap \alpha$ и $n = \gamma \cap \beta$.

4. Найти величину угла $\widehat{\varphi}^\circ$ между прямыми m и n. Угол $\widehat{\varphi}^\circ$ — искомый.

Рассмотренный план решения задачи предусматривает выполнение большого числа геометрических построений, связанных с нахождением линии пересечения данных плоскостей ($a = \alpha \cap \beta$), проведением плоскости, перпендикулярной к найденной прямой ($\gamma \perp a$). Далее приходится еще дважды решать задачу по определению линии пересечения плоскостей ($m = \gamma \cap \alpha$ и $n = \gamma \cap \beta$) и лишь только после этого можно приступить к определению величины искомого угла $\widehat{\varphi}^\circ$.

Проследим, как можно упростить решение этой задачи. Дополним чертеж на рис. 284 точкой $K \in \gamma$ и опустим из этой точки перпендикуляры k и l на плоскости α и β (рис. 285). Точки M и N пересечения

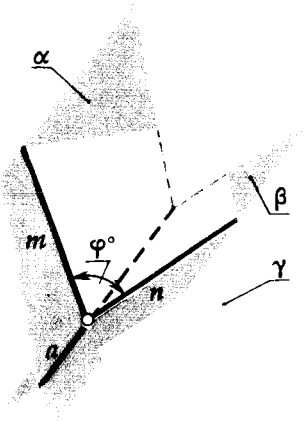


Рис. 284

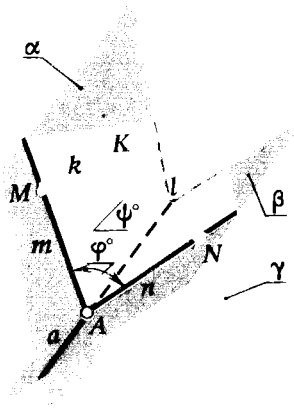


Рис. 285

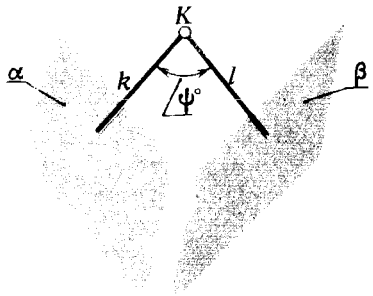


Рис. 286

этих перпендикуляров с плоскостями совместно с точками K и A ($A \in a$) являются вершинами плоского четырехугольника $KNAM$, у которого углы при вершинах M и N прямые. Следовательно, между углами при вершинах A и K существует зависимость, которую можно выразить следующим равенством: $\widehat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \psi^\circ$. Из рис. 285 видно, что вместо $\angle\, \varphi^\circ$ гораздо проще определять дополнительный до 180° $\angle\, \psi^\circ$. Все решение сводится к построению угла ψ° путем проведения из произвольной точки пространства K прямых k и l, перпендикулярных к заданным плоскостям, и определению угла ψ° между этими прямыми; после чего подсчитывается значение величины $\widehat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \widehat{\psi}^\circ$ (рис. 286).

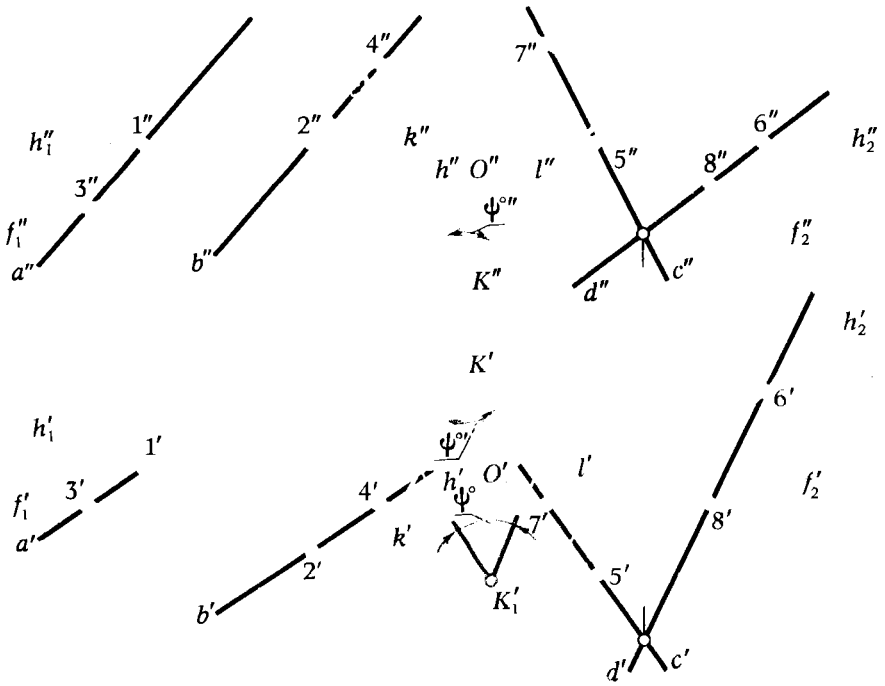


Рис. 287.

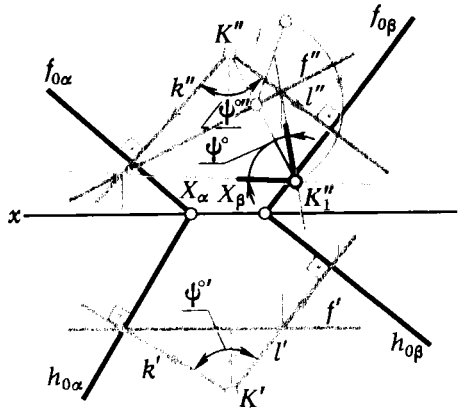


Рис. 288

ПРИМЕР 1. Определить угол между плоскостями α ($a \parallel b$) и β ($c \cap d$) (рис. 287).

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем направление горизонтальных проекций горизонталей h_1' и h_2', фронтальных проекций фронталей f_1'' и f_2'' заданных плоскостей α и β.

2. Из произвольной точки K проводим проекции перпендикуляров k и l ($k' \perp h_1'$, $k'' \perp f_1''$ и $l' \perp h_2'$, $l'' \perp f_2''$).

3. Определяем величину $\widehat{\Psi}^\circ$.

4. Вычисляем значение $\widehat{\varphi}^\circ = 180^\circ - \widehat{\Psi}^\circ$.

Если плоскости, угол между которыми требуется определить, задан следами, то решение упрощается еще больше, так как отпадает необходимость в выполнении п. 1 только что рассмотренного решения.

ПРИМЕР 2. Определить угол между плоскостями α и β, заданными следами (рис. 288).

РЕШЕНИЕ. Все геометрические построения сводятся к проведению через точку K прямых, перпендикулярных к следам плоскостей α и β ($k' \perp h_{0\alpha}$, $k'' \perp f_{0\alpha}$ и $l' \perp h_{0\beta}$, $l'' \perp f_{0\beta}$). Затем известным способом находим величину $\widehat{\Psi}^\circ$ (на рис. 288 угол $\widehat{\Psi}^\circ$ определен путем вращения вокруг фронтали). Зная $\widehat{\Psi}^\circ$, вычисляем значение $\widehat{\varphi}^\circ$

§ 62. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Углом между скрещивающимися прямыми называется плоский угол, который образуется между прямыми, проведенными из произвольной точки пространства параллельно данным скрещивающимся прямым.

Поэтому решение задачи по определению величины угла между скрещивающимися прямыми по существу ничем не отличается от решения задачи по определению угла между пересекающимися прямыми (см.

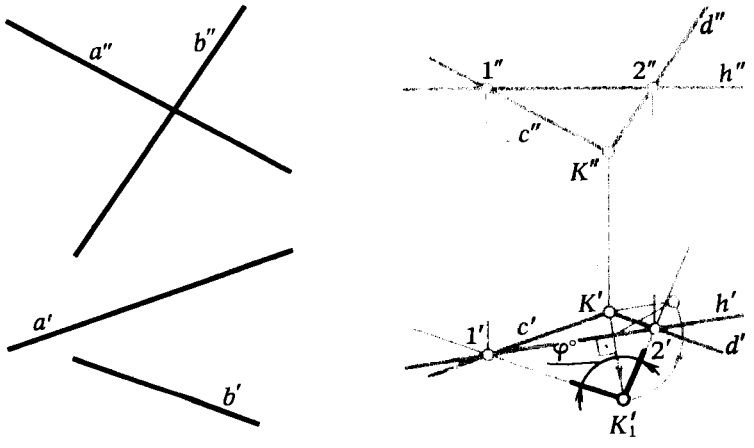


Рис. 289

§ 59). Единственное отличие состоит в том, что на первой стадии решения необходимо построить плоский угол, являющийся аналогом искомого угла. Для этого через произвольную точку, которую принимаем за вершину угла, проводим две прямые, параллельные заданным скрещивающимся прямым. Чтобы не происходило наложения линий вспомогательных построений на исходные данные задачи, точку, которую принимают за вершину угла, следует брать в свободном месте чертежа, как это сделано на рис. 289.

ПРИМЕР 1. Определить угол между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 289).

РЕШЕНИЕ. Из произвольной точки K проводим прямые c и d ($c \parallel a$ и $d \parallel b$). Определяем величину угла $\widehat{\varphi}^\circ$ (см. § 59, пример 1, рис. 279).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие характеристики геометрических фигур называют метрическими?
2. В каких случаях угловые величины проецируются без искажения?
3. Как решается задача по определению величины угла между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями?
4. Что является мерой угла между скрещивающимися прямыми?
5. Как построить на эпюре Монжа проекции двух взаимно перпендикулярных прямых; прямой, перпендикулярной плоскости; двух взаимно перпендикулярных плоскостей?
6. Как определить величину отрезка прямой общего положения по его ортогональным проекциям?
7. Как определить расстояние от точки до плоскости; между плоскостями; между параллельными и скрещивающимися прямыми?

ГЛАВА VII

РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приступая к изучению развертки поверхности, последнюю целесообразно рассматривать как гибкую, нерастяжимую пленку. Некоторые из представленных таким образом поверхностей можно путем изгибания совместить с плоскостью. Если при этом отсек поверхности может быть совмещен с плоскостью без разрывов и склеивания, то такую поверхность называют развертывающейся, а полученную плоскую фигуру — ее разверткой. Поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью, относятся к неразвертываемым поверхностям.

К группе развертывающихся поверхностей относятся только линейчатые поверхности и, в частности, те из них, которые имеют пересекающиеся смежные образующие. Точка пересечения может быть как собственной (поверхности с ребром возврата и конические), так и несобственной (цилиндрические поверхности).

Деформацию поверхности α для получения ее развертки можно представить как постепенное ее разгибание (совмещение с плоскостью β, касательной к этой поверхности). На рис. 290 задана коническая поверхность α и показана касательная к ней плоскость β. Образующая g — линия касания.

Отметим на направляющей конической поверхности d точку 2; проведем через нее образующую конической поверхности $(S2)$. Если расстояние между точками 1 и 2 мало, то отсек конической поверхности, заключенной между образующими $S1$ и $S2$, можно с определенной степенью точности отождествлять с $\Delta\, 1S2$. Если теперь мы повернем $\Delta\, 1S2$ вокруг стороны $1S$ до его совмещения с плокостью β, то получим $\Delta\, 1_0S2_0$, представляющий развертку отсека $1S2$ поверхности α на плоскость β.

При перемещении точки 2 в положение 2_0 направляющая конической поверхности d переместится в положение d_1, а точка $3 \in d$ займет положение $3_1 \in d_1$. Соединив точку 3_1 с вершиной S, получим отсек конической поверхности $2_0S3_1 \cong 2S3$, который, как и в предыдущем случае, можно с определенной степенью точности рассматривать как $\Delta\, 2_0S3_1$. Вращая этот треугольник вокруг стороны $S2_0$ до совмещения с плоскостью β, получим $\Delta\, 2_0S3_0$ — развертку отсека $2S3$ поверхности α на плоскость β.

Отметив на направляющей d точки 4, 5, ..., N, принимая их за вершины треугольников $3S4$, $4S5$, ..., $(N-1)SN$ и осуществляя их последовательный поворот вокруг предварительно совмещенной стороны этих треугольников, можно получить приближенную развертку поверхности α на плоскость β.

Для выполнения показанных на рис. 290 построений необходимо, чтобы плоскость, касательная к поверхности, касалась ее по прямой

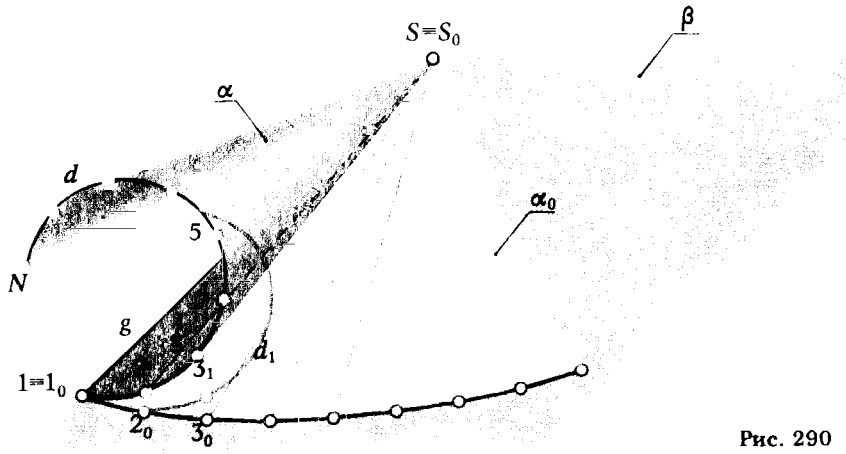


Рис. 290

образующей, которую принимаем за первоначальное положение оси вращения.

Если касательная плоскость касается поверхности в точках, принадлежащих линии, то такие точки называют параболическими (см. гл. V, § 46). При этом у торсовых поверхностей (конических, цилиндрических, с ребром возврата) линии, образованные параболическими точками, — прямые, которые можно принять за оси вращения (см. рис. 290). Поэтому ранее отмеченный признак для развертывающихся поверхностей может быть заменен следующим: *к развертывающимся поверхностям относятся поверхности, имеющие только параболические точки**.

Построение разверток имеет большое практическое значение, так как позволяет изготавливать разнообразные изделия из плоского (листового) материала путем его изгибания.

§ 63. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С позиции теории множеств поверхность и ее развертку следует рассматривать как два точечных множества.

Так как по определению развертка поверхности представляет собой плоскую фигуру, образованную из поверхности без разрывов и склеивания, то между отмеченными двумя множествами устанавливается взаимно-однозначное соответствие:

каждой точке (фигуре) на поверхности соответствует точка (фигура) на развертке и наоборот.

Фигура $1S2$, образованная подмножеством точек, принадлежащих поверхности α, конгруентна фигуре $1S2_0$, принадлежащей развертке α_0. Аналогично $\Delta\, 2S3 \subset \alpha \cong 2_0S3_0 \subset \alpha_0$ и т. д. Отсюда следует, что расстояние между точками 1 и 2 или любыми другими точками, взятыми на фигуре $1S2$, равно расстоянию между точками 1_0 и 2_0 фигуры 1_0S2_0. На основании этого можно сформулировать следующие свойства:

1. *Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой*, следствием чего является:

---

*К таким поверхностям относятся торсы, при этом особые точки, принадлежащие ребру возврата или вершине конической поверхности, во внимание не принимаются.

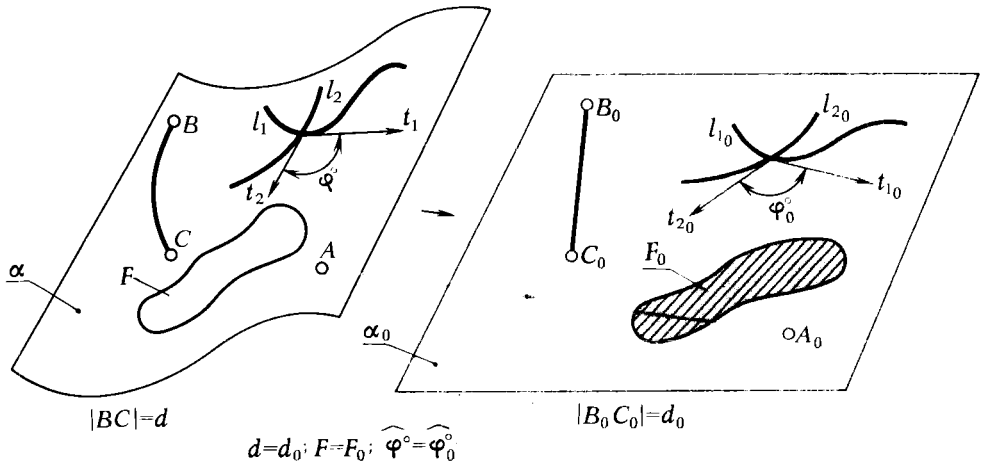


Рис. 291

замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

2. *Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке*.*

Рис. 291 дает наглядное представление о развертке как взаимнооднозначном преобразовании, сохраняющем равенство:

а) расстояний между точками;

б) углов между линиями;

в) площадей фигур.

Кроме перечисленных свойств, следует отметить также:

3. *Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке* (обратное утверждение не имеет смысла).

4. *Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке.*

5. *Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является геодезической**.*

§ 64. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

Развертка поверхности многогранников известна читателю из средней школы. Поэтому на этом вопросе мы останавливаемся кратко, только в плане повторения известных ранее сведений.

Под разверткой многогранной поверхности подразумевают плоскую фигуру, составленную из граней этой поверхности, совмещенных с одной плоскостью.

Существуют три способа построения развертки многогранных поверхностей:

1) способ нормального сечения;

---

* Геометрическое преобразование, при котором сохраняются величины углов, называется конформным, следовательно, построение разверток является конформным преобразованием, а поверхность и ее развертка конформны.

** Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и соединяющая кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

2) способ раскатки;

3) способ треугольников (триангуляции).

Первые два применяются для построения развертки призматических поверхностей, третий — для пирамидальных поверхностей. Рассмотрим каждый их этих способов.

1. Способ нормального сечения.

ПРИМЕР. Построить развертку наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$ (рис. 292).

РЕШЕНИЕ. Пересечем призму $ABCDEF$ плоскостью γ, перпендикулярной к боковым ребрам призмы. Построим сечение заданной призмы этой плоскостью — $\Delta 123$. Определим длины сторон $\Delta 123$. В свободном месте чертежа проведем прямую a (на рис. 292 прямая a проведена горизонтально). От произвольной точки 1_0, взятой на этой прямой, отложим отрезки $[1_0 2_0]$, $[2_0 3_0]$, $[3_0 1_0]$, конгруентные сторонам $\Delta 123$. Через точки 1_0, 2_0, 3_0, 1_0 проведем прямые, перпендикулярные к прямой a, и отложим на них от точек 1_0, 2_0, 3_0, 1_0 отрезки, конгруентные соответствующим длинам боковых ребер ($[1A]$, $[1D]$, $[2B]$, $[2E]$, ...). Полученные точки $A_0 B_0 C_0 A_0$ и $D_0\ E_0\ F_0\ D_0$ соединяем прямыми*. Плоская фигура $A_0 B_0 C_0 A_0 D_0 F_0 E_0 D_0$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы.

Чтобы получить полную развертку призмы, необходимо к развертке боковой поверхности пристроить основания призмы — $\Delta A_0 B_0 C_0$ и $\Delta D_0 E_0 F_0$, предварительно определив их неискаженные размеры.

---

*На рис. 292 ребра AD, BE и CF параллельны плоскости π_1, поэтому они проецируются на эту плоскость без искажения. Если ребра призмы занимают произвольное положение, то прежде чем приступить к построению развертки, следует с помощью способов преобразования перевести их в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции.

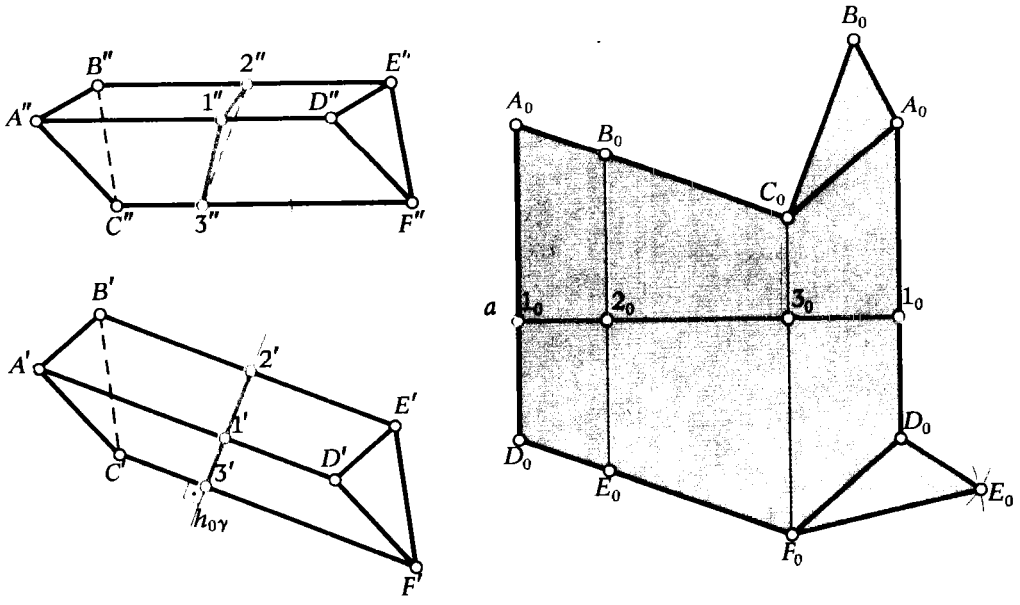


Рис. 292

2. Способ раскатки.

Этот способ целесообразно использовать для построения развертки поверхности призмы в том случае, когда основание призмы параллельно какой-либо одной плоскости проекции, а ее ребра параллельны другой плоскости проекции.

ПРИМЕР. Построить развертку боковой поверхности наклонной трехгранной призмы $ABCDEF$ (рис. 293).

РЕШЕНИЕ. Примем за плоскость развертки плоскость γ, проходящую через ребро AD, параллельную фронтальной плоскости проекции. Совместим грань $ADEB$ с плоскостью γ. Для этого мысленно разрежем боковую поверхность призмы по ребру AD, а затем осуществим поворот грани $ADEB$ вокруг ребра AD $(A''D'')$.

Для нахождения совмещенного с плоскостью γ положения ребра B_0E_0 из точки B'' проводим луч, перпендикулярный к $A''D''$, и засекаем на нем дугой радиуса $|A'B'|$, проведенной из центра A'', точку B_0. Через B_0 проводим прямую B_0E_0, параллельную $(A''D'')$.

Принимаем совмещенное положение ребра B_0E_0 за новую ось вращения и поворачиваем вокруг нее грань $BEFC$ до совмещения с плоскостью γ. Для этого из точки C'' проводим луч, перпендикулярный к совмещенному ребру B_0E_0, а из точки B_0 — дугу окружности радиусом, равным $|B'C'|$; пересечение дуги с лучом определит положение точки C_0. Через C_0 проводим C_0F_0 параллельно B_0E_0. Аналогично находим положение ребра A_0D_0. Соединив точки $A''B_0C_0A_0$ и $D''E_0F_0D_0$ прямыми, получим фигуру $A''B_0C_0A_0D_0F_0E_0D''$ — развертку боковой поверхности призмы. Для получения полной развертки призмы достаточно к какому-либо из звеньев ломаной линии $A''B_0C_0A_0$ и $D''E_0F_0D_0$ пристроить треугольники основания $A_0B_0C_0$ и $D_0E_0F_0$.

3. Способ треугольников (триангуляции).

ПРИМЕР. Построить развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$ (рис. 294).

Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды.

На рис. 294 определение длин ребер пирамиды выполнено с помощью вращения их вокруг оси $i \ni S$ и $i \perp \pi_1$. Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью γ плоскость $\gamma \parallel \pi_2$ и $\gamma \supset i$. После того как определены длины ребер $|S''A_2|$, $|S''B_2|$, $|S''C_2|$, приступаем к пост-

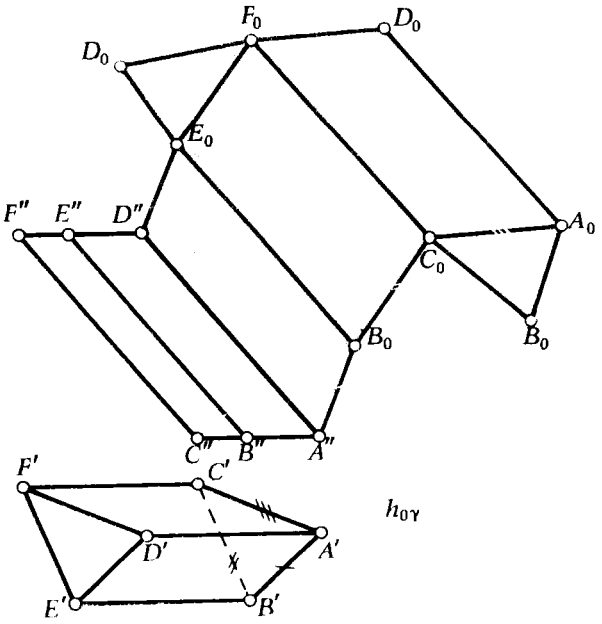


Рис. 293

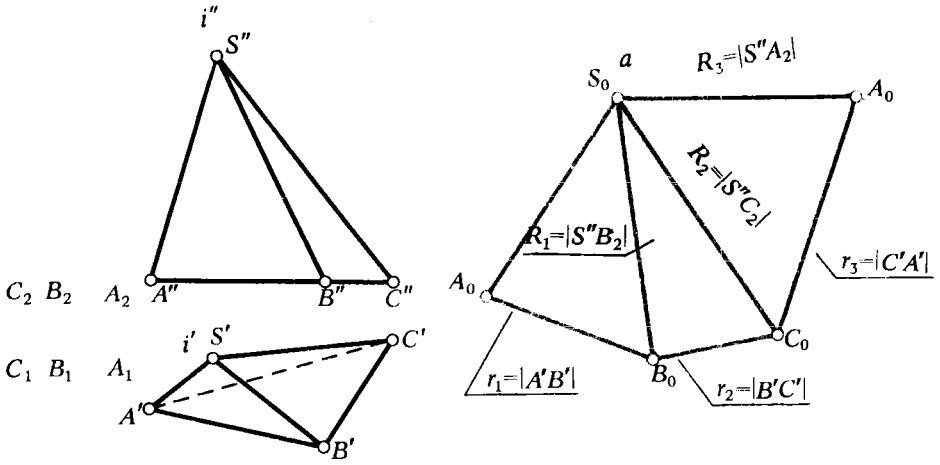


Рис. 294

роению развертки. Для этого через произвольную точку S_0 проводим прямую a. Откладываем на ней от точки S_0 [S_0A_0] $\cong$ $\cong$ [$S''A_2$]. Из точки A_0 проводим дугу радиусом $r_1 = |A'B'|$, а из точки S_0 — дугу радиусом $R_1 = |S''B_2|$. Пересечение дуг укажет положение вершины B_0 $\Delta S_0A_0B_0$ ($\Delta S_0A_0B_0 \cong \Delta SAB$ — грани пирамиды). Аналогично находятся точки C_0 и A_0. Соединив точки $A_0B_0C_0A_0$, получим развертку боковой поверхности пирамиды $SABC$.

§ 65. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАЗВЕРТОК РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Мы уже указывали, что к развертывающимся поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности).

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это объясняется тем, что при развертке поверхности последнюю аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности всегда приходится производить разгибание или спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что неизбежно приводит к потере точности.

Рассмотрим способы построения приближенных разверток поверхностей: цилиндрической, конической и с ребром возврата.

А. Построение развертки цилиндрической поверхности.

Для построения развертки цилиндрической поверхности используются те же способы нормального сечения и раскатки, которые применяются при развертывании боковой поверхности призмы.

В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют призматической поверхностью, вписанной (или описанной) в данную цилиндрическую. Затем задачу решают так же, как это было показано в примерах 1 и 2 предыдущего параграфа. На рис. 295 и 296 показано построение боковой поверхности цилиндра способом нормального сечения (рис. 295) и способом раскатки (рис. 296).

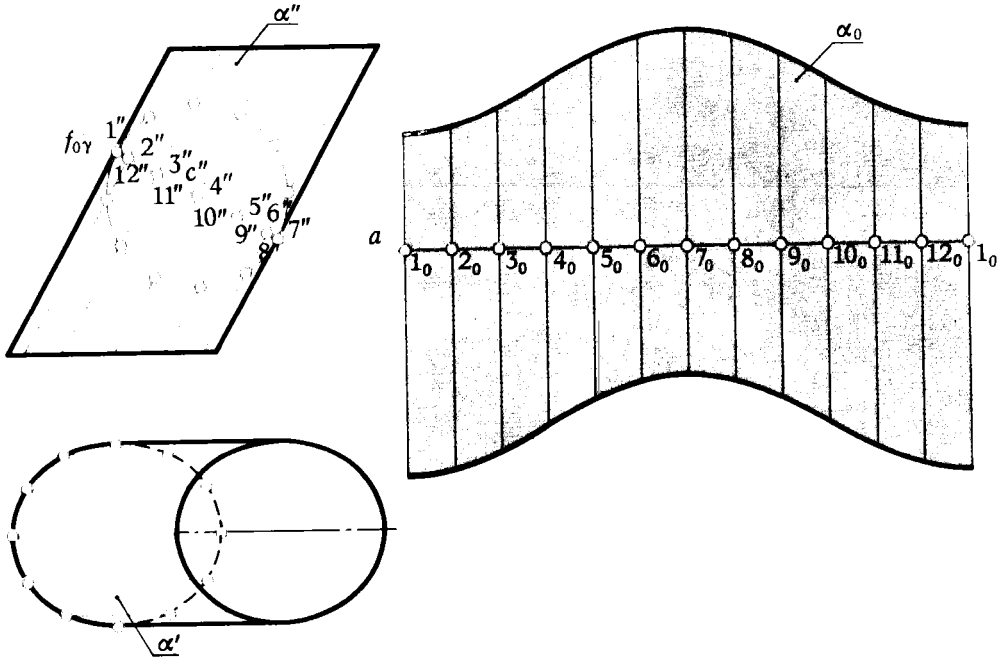


Рис. 295

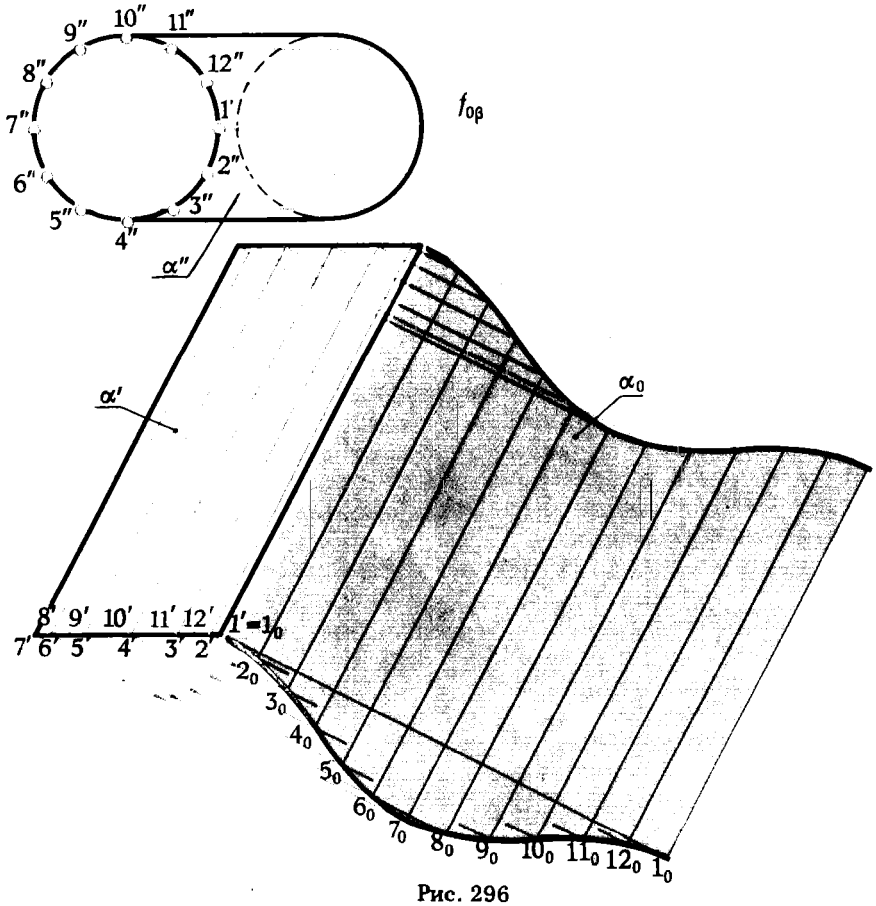


Рис. 296

При построении развертки поверхности цилиндра вращения предпочтение следует отдать способу нормального сечения, так как в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

Для того чтобы построить развертку поверхности прямого кругового цилиндра, выполняем следующие геометрические построения:

1. Рассекаем цилиндрическую поверхность α плоскостью γ, перпендикулярной к прямолинейной образующей цилиндрической поверхности.

2. Делим окружность c — линию сечения $\alpha \cap \gamma$ на одинаковое число частей n.

3. Проводим в свободном месте чертежа прямую a и отмечаем на ней отрезок $1_0 1_0$, равный длине окружности сечения c.

4. Делим $[1_0 1_0]$ на такое же число одинаковых частей n, на которое была разделена окружность c.

5. Через точки деления 1_0, 2_0, 3_0, ..., 12_0, 1_0 проводим прямые, перпендикулярные к прямой a, и откладываем на них от точек 1_0, 2_0, 3_0, ..., 12_0, 1_0 отрезки, равные длине соответствующих образующих нижней и верхней частей цилиндрической поверхности.

6. Соединив концы образующих плавной кривой, получим развертку цилиндрической поверхности.

На рис. 296 приведен пример построения развертки боковой поверхности эллиптического цилиндра способом раскатки. Необходимые геометрические построения выполняем в следующем порядке:

1. Делим окружность основания цилиндра на n равных частей (на рис. 296 $n = 12$).

2. Через точки деления проводим прямолинейные образующие цилиндрической поверхности — ребра призмы, которой мы заменяем цилиндрическую поверхность α.

3. Принимаем за плоскость развертки горизонтальную плоскость β, проходящую через ребро 1 призмы, тождественное 1-й образующей цилиндрической поверхности.

Дальнейшие построения аналогичны выполненным на рис. 293 при построении развертки боковой поверхности призмы $ABCDEF$.

Б. Построение развертки конической поверхности.

Задача на построение развертки конической поверхности решается так же, как в случае построения развертки боковой поверхности пирамиды — способом треугольников (см. рис. 294). Для этого коническая поверхность аппроксимируется вписанной в нее пирамидальной поверхностью.

На рис. 297 показана развертка поверхности пирамиды $SABCDEF...$, вписанной в заданную коническую поверхность α. Фигуру $S_0A_0B_0C_0D_0E_0F_0 ... A_0$ принимаем за приближенную развертку конической поверхности. Чем больше число граней у вписанной пирамиды, тем меньше будет разница между действительной и приближенной развертками конической поверхности.

Если задана поверхность прямого кругового конуса (рис. 298), то развертка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности $l = |SA|$, а центральный угол $\hat{\varphi}^\circ = 2\pi r/l$, где r — радиус окружности основания конуса. Величина угла φ получается в радианах. На практике бывает целесообразно иметь его градусную величину. Это легко сделать, подставив в приведенное равенство значение величины l, выраженное через радиус основания конуса r и угол наклона образующей коничес-

кой поверхности к плоскости π_1 ($\angle\,\psi^\circ$). В этом случае $l = r/\cos\psi^\circ$, тогда $\hat{\varphi}^\circ = 2\pi r\cos\psi^\circ/r = 360^\circ\cos\psi^\circ$.

На рис. 299 показано построение развертки поверхности прямого кругового усеченного конуса, вершина которого находится за пределами поля чертежа.

Решение этой задачи осуществляется следующим путем:

1) строим вспомогательный конус β, подобный данному конусу α, диаметр d основания конуса β следует выбирать так, чтобы отношение D/d (где D — диаметр окружности основания конуса α) выражалось целым числом (на рис. 299 оно равно 2);

2) строим развертку боковой поверхности вспомогательного конуса β — $S_0A_0l_02_0 \ldots 5_0A_0$;

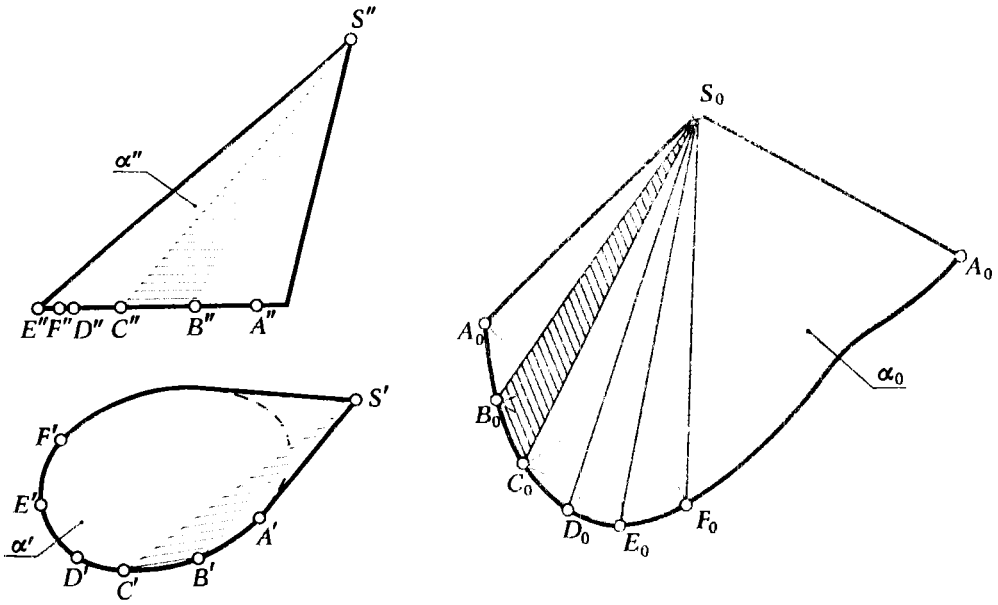


Рис. 297

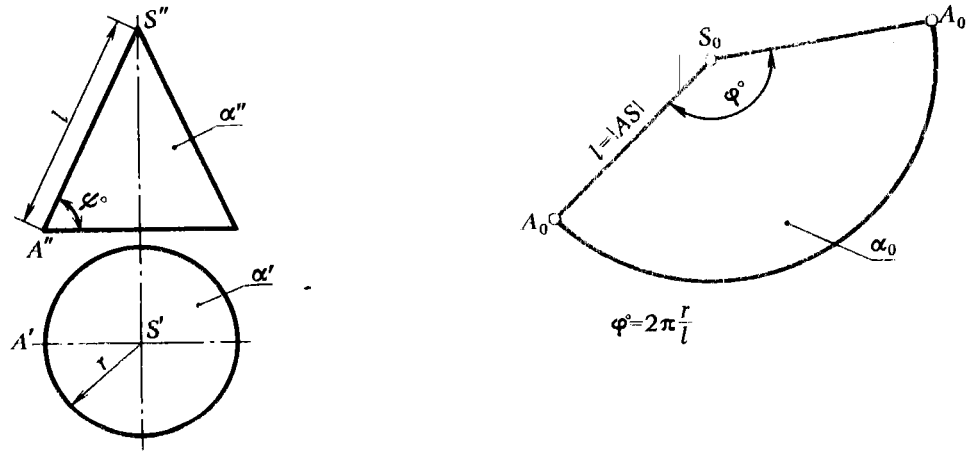


Рис. 298

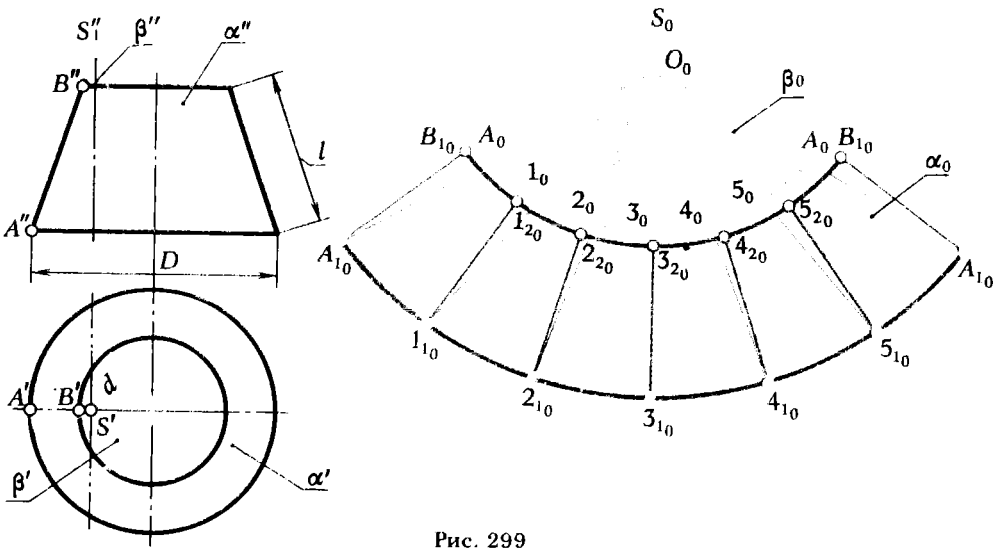


Рис. 299

3) из произвольной точки O_0, принадлежащей биссектрисе угла $A_0S_0A_0$, проводим лучи $[O_0A_0)$, $[O_01_0)$, $[O_02_0)$, ..., $[O_0A_0)$ и на них откладываем отрезки $[O_0A_{1_0}] = k[O_0A_0]$, $[O_01_{1_0}] = k[O_01_0]$, $[O_02_{1_0}] = k[O_02_0]$, ..., $[O_0A_{1_0}] = k[O_0A_0]$, где $k = D/d = 2$.

Для построения развертки поверхности α достаточно определить положение точки A_{1_0} и через нее провести дугу окружности радиусом, равным длине отрезка $[O_0A_{1_0}]$ из центра в точке O_0. Эта окружность пересечет лучи $[O_01_0)$, $[O_02_0)$, ... в точках 1_{1_0}, 2_{1_0}, ... Из точек A_{1_0}, 1_{1_0}, 2_{1_0}, ... проводим прямые $(A_{1_0}B_{1_0})$, $(1_{1_0}1_{2_0})$, $(2_{1_0}2_{2_0})$, параллельные соответствующим прямым (A_0S_0), (1_0S_0), (2_0S_0), ..., и на них откладываем отрезки $[A_{1_0}B_{1_0}]$, $[1_{1_0}1_{2_0}]$, $[2_{1_0}2_{2_0}]$, ..., равные l — длине образующей AB усеченного конуса α.

В. Построение развертки поверхности с ребром возврата.

Построение развертки поверхности с ребром возврата осуществляется путем аппроксимации ее отсеками конической поверхности с последующей заменой их плоскими треугольниками. В качестве иллюстрации решения такой задачи обратимся к следующему примеру:

пусть на эпюре Монжа заданы проекции поверхности с ребром возврата α; построить ее развертку (рис. 300).

На ребре возврата d отмечаем ряд точек *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и через их проекции проводим касательные к проекциям d' и d'' — $[11_1]$, $[22_1]$, $[33_1]$, $[44_1]$, $[55_1]$. В отсеках поверхностей, ограниченных этими касательными, проводим диагонали 21_1, 32_1, ..., которые делят каждый из криволинейных четырехугольников на два "треугольника".

Если расстояния между точками *1* и *2*, *2* и *3*, *3* и *4*, *4* и *5* будут достаточно малыми, то стороны "треугольников", противолежащие вершинам 1_1, 2_1, 3_1, 4_1 (и 1_{1_0}, 2_{1_0}, 3_{1_0}, 4_{1_0}), можно считать прямолинейными.

Для построения развертки многогранной поверхности, аппроксимирующей заданную поверхность α, определяем длины сторон этих треугольников. По трем сторонам строим треугольники, начиная с $\Delta\, 1_02_01_{1_0}$, к которому пристраиваем остальные в последовательности, указанной на рис. 300 римскими цифрами. Фигура $1_02_03_04_05_05_{1_0}4_{1_0}3_{1_0}2_{1_0}1_{1_0}$ — приближенная развертка поверхности α.

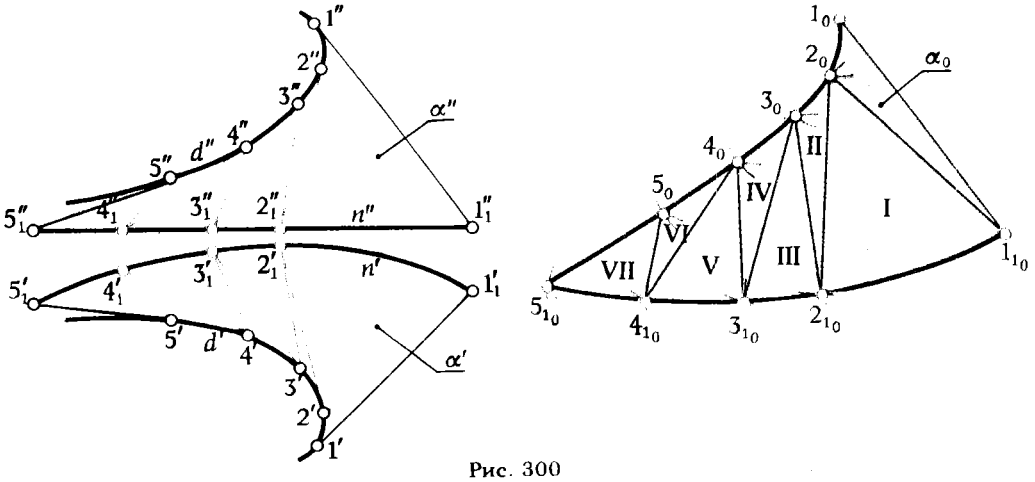


Рис. 300

§ 66. УСЛОВНАЯ РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

В двух предыдущих параграфах было показано построение разверток гранных и торсовых поверхностей. Все остальные поверхности относятся к неразвертываемым — они не могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и склеивания, т. е. теоретически неразвертываемые поверхности не имеют своей развертки. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить лишь об условном решении задачи по построению разверток неразвертываемых поверхностей.

При необходимости изготовить из листового материала неразвертываемую поверхность приходится кроме изгибания осуществлять также сжатие и растяжение определенных участков листа.

Общий прием решения задачи на построение условной развертки неразвертываемой поверхности состоит в том, что отсеки заданной поверхности аппроксимируются отсеками развертывающихся поверхностей — гранными, цилиндрическими или коническими.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы построения условных разверток.

Допустим, что требуется изготовить из листового материала поверхность цилиндроида α, сопрягающего две трубы одинакового диаметра (рис. 301). Решение сводится к следующему: заданную неразвертываемую поверхность цилиндроида аппроксимируем вписанными в нее отсеками конической поверхности, которые, в свою очередь, заменяем треугольниками.

Чтобы заменить поверхность цилиндроида отсеками конических поверхностей, проводим на поверхности цилиндроида семейство прямолинейных образующих, параллельных плоскости параллелизма. В рассматриваемом случае плоскостью параллелизма служит фронтальная плоскость проекции. На участке поверхности, заключенной между двумя смежными образующими *1A* и *2B*, проводим "диагональ" *2A*, полученные отсеки поверхности *1A2* и *A2B* принимаем за плоские треугольники. Также поступаем и со всеми остальными отсеками поверхности цилиндроида, заключенными между образующими. После этого осуществляем построение развертки многогранной поверхности, составленной из треугольников так же, как это было сделано на рис. 297.

Точки 1_0, 2_0, ... и A_0, B_0, ... соединяем плавными кривыми. На рис. 301 показана только половина развертки — вторая половина симметрична ей относительно прямой $N_0 n_0$.

При построении условных разверток поверхностей вращения можно в качестве вспомогательных (аппроксимирующих) поверхностей использовать развертывающиеся цилиндрические и конические поверхности.

Рис. 302 и 303 дают наглядное представление о графическом способе построения условной развертки с помощью этих поверхностей. На рис. 302 показана произвольная поверхность вращения α, состоящая из кусков α_1, α_2, α_3, ..., границами между которыми служат меридианы поверхности α.

Куски α_1, α_2, α_3, ... неразвертывающейся поверхности α заменяем кусками цилиндрических поверхностей β_1, β_2, β_3, ... (на рис. 302 указан только один кусок – отсек β_1). После этого осуществляем развертку составной цилиндрической поверхности $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 ...$

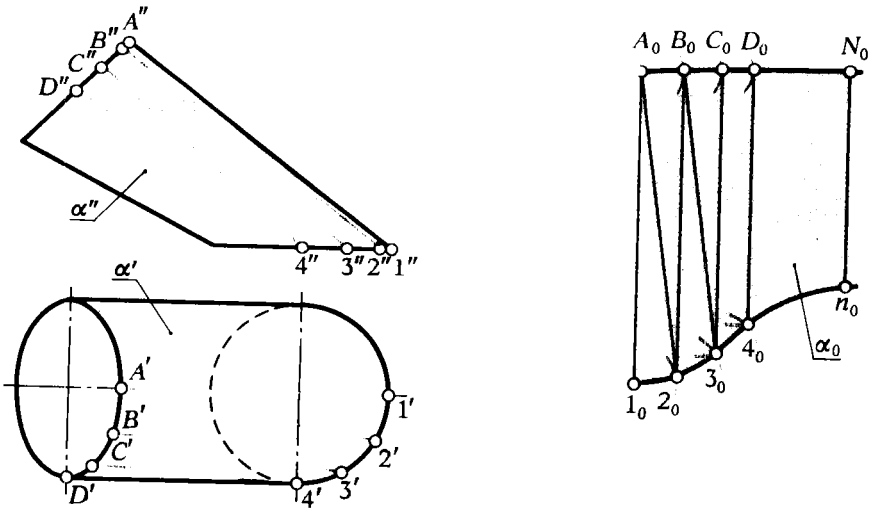
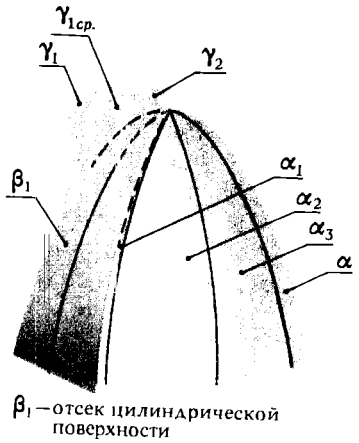
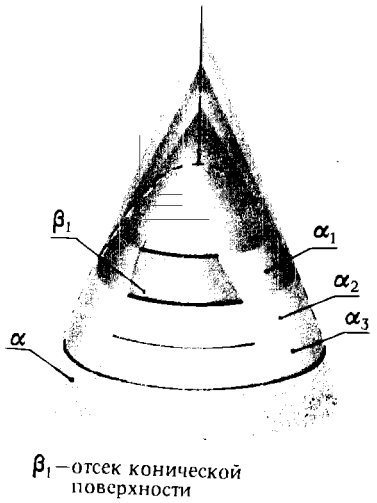


Рис. 301



β_1 – отсек цилиндрической поверхности

Рис. 302



β_1 – отсек конической поверхности

Рис. 303

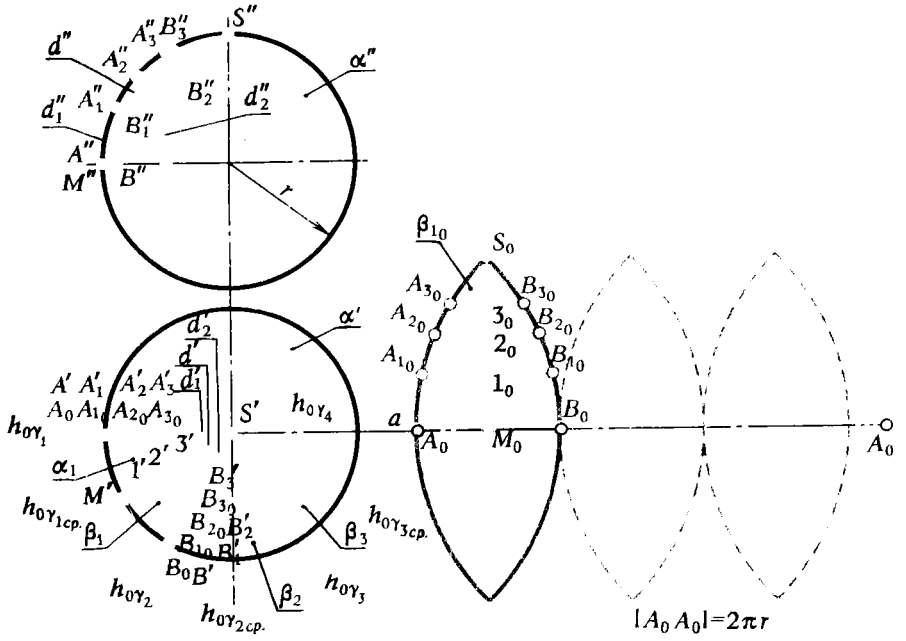


Рис. 304

На рис. 303 показан пример перехода от произвольной поверхности вращения α к поверхности β, составленной из отсеков конических поверхностей β_1, β_2, β_3, ..., которыми заменяются куски α_1, α_2, α_3, ... поверхности α; границами между этими кусками являются параллели поверхности α (на рис. 303 показан только один отсек β_1).

Развертка отсеков конических поверхностей β_j осуществляется по способу, изложенному на с. 204, рис. 299.

В качестве примера использования цилиндрической поверхности для построения условной развертки построим развертку поверхности сферы (рис. 304).

Для ее построения пересекаем поверхность сферы горизонтально проецирующими плоскостями γ_1, γ_2, γ_3, ..., проходящими через центр сферы. Куски сферической поверхности α_1, α_2, α_3, ..., заключенные между меридиональными сечениями $h_{0\gamma_1} - h_{0\gamma_2}$, $h_{0\gamma_2} - h_{0\gamma_3}$, $h_{0\gamma_3} - h_{0\gamma_4}$, заменяем кусками цилиндрических поверхностей β_1, β_2, β_3, прямолинейные образующие которых перпендикулярны к плоскости средних меридиональных сечений $h_{0\gamma_{1ср}}$, $h_{0\gamma_{2ср}}$, $h_{0\gamma_{3ср}}$, ...

Длина образующих, в которые преобразуются дуги параллелей поверхности вращения, определяется отрезками прямых, заключенных между соседними меридиональными плоскостями $\widehat{AB} \to [A_0B_0]$.

Чтобы построить развертку куска цилиндрической поверхности β_1, аппроксимирующего участок сферы α_1, проводим горизонтальную прямую a. На ней откладываем $[A_0B_0]$. Через середину этого отрезка проводим вертикальную прямую, на которой откладываем спрямленное меридиональное сечение (на рис. 304 показана только его половина) и отмечаем на нем точки пересечения с параллелями сферы (M_0, 1_0, 2_0, 3_0). Через точки M_0, 1_0, 2_0, 3_0 проводим горизонтальные прямые и откладываем на них по обе стороны от вертикали M_0S_0 отрезки,

равные половине длин касательных, проведенных в точках M', $1'$, $2'$, $3'$ и заключенных между следами плоскостей $h_{0\gamma_1}$ и $h_{0\gamma_2}$.

Полученные точки A_0, A_{1_0}, A_{2_0}, A_{3_0} и B_0, B_{1_0}, B_{2_0}, B_{3_0} соединяем плавными кривыми. Фигура $A_0S_0B_0$ — условная развертка половины участка сферической поверхности α_1. Пристроив к ней другую половину, расположенную симметрично относительно прямой a, получим развертку β_{1_0} участка α_1. Для получения развертки всей сферической поверхности необходимо к участку β_{1_0} пристроить n (в нашем случае пять) фигур β_{2_0}, β_{3_0}, β_{4_0}, β_{5_0}, β_{6_0}, конгруентных фигуре β_{1_0}.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется разверткой поверхности?
2. Какие поверхности относятся к развертывающимся?
3. Перечислите свойства поверхности, которые сохраняются на ее развертке.
4. Назовите способы построения разверток и сформулируйте содержание каждого из них.
5. В каких случаях для построения развертки используются способы: нормального сечения, раскатки, треугольников?
6. В чем состоит общий прием решения задачи на построение условной развертки неразвертываемых поверхностей?
7. Сформулируйте и дайте подробное объяснение способов построения условной развертки.
8. Как можно построить развертку усеченной конической поверхности с недоступной вершиной?
9. Какой способ целесообразно использовать для построения условной развертки поверхности сферы?

ГЛАВА VIII

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотренные в предыдущих главах ортогональные проекции находят широкое распространение в технике при составлении чертежей. Это объясняется тем, что выполнение чертежей с помощью ортогональных проекций достаточно просто, при этом можно получить проекции, сохраняющие метрические характеристики оригинала. С помощью чертежей, построенных в ортогональных проекциях, если их дополнить вспомогательными изображениями — видами, разрезами и сечениями, можно получить представление о форме изображаемого предмета (как о внешнем виде, так и о внутреннем строении) и его размерах.

Наряду с отмеченными достоинствами метод ортогонального проецирования имеет существенный недостаток. Для того чтобы получить представление о пространственном геометрическом образе, заданном его ортогональными проекциями, приходится одновременно рассматривать две, три, а иногда и больше проекций, что значительно затрудняет мысленное воспроизведение геометрической фигуры по ее проекциям.

В ряде случаев бывает необходимо наряду с чертежом геометрической фигуры, выполненным в ортогональных проекциях, иметь ее наглядное изображение. Такое изображение может быть получено путем проецирования оригинала на специально выбранную плоскость. Мы знаем, что одна центральная или параллельная проекция на одну плоскость проекции не определяет положения фигуры в пространстве и не позволяет установить ее форму. Чтобы устранить эту неопределенность и получить обратимый чертеж (чертеж, обеспечивающий взаимную однозначность между точками, принадлежащими проецируемой фигуре и ее проекции), необходимо иметь не одну, а две ее проекции.

Получить две взаимосвязанные проекции одной фигуры на одну плоскость можно следующим путем: пусть в пространстве задан отрезок $[AB]$ (рис. 305); чтобы получить параллельные проекции этого отрезка на произвольную плоскость α*, по которым можно определить расположение заданной фигуры в пространстве, следует взять какую-либо плоскость γ и найти на ней ортогональную проекцию заданной фигуры (отрезка). Затем надо спроецировать отрезок $[AB]$ и его ортогональную проекцию $[A'B']$ на плоскость α в направлении s. При таком способе проецирования каждой точке пространства соответствуют две ее проекции на плоскости α.

---

* Плоскость α называют картинной плоскостью.

В качестве плоскости γ можно взять не произвольную плоскость, а одну из координатных плоскостей, например xOy. Если теперь спроецировать координатные оси $Oxyz$ и горизонтальную проекцию A' точки A совместно с самой точкой A на плоскость α, то мы получим в плоскости α чертеж, который называют аксонометрическим, при этом проекцию точки A – A^0 называют аксонометрической (иногда главной) проекцией точки A, а точку A^{10} – вторичной проекцией точки A (рис. 306).

Таким образом, в аксонометрии имеются два поля проекций: поле главных и поле вторичных проекций. В этом отношении аксонометрические проекции не имеют принципиального отличия от ортогональных проекций.

Для того чтобы на аксонометрических проекциях можно было решать метрические задачи отнюсительно изображенных геометрических фигур, на аксонометрическом чертеже указывают проекции координатных осей с изображенными на них отрезками e^0_{x0}, e^0_{y0}, e^0_{z0} — проекциями *натурального масштаба* e. Проекции e^0_{x0}, e^0_{y0}, e^0_{z0} натурального масштаба e_x, e_y, e_z называют *аксонометрическим масштабом* по осям x^0, y^0, z^0.

Положение точки A в пространстве относительно натуральной системы координат $Oxyz$ определяется пространственной координатной ломаной $OA_xA'A$ (рис. 306). Аксонометрическая проекция A^0 точки A определяется плоской координатной ломаной $O^0A^0_{x0}A^{10}A^0$, у которой звено $O^0A^0_{x0}$ совпадает по направлению с осью x^0, а $A^0_{x0}A^{10}$ и $A^{10}A^0$ параллельны соответственно осям y^0 и z^0.

В общем случае отрезки $O^0A^0_{x0}$, $A^0_{x0}A^{10}$, $A^{10}A^0$ не равны между собой и ни один из них не равен натуральному масштабу e. Отношения $k_{x^0} = \dfrac{O^0A^0_{x0}}{OA_x}$; $k_{y^0} = \dfrac{A^0_{x0}A^{10}}{A_xA'}$; $k_{z^0} = \dfrac{A^{10}A^0}{A'A}$ называют показателями (коэффициентами) искажений по аксонометрическим осям.

Очевидно, принимая различное взаимное расположение натуральной системы координат и картинной плоскости и задавая разные направления проецирования, можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга как направлением аксонометри-

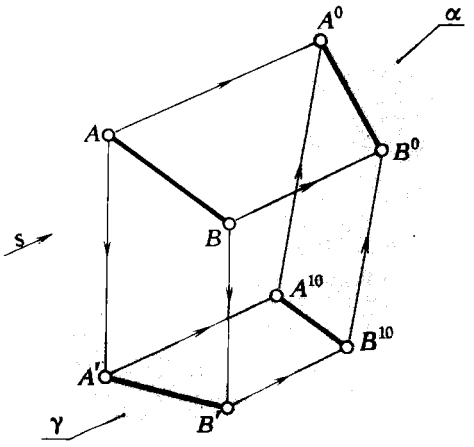


Рис. 305

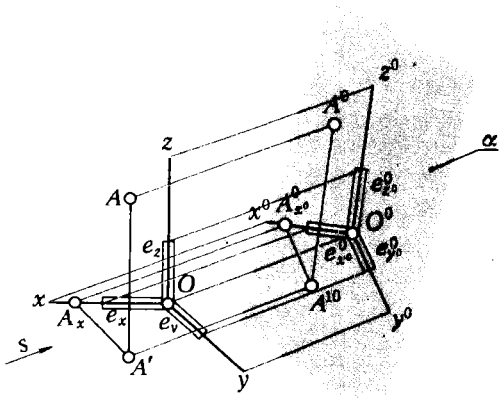


Рис. 306

ческих осей, так и величиной коэффициентов искажения вдоль этих осей. Справедливость этого утверждения была доказана немецким геометром Карлом Польке. Теорема Польке утверждает, *что три отрезка произвольной длины, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.*

На основании этой теоремы аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним могут выбираться произвольно. При этом коэффициенты искажения по аксонометрическим осям можно принять: различными для всех аксонометрических осей ($k_{x^0} \neq k_{y^0} \neq k_{z^0}$); одинаковыми для каких-либо двух осей (например, $k_{x^0} = k_{y^0}$); равными для всех аксонометрических осей ($k_{x^0} = k_{y^0} = k_{z^0}$). В первом случае аксонометрическую проекцию называют *триметрической*, во втором — *диметрической* и в третьем — *изометрической*.

В зависимости от угла между направлением проецирования и картинной плоскостью аксонометрия может быть *прямоугольной* (ортогональной), если этот угол прямой; в противном случае ее считают *косоугольной*.

§ 67. СТАНДАРТНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В инженерной практике, в частности в машиностроении, наибольшее распространение получили прямоугольные диметрические и изометрические проекции. Отметим некоторые свойства этих проекций.

1. **Зависимость коэффициентов искажения по аксонометрическим осям от направления проецирования.**

Установление зависимости между коэффициентами искажения и направлением проецирования представляет определенный практический интерес.

Картинная плоскость пересекает координатные оси в точках $X_\alpha \equiv X^0_\alpha$, $Y_\alpha \equiv Y^0_\alpha$, $Z_\alpha \equiv Z^0_\alpha$, а плоскости проекций по прямым $X_\alpha Y_\alpha$, $X_\alpha Z_\alpha$, $Y_\alpha Z_\alpha$. Точки X_α, Y_α, Z_α определяют треугольник, называемый *треугольником следов* (рис. 307). Очевидно, $\Delta X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha \equiv \Delta X^0_\alpha Y^0_\alpha Z^0_\alpha$.

Опустим из начала координат O перпендикуляр на плоскость α. Точка O^0, в которой этот перпендикуляр пересекает плоскость α, является прямоугольной проекцией точки O. Отрезки $O^0X^0_\alpha$, $O^0Y^0_\alpha$ и $O^0Z^0_\alpha$ — прямоугольные аксонометрические проекции отрезков координатных осей OX_α, OY_α, OZ_α. Треугольники $OO^0X^0_\alpha$, $OO^0Y^0_\alpha$, $OO^0Z^0_\alpha$ — прямоугольные, отрезки $O^0X^0_\alpha$, $O^0Y^0_\alpha$, $O^0Z^0_\alpha$ — их катеты, а отрезки OX^0_α, OY^0_α, OZ^0_α — гипотенузы этих треугольников. Отсюда

$$\frac{O^0X^0_\alpha}{OX^0_\alpha} = \cos\alpha^\circ, \quad \frac{O^0Y^0_\alpha}{OY^0_\alpha} = \cos\beta^\circ, \quad \frac{O^0Z^0_\alpha}{OZ^0_\alpha} = \cos\gamma^\circ,$$

где α°, β°, γ° — углы наклона осей x, y, z к картинной плоскости.

Так как $\frac{O^0X^0_\alpha}{OX^0_\alpha} = k_{x^0}$, $\frac{O^0Y^0_\alpha}{OY^0_\alpha} = k_{y^0}$, $\frac{O^0Z^0_\alpha}{OZ^0_\alpha} = k_{z^0}$, то $k_{x^0} = \cos\alpha^\circ$, $k_{y^0} = \cos\beta^\circ$, $k_{z^0} = \cos\gamma^\circ$.

В прямоугольной аксонометрии коэффициенты искажения связаны зависимостью $k^2_{x^0} + k^2_{y^0} + k^2_{z^0} = 2$.

Изометрическая проекция. В прямоугольной изометрической проекции коэффициенты искажения по всем осям одинаковы:

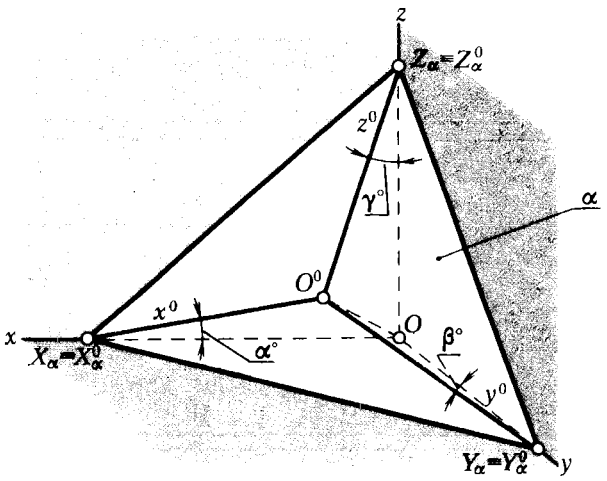


Рис. 307

$$k_{x^0}^2 = k_{y^0}^2 = k_{z^0}^2 = 2, \text{ т. е. } 3k^2 = 2,\ k = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

следовательно, коэффициенты искажения по осям x^0, y^0, z^0 равны 0,82.

Изометрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения (т. е. коэффициент искажения $k = 1$), что соответствует увеличению линейных размеров изображения по сравнению с действительными в 1,22 раза ($1/0{,}82 \approx 1{,}22$).

Диметрическая проекция. Для прямоугольной диметрической проекции характерно равенство коэффициентов искажения по двум осям $k_{x^0} = k_{z^0}$; коэффициент искажения по третьей оси $k_{y^0} = \frac{1}{2} k_{x^0}$ (или $k_{y^0} = \frac{1}{2} k_{z^0}$). Поэтому $2k^2 + \frac{k^2}{4} = 2$, $k^2 = \frac{8}{9}$, $k = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}94$, т. е. коэффициент искажения по осям x^0 и z^0 равен 0,94, а по оси y^0 — 0,47. Диметрическую проекцию, как и изометрию, выполняют, как правило, без искажения по осям x^0 и y^0 и с искажением $k_{y^0} = 0{,}5$ по оси y^0. В этом случае увеличение линейных размеров изображения по сравнению с действительными происходит в $1/0{,}94 = 1{,}06$ раза.

2. Определение углов между осями стандартных аксонометрических проекций.

Изометрическая проекция. Для прямоугольной (ортогональной) аксонометрии справедливо следующее утверждение: *коэффициенты искажения по аксонометрическим осям равны косинусам углов наклона координатных осей к картинной плоскости* (доказательство см. п. 1). Так как для изометрии $k_{x^0} = k_{y^0} = k_{z^0} = 1$, то отрезки $O^0 X_\alpha^0 = O^0 Y_\alpha^0 = O^0 Z_\alpha^0$. Это, в свою очередь, означает, что в прямоугольной аксонометрии треугольник следов равносторонний.

В теории ортогональных аксонометрических проекций доказывается, что аксонометрические оси являются высотами треугольника следов. Из элементарной геометрии известно, что в равностороннем треугольнике высоты попарно пересекаются между собой под углом в 120°. Поэтому совпадающие с ними аксонометрические оси в ортогональной изометрии образуют между собой углы в 120°. Обычно ось z^0 принимают вертикальной (рис. 308).

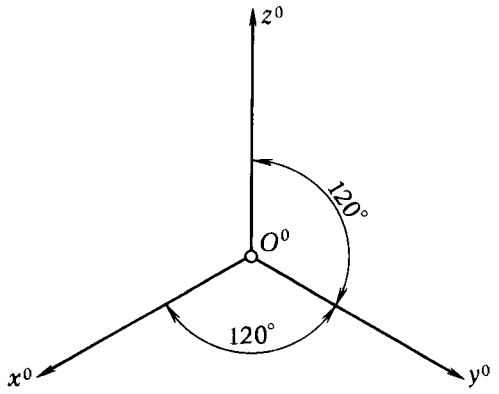


Рис. 308

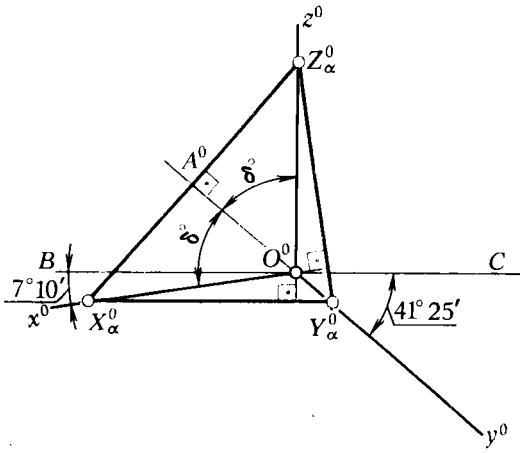


Рис. 309

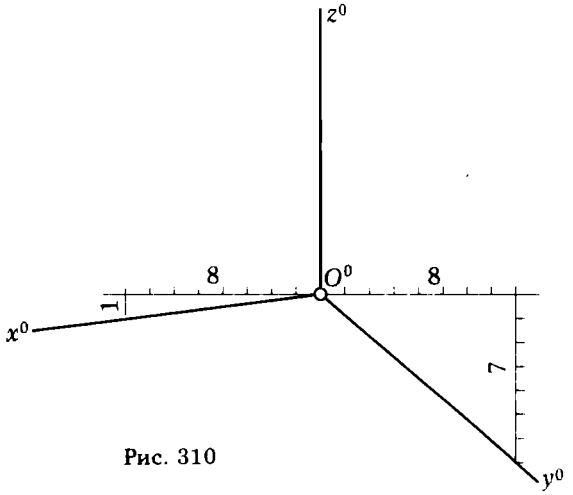


Рис. 310

Диметрическая проекция. Для диметрической проекции характерно равенство двух коэффициентов искажения по осям x^0 и z^0, коэффициент искажения по третьей оси равен их половине:

$$k_{x^0} = k_{z^0} = 2k_{y^0}.$$

Равенство $k_{x^0} = k_{z^0}$ обеспечивает конгруентность отрезков $O^0X_\alpha^0 = O^0Z_\alpha^0$, т. е. треугольник следов — равнобедренный (рис. 309). В этом треугольнике высота $Y_\alpha^0A^0$, совпадающая с направлением аксонометрической оси y^0, делит пополам сторону $X_\alpha^0Z_\alpha^0$; $|X_\alpha^0A^0| = |A^0Z_\alpha^0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Приняв $|O^0X_\alpha^0| = |O^0Z_\alpha^0| = 1$, имеем $X_\alpha^0Z_\alpha^0 = \sqrt{2}$. Из $\Delta\, O^0A^0Z_\alpha^0$ определяем $\sin\delta^\circ$:

$$\sin\delta^\circ = \frac{Z_\alpha^0A^0}{O^0Z^0} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}75,$$

что соответствует равенству угла $\hat{\delta}^\circ = 48^\circ 35'$. Тогда

$$\angle X_\alpha^0O^0Z_\alpha^0 = 2\angle\delta^\circ = 97^\circ 10'.$$

Обычно при построении диметрических проекций ось z^0 располагают вертикально. Тогда треугольник следов и его высоты (аксонометрические оси) займут положение, показанное на рис. 309. В этом случае

$$\widehat{BO^0X^0_\alpha} = (\widehat{2\delta}^\circ - 90^\circ) = (97^\circ 10' - 90^\circ) = 7^\circ 10';$$

$$\widehat{BO^0A^0} = \widehat{CO^0Y^0_\alpha} = (\widehat{\delta}^\circ - 7^\circ 10') = (48^\circ 35' - 7^\circ 10') = 41^\circ 25'.$$

Приближенно аксонометрические оси стандартной диметрии можно построить, если принять $\operatorname{tg} 7^\circ 10' \approx 1/8$, а $\operatorname{tg} 41^\circ 25' = 7/8$. Тогда аксонометрические оси x^0 и y^0 проводят так, как это показано на рис. 310. Ось y^0 может быть проведена так же, как продолжение биссектрисы $\angle x^0 O^0 z^0$.

§ 68. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

При построении аксонометрических проекций пользоваться коэффициентами искажения неудобно. Поэтому обычно строят рекомендованные ГОСТ 2.317—69 (СТ СЭВ 1979—79) стандартные прямоугольные изометрию и диметрию, принимая соответствующие масштабы увеличения в 1,22 раза для изометрии и в 1,06 раза для диметрии. Введение этих масштабов позволяет строить аксонометрические проекции без сокращения размеров, откладываемых по аксонометрическим осям. Для диметрической проекции размеры по оси y^0 сокращают вдвое.

А. Построение аксонометрических проекций геометрических фигур, ограниченных отрезками прямых и отсеками плоскостей.

При параллельном проецировании на плоскость прямые проецируются в прямые (см. § 6, **1а**), следовательно, для построения аксонометрического изображения прямой a достаточно определить аксонометрические проекции двух принадлежащих ей точек, которые однозначно определяют прямую a^0 — аксонометрическую проекцию прямой a.

Построение аксонометрических проекций многогранников, в частном случае многоугольников, сводится к определению аксонометрических проекций их вершин, которые затем соединяют между собой отрезками прямых линий.

На рис. 311, *б* показано построение стандартной изометрической проекции шестигранной пирамиды, ортогональные проекции которой заданы на рис. 311, *а*. Построение выполняем в следующей последовательности: проводим прямые x, y, z, которые принимаем за оси натуральной системы координат; за начало координат принимаем точку O (O', O''). Затем проводим аксонометрические оси x^0, y^0, z^0. Измерив на ортогональном чертеже натуральные координаты вершин основания пирамиды (точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*) и ее вершины (точка S), строим их аксонометрические проекции (точки 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, S^0). Чтобы получить изометрическую проекцию пирамиды, соединяем полученные точки отрезками прямых линий в той же последовательности, в какой они соединены на ортогональных проекциях.

Б. Построение аксонометрических проекций геометрических фигур, ограниченных кривыми линиями и поверхностями.

В общем случае аксонометрической проекцией кривой линии (или поверхности) будет также кривая линия (поверхность).

Пример построения стандартной изометрии произвольной пространственной кривой l показан на рис. 312. Построение аксонометрических

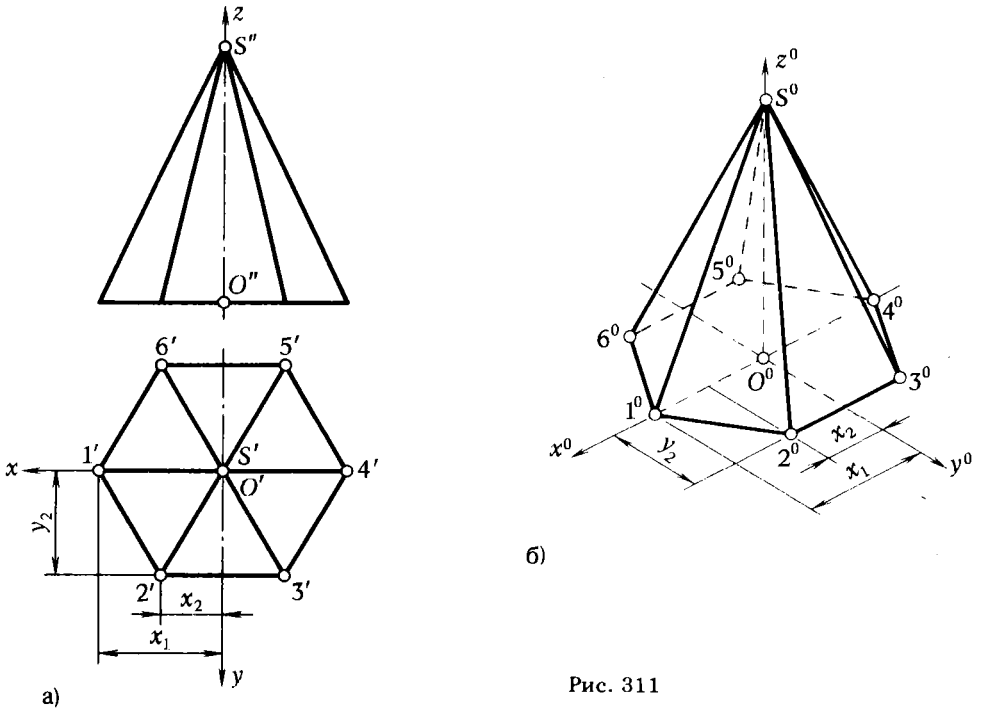


Рис. 311

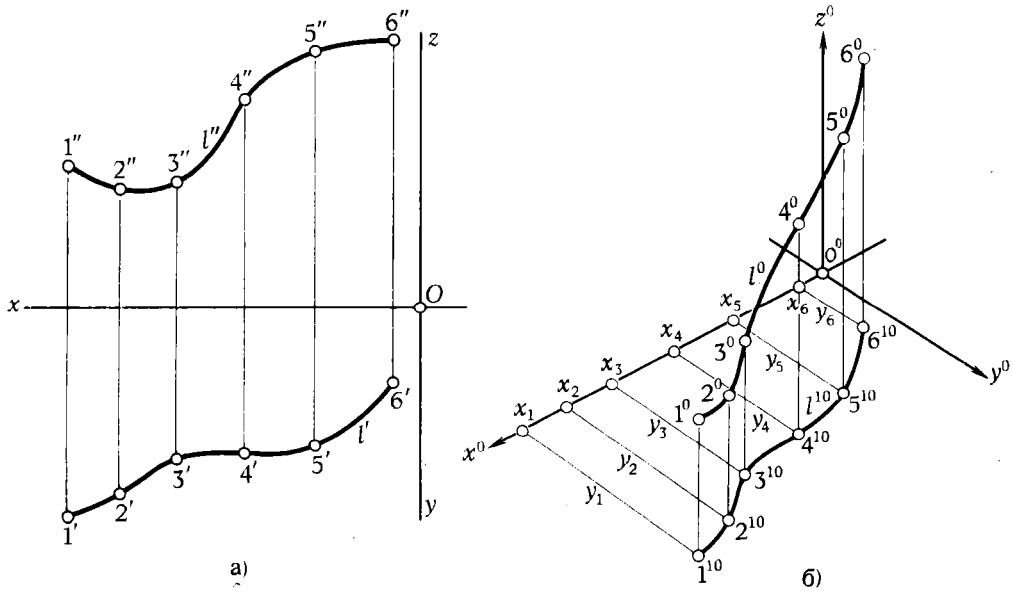


Рис. 312

проекций точек, принадлежащих кривой l, осуществляется в последовательности, указанной ниже.

1. Относим данную линию к некоторой натуральной системе координат $Oxyz$.

2. Отмечаем на кривой l точки *1*, *2*, *3*, ... и определяем их ортогональные координаты (рис. 312,*а*).

3. По координатам точек *1*, *2*, *3*, ... строим их вторичные проекции 1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, ... (рис. 312,*б*).

4. Через вторичные проекции точек проводим прямые, параллельные аксонометрической оси z^0, и откладываем на них отрезки, равные значению соответствующих аппликат точек (*1*, *2*, *3*, ...); находим точки 1^0, 2^0, 3^0, ...

5. Соединив найденные аксонометрические проекции точек 1^0, 2^0, 3^0, ... плавной линией, получим аксонометрическую проекцию кривой l^0.

В практике построения аксонометрических проекций машиностроительных деталей часто приходится строить аксонометрические проекции окружностей. В большинстве случаев плоскости окружностей бывают параллельны какой-либо из координатных плоскостей. Рассмотрим возможные варианты построения окружности в изометрической и диметрической проекциях.

Чтобы иметь более наглядное представление о расположении и величине осей эллипсов, в которые проецируются окружности, последние вписаны в грани куба. На рис. 313,*а* показана проекция куба в изометрии, а на рис. 313,*б* — в диметрии. Окружность, вписанная в грань куба, касается его ребер в их середине. Так как касание является инвариантом параллельного проецирования, то в аксонометрических проекциях точки касания эллипсов, в которые преобразуются окружности, будут находиться так же в серединах ребер куба. Кроме этих четырех точек можно указать еще четыре точки, принадлежащие концам большого и малого диаметров эллипса. В прямоугольных изометрических и диметрических проекциях направления больших осей эллипсов перпендикулярны свободным аксонометрическим осям, а малые оси эллипсов совпадают по направлению со свободными аксонометрическими осями.

Для прямоугольной (практической) изометрии величина большого диаметра эллипса равна 1,22*d* окружности, малого диаметра — 0,71*d* (см. рис. 313,*а*). В прямоугольной диметрии большой диаметр эллипса равен 1,06*d*, малый диаметр для эллипсов, расположенных в гранях куба, параллельных координатным плоскостям *Oxy* и *Oyz*, равен 0,35*d*. Для эллипса, принадлежащего грани куба, параллельной плоскости *Oxz*, малый диаметр равен 0,95*d* (см. рис. 313,*б*).

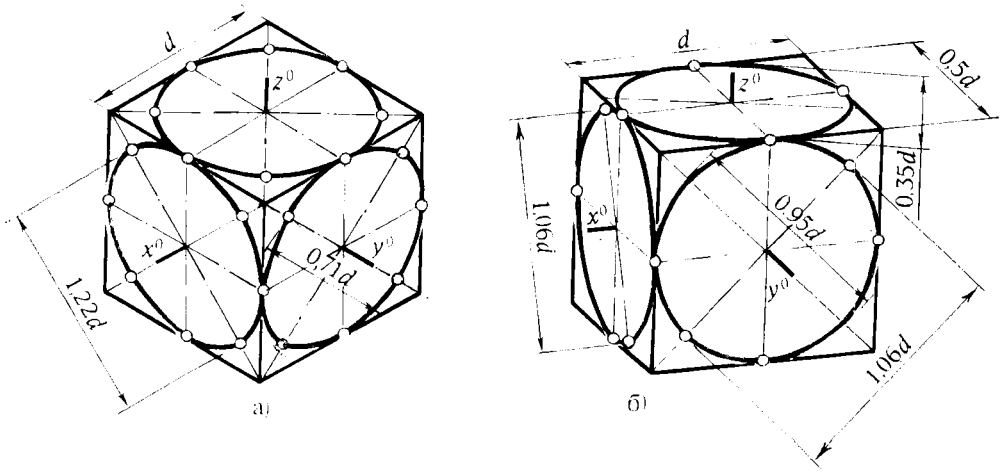


Рис. 313

Чтобы исключить арифметические подсчеты при определении длин отрезков, умноженных на величину масштаба искажения, следует пользоваться пропорциональным масштабом. Для его построения достаточно провести две взаимно перпендикулярные прямые a и b (рис. 314) и на одной из них от точки пересечения K отложить $[KO]$, равный 100 единицам, а на другой — отрезки $[KI]$, $[KII]$, $[KIII]$, $[KIV]$, $[KV]$, $[KVI]$, соответственно равные 35, 50, 71, 95, 106, 122 единицам измерения. Точки I, II, ... VI соединяем с точкой O. Если теперь от точки O на прямой OK отложить $[OB]$ заданной длины l и из конца B отрезка $[OB]$ восставить перпендикуляр к $[OK]$, то он пересечет прямые (OI), (OII), $(OIII)$, (OIV), (OV), (OVI) в точках *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Полученные отрезки $[B1]$, $[B2]$, $[B3]$, $[B4]$, $[B5]$, $[B6]$ будут равны соответственно $0{,}35l$, $0{,}5l$, $0{,}71l$, $0{,}95l$, $1{,}06l$, $1{,}22l$.

Если плоскость окружности занимает произвольное положение по отношению к координатным плоскостям, то построение аксонометрической проекции окружности осуществляется так же, как это делается при построении аксонометрической проекции кривой (см. с. 215 п. Б, рис. 312). Построение аксонометрических проекций поверхностей, ограничивающих геометрические фигуры, можно осуществить двумя способами:

1. Способ сечений. Этот способ заключается в следующем:

1) поверхность геометрической фигуры, аксонометрическую проекцию которой требуется построить, рассекаем плоскостями γ_1, γ_2, γ_3, ..., γ_n (рис. 315);

2) определяем линии пересечения заданной фигуры Ф плоскостями γ_j $(l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$;

3) строим аксонометрические проекции линий l_1, l_2, l_3, ..., l_n → → l_1^0, l_2^0, l_3^0, ..., l_n^0; для упрощения определения линий l_j и построения их аксонометрических проекций секущие плоскости следует принимать параллельными какой-либо плоскости проекции;

4) кривая d^0, огибающая линии l_1^0, l_2^0, l_3^0, ..., l_n^0, является очерковой линией — линией видимого контура фигуры Φ^0.

2. Способ вписывания сферических поверхностей. Целесообразность применения этого способа основывается на том, что в прямо-

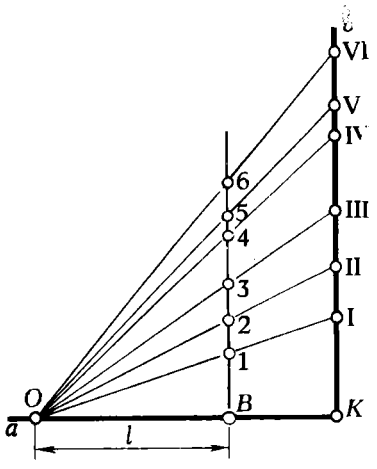
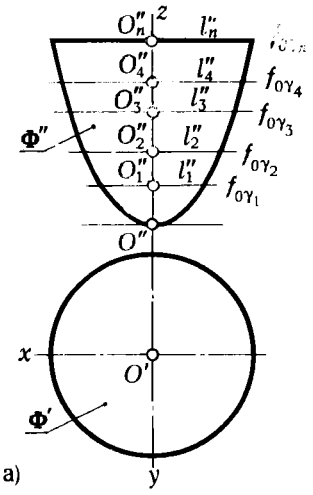


Рис. 314



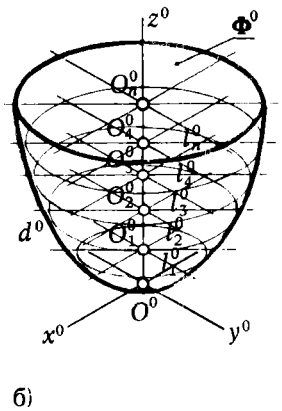


Рис. 315

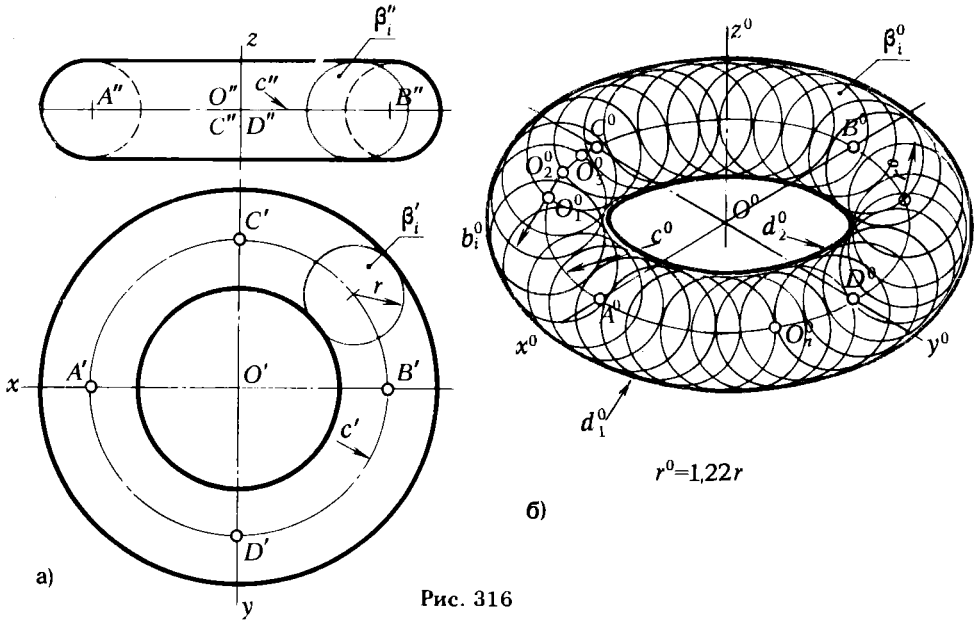


Рис. 316

угольной аксонометрии поверхность сферы проецируется на картинную плоскость в виде круга. Этот способ следует использовать в тех случаях, когда фигура ограничена поверхностью вращения. Так как в любую поверхность вращения могут быть вписаны сферические поверхности, то аксонометрическую проекцию поверхности вращения можно рассматривать как огибающую этих сфер.

Сущность способа покажем на конкретном примере. Пусть требуется построить аксонометрическую проекцию (прямоугольную изометрию) кольца (рис. 316,*а*). Построения выполняем в следующей последовательности:

1) строим эллипс c^0 — аксонометрическую проекцию окружности c $(ACBD)$;

2) из произвольных точек эллипса c^0, O_1^0, O_2^0, O_3^0, ..., O_n^0, $(\forall\, O_j^0;\ O_j^0 \in c^0)$ проводим окружности b_j радиусом r — аксонометрические проекции вписанных сферических поверхностей β;

3) огибающие d_1^0 и d_2^0 окружностей b_j являются видимым очерком аксонометрической проекции кольца (рис. 316,*б*).

§ 69. РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Решение позиционных задач на аксонометрическом чертеже не отличается от решения этих задач в ортогональных проекциях на эпюре Монжа.

Алгоритмы решения задач для определения линии пересечения двух поверхностей (см. § 43, табл. 8) и нахождения точек встречи линии с поверхностью (см. § 53, табл. 9), составленные для ортогональных проекций, остаются без изменения при решении аналогичных задач в аксонометрических проекциях. Рассмотрим решение основных позиционных задач: определение точки встречи прямой с плоскостью и построение линии пересечения двух поверхностей.

ЗАДАЧА 1. Определить точку $K = m \cap \beta$ (рис. 317).

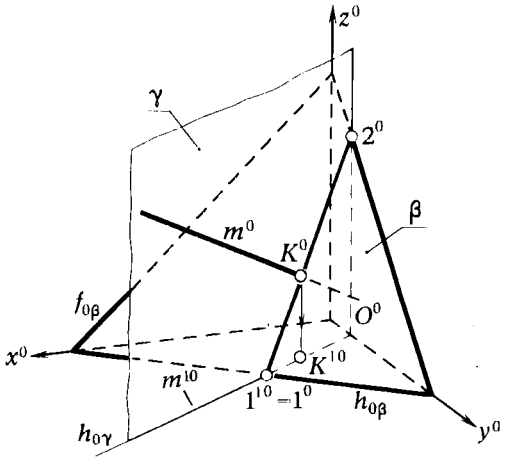


Рис. 317

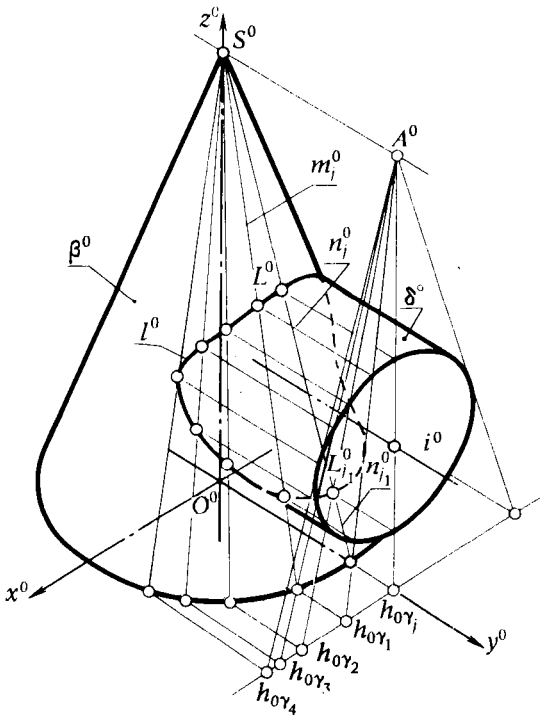


Рис. 318

РЕШЕНИЕ.

1. Заключаем данную прямую m во вспомогательную плоскость γ, перпендикулярную какой-либо координатной плоскости (на рис. 317 $\gamma \perp$ плоскости $O^0x^0y^0$). Горизонтальный след $h_{0\gamma}$ плоскости γ совпадает со вторичной проекцией m^{10} прямой m.

2. Отмечаем $(1^0 2^0)$, по которой пересекаются плоскости γ и β: $(1^0 2^0) = \gamma \cap \beta$.

3. Находим $K^0 = m^0 \cap (1^0 2^0)$.

4. Зная K^0, определяем вторичную проекцию K^{10}.

ЗАДАЧА 2. Построить линию l^0 пересечения конической β и цилиндрической δ поверхностей $l^0 = \beta \cap \delta$ (рис. 318).

Эта задача может быть решена двумя способами.

Способ 1. Решают эту задачу в ортогональных проекциях, а затем строят аксонометрическую проекцию полученной линии пересечения.

Способ 2. Состоит в построении искомой линии пересечения непосредственно на аксонометрической проекции. При этом решение осуществляется по алгоритму, составленному для решения аналогичной задачи в ортогональных проекциях.

Решение приведено на рис. 318. Как видно из чертежа, для определения точек $(L_j^0$ и $L_{j_1}^0) \in l_j^0$ $(L_j^0 = m_j^0 \cap n_j^0)$ используются плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через прямую SA. Любая плоскость этого пучка пересекает поверхности β и δ по прямым m^0 и n^0.

Точки L_j^0 и $L_{j_1}^0$ принадлежат искомой линии пересечения поверхностей β и δ.

§ 70. РЕШЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Между ортогональными и аксонометрическими проекциями существует зависимость, которая позволяет по ортогональным проекциям геометрической фигуры и заданному направлению аксонометрического проецирования построить треугольник следов и, наоборот, по заданной проекции треугольника следов определить направление аксонометрического проецирования. Связь между ортогональными и аксонометрическими проекциями позволяет преобразовать последние в проекции ортогональные и решать на них метрические задачи.

В тех случаях, когда геометрическая фигура Ф расположена в одной из координатных плоскостей или в плоскостях, параллельных координатным, для определения метрических характеристик фигуры Ф достаточно выполнить построения, переводящие плоскость фигуры в положение, совмещенное с плоскостью чертежа (или параллельное ей).

Геометрические построения, которые необходимо осуществить для совмещения координатной плоскости с плоскостью аксонометрической проекции, можно проследить на рис. 319. Пусть заданы аксонометрические оси x^0, y^0 и z^0. Строим треугольник следов, для чего на оси x^0 отмечаем произвольную точку X^0_α. Через X^0_α проводим стороны треугольника $X^0_\alpha Y^0_\alpha \perp z^0$, $X^0_\alpha Z^0_\alpha \perp y^0$ и $Z^0_\alpha Y^0_\alpha \perp x^0$. Прямые $(X^0_\alpha Y^0_\alpha)$, $(X^0_\alpha Z^0_\alpha)$, $(Z^0_\alpha Y^0_\alpha)$ являются следами картинной плоскости α на координатных плоскостях $(X^0_\alpha Y^0_\alpha) \equiv h^0_{0\alpha}$, $(X^0_\alpha Z^0_\alpha) \equiv f^0_{0\alpha}$ и $(Z^0_\alpha Y^0_\alpha) \equiv w^0_{0\alpha}$. Для совмещения плоскости xOy с плоскостью α необходимо повернуть ее вокруг горизонтального следа $h^0_{0\alpha}$. При этом точки X^0_α и Y^0_α плоскости xOy, как принадлежащие оси вращения $h^0_{0\alpha}$, не меняют своего положения во время вращения. Поэтому для определения совмещенного положения плоскости xOy достаточно повернуть точку O до ее совмещения с плоскостью α. Точка O^0 при вращении вокруг оси $h^0_{0\alpha}$ будет перемещаться по окружности с центром в точке C^0. Эта окружность принадлежит плоскости $\gamma \perp \alpha$.

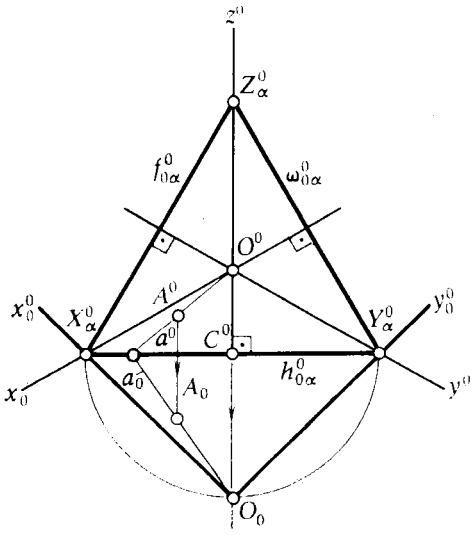


Рис. 319

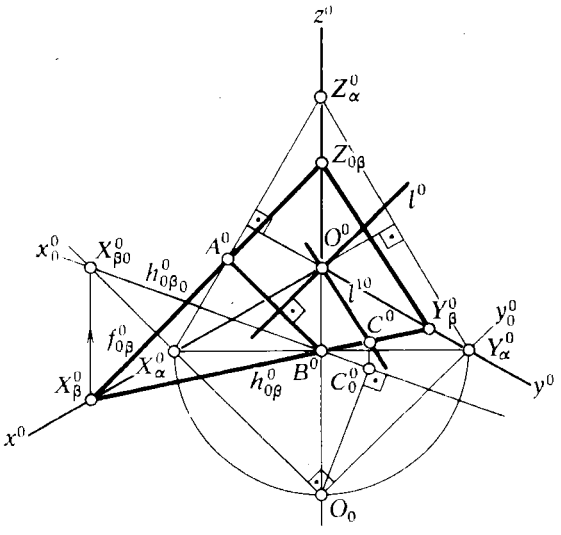


Рис. 320

Совмещенное положение точки O_0 находится в точке пересечения перпендикуляра к оси вращения $h^0_{0\alpha}$, проведенного через O^0, и дуги окружности с центром в точке C^0, радиусом $C^0X^0_\alpha$. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что в натуре $\widehat{X^0_\alpha O_0 Y^0_\alpha} = 90°$. Выполненные построения обеспечивают равенство $\widehat{X^0_\alpha O_0 Y^0_\alpha} = 90°$, так как он образован хордами, опирающимися на диаметр. Для определения совмещенного с плоскостью α положения точки A, принадлежащей плоскости xOy, достаточно провести прямую $a^0 \ni (O^0A^0)$, найти ее совмещенное положение a_0 и на a_0 определить точку A_0.

Совмещенное положение плоскостей xOz и yOz с аксонометрической плоскостью α находится аналогично рассмотренному случаю с той лишь разницей, что вращение плоскостей осуществляется соответственно вокруг осей $f^0_{0\alpha}$ и $w^0_{0\alpha}$.

Проведение прямой, перпендикулярной к плоскости, является одной из основных метрических задач. Проследим, как может быть решена эта задача с помощью совмещения координатной плоскости с аксонометрической. Пусть требуется провести прямую l, перпендикулярную плоскости β и проходящую через точку O (рис. 320).

РЕШЕНИЕ.

1. Строим треугольник следов $X^0_\alpha Y^0_\alpha Z^0_\alpha$, для чего на оси x^0 отмечаем точку X^0_α. При выборе положения точки X^0_α необходимо следить за тем, чтобы две стороны треугольника следов пересекали следы заданной плоскости β.

2. Определяем (A^0B^0) — линию пересечения плоскости β с плоскостью аксонометрии α [$(A^0B^0) = \beta \cap \alpha$].

3. (A^0B^0) — след плоскости β на плоскости α, поэтому аксонометрическая проекция перпендикуляра l^0 будет перпендикулярна к (A^0B^0). Проводим l^0 так, чтобы $l^0 \perp (A^0B^0) \wedge (l^0 \ni O^0)$.

4. Чтобы построить вторичную проекцию перпендикуляра, совмещаем координатную плоскость xOy с плоскостью α (построения выполнены аналогично показанным на рис. 319). Совмещенное положение следа $h^0_{0\beta_0}$ определяется точками $X^0_{\beta_0}B^0$. Из точки O_0 опускаем перпендикуляр $O_0C^0_0$ на прямую $h^0_{0\beta_0}$. Зная положение C^0_0, находим C^0. Определяем вторичную аксонометрическую проекцию перпендикуляра l^{10}.

Следует иметь в виду, что решение метрических задач на аксонометрических проекциях сопряжено с определенными трудностями. Поэтому целесообразно при выявлении метрических характеристик геометрической фигуры, заданной в аксонометрических проекциях, перейти к заданию этой фигуры в ортогональных проекциях и решать задачу так, как это было рекомендовано в гл. VI.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие проекции называются аксонометрическими?
2. Как производится переход от ортогональных координат к аксонометрическим?
3. Что такое треугольник следов?
4. Чему равны показатели искажения по аксонометрическим осям в прямоугольных изометрических и диметрических проекциях?
5. Как определить аксонометрические оси, если задан треугольник следов ортогональных аксонометрических (изометрических и диметрических) проекций?
6. Что такое аксонометрический масштаб?
7. Укажите коэффициенты искажения для большой и малой оси эллипса — аксонометрической проекции окружности, принадлежащей координатной плоскости (или параллельной ей) для изометрии и диметрии.
8. Сформулируйте теорему Польке.
9. В чем различие между прямоугольными и косоугольными аксонометрическими проекциями?

ГЛАВА IX

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всего лишь три десятилетия отделяют нас от того дня, когда первая ЭЦВМ решила первую задачу. Сейчас трудно найти область научной, инженерной и административно-хозяйственной деятельности, где бы ни использовались быстродействующие вычислительные машины и комплексы.

Начиная с 1963 г., в Советском Союзе ведутся работы по созданию машинных языков для описания графической информации и использованию ЭЦВМ для автоматизации процесса конструирования, в частности автоматизации процесса составления и чтения чертежей.

Несколько позже появились работы, посвященные решению проблемы комплексной автоматизации графического решения задач с использованием для этой цели электроники и вычислительной техники.

Приведенный ниже матриал познакомит вас с основными вопросами проблемы автоматизации процесса решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме, и возможными путями их практической реализации. Вы освоите также технику программирования, точнее — составления управляющих программ (схем счета) и способы выбора наиболее рационального машинного алгоритма.

§ 71. О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЦВМ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Отметим сразу, что использование современной электронно-вычислительной машины является не только возможным, но, как это будет показано, вполне логичным путем для решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме.

Возможность применения ЭЦВМ для аналитического решения задач сейчас ни у кого не вызывает сомнения.

Если мы обратимся к графическому решению задач, то легко убедиться, что между графическим и аналитическим способами решения имеется много общего. Эта общность вытекает из изоморфизма между алгеброй и геометрией.

Действительно, основными неопределяемыми понятиями математики являются точка и число. Многообразие (множество) точек определяют различные геометрические фигуры, которые являются предметом изучения в геометрии. Изучением многообразия (множества) чисел,

выраженных в символической форме, занимается алгебра. Любое теоретическое исследование в области точных наук осуществляется путем использования различных математических операций. Простейшей операцией в геометрии является движение, с помощью которого можно каждую точку (множество точек) перевести в некоторую другую точку (другое множество), установив взаимное соответствие между старым (исходным) и новым (преобразованным) положениями. Аналогичной операцией в алгебре служит преобразование, устанавливающее соответствие между числами и их многообразиями. Изоморфизм между алгеброй и геометрией позволяет алгебре приобретать геометрическую форму и наоборот.

Достаточно ввести понятие *гипоточка* (элемент пространства, точечность которого на единицу меньше точечности точки — пустое множество), чтобы записать элементы многомерного пространства в символике арабских цифр в виде конечного множества *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *N*, полностью сходного с конечным множеством чисел *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *N*.

Между операциями над элементами пространства и действиями над числами много общего. Так, например, пересечение элементов пространства, выраженное в аддитивной записи, напоминает сложение целых чисел. Аналитическое решение задач, выраженное в форме уравнений, сводится к операции исключения неизвестных.

Аналогичные приемы применяют и при графических решениях. Более того, в самой идее проецирования трехмерных объектов на плоскость проекции (основного метода начертательной геометрии) используется прием исключения одной из трех координат.

Соответствие между алгеброй и геометрией позволяет при решении математических задач не делать (с чисто формальной точки зрения) различия, каким способом оно осуществляется: аналитическим или графическим.

Различие между графическими построениями и алгебраическими преобразованиями, являющимися промежуточными операциями, которые приходится выполнять в процессе решения задачи, есть лишь формальная сторона вопроса. Она не может служить поводом для утверждения, что имеется принципиальное отличие между графическим и аналитическим методами решения. Более существенным оказывается не отличие двух методов решения, а то общее, что объединяет эти методы. Основанием для такого объединения является:

1) выполнение в определенной последовательности различных логических и арифметических (или графических) операций;

2) использование промежуточных результатов в ходе последующих операций;

3) необходимость изменять направление процесса решения в зависимости от результатов промежуточных операций.

Таким образом, для осуществления автоматизации процесса решения задач нужно иметь машину, которая должна:

— производить в определенной последовательности различные логические и арифметические операции, необходимые для решения задачи;

— иметь устройство для хранения исходных величин и промежуточных результатов;

— быть способной автоматически выбирать нужное продолжение дальнейшего процесса решения в зависимости от результатов промежуточных операций.

Всем этим требованиям отвечают электронные цифровые вычислительные машины. Что касается выполнения геометрических построений, то они необходимы, если решение задачи осуществляется вручную. При переходе к машинному решению оказывается возможным избежать таких построений (см. § 74). Последнее утверждение основано на богатом опыте, накопленном в результате механизации процесса ручного труда.

Известно, что машина выполняет какие-либо операции, взятые из сферы физической деятельности человека, не так, как это делает человек. В этом легко убедиться на простом примере: швейная машина, предназначенная для облегчения труда швеи, сшивает ткани лучше и быстрее, но не так, как это делает швея. Очевидно, машинизируя процессы, взятые из области умственной деятельности человека, мы встретимся с таким же явлением.

Можно показать, что использование ЭЦВМ для автоматизации процесса решения задачи графическим методом является не только возможным, но в ряде случаев и более логичным, чем применение таких машин для автоматизации процесса решения задач аналитическим способом.

В защиту такой постановки вопроса можно привести высказывание крупнейшего философа и математика Г. Лейбница (1646—1716), который впервые обратил внимание на перспективность использования двоичной системы счисления. Он писал, в частности, что "*... вычисление с помощью двоек, т. е. 0 и 1, в вознаграждение его длиннот является для науки основным и порождает новые открытия, которые оказываются полезными впоследствии даже в практике чисел, а особенно в геометрии, причиной чего служит то обстоятельство, что при сведении чисел к простейшим началам, каковы 0 и 1, всюду выявляется чудесный порядок*". Г. Лейбниц не имел в виду использование двоичной системы счисления в ЭЦВМ, но его прогноз был поистине гениальным. В ЭЦВМ применяется, как правило, двоичная система счисления.

И еще одно обстоятельство, на которое мы хотим обратить внимание читателя. Чертеж, являющийся формой задания исходных данных задачи, решение которой целесообразно осуществлять графическими методами, может быть расчленен на черные (принадлежащие линиям) и белые (определяющие свободное поле чертежа) элементарные площадки, т. е. любой чертеж может быть представлен в виде двоичных сигналов (черное — да, 1; белое — нет, 0), передаваемых в машину. Причем информацию о чертеже, выраженную в форме только двух резко отличающихся сигналов, можно получить и ввести в машину без участия человека. Это удобнее, чем трансформирование в такие же сигналы величин, входящих в качестве исходных данных в аналитические выражения.

Получив информацию об исходных данных задачи, ЭЦВМ может, по указанию человека, приступить к обработке этой информации по программе, составленной, в частности, и по алгоритму графического решения задач.

Все сказанное не оставляет сомнения в том, что имеется принципиальная возможность использовать ЭЦВМ для графического решения задач.

§ 72. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОБЛЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Для выяснения вопросов, которые должны быть решены, чтобы полностью автоматизировать процесс решения задач, проследим за деятельностью человека, решающего задачу графическим путем. При решении задачи человек последовательно выполняет следующие операции:

1) выясняет требования поставленной задачи — какой вопрос следует решить;

2) знакомится с условиями задачи — видом и характером расположения геометрических фигур, входящих в исходные данные;

3) составляет и сохраняет в памяти (или записывает на бумаге) алгоритм решения;

4) на основании теорем и правил, хранящихся в памяти, осуществляет реализацию этого алгоритма путем выполнения необходимых геометрических построений;

5) убеждается в правильности полученного решения.

В выполнении всех перечисленных выше операций принимает участие головной мозг человека. При этом выполнение первой и второй операции немыслимо без связи головного мозга с внешним миром посредством органов чувств (зрения или слуха для выполнения первой операции и зрения — для второй операции). Третья операция, если не производится запись алгоритма, выполняется только головным мозгом. Четвертая операция выполняется рабочими органами (руками) под действием команд, поступающих от головного мозга и под его контролем. Пятая операция выполняется либо головным мозгом и органами зрения, либо головным мозгом, органами зрения и рабочими органами.

Проследим, в какой степени использование ЭЦВМ позволяет выполнить эти операции. Условия задачи, решаемой графическими методами, задаются в виде чертежа. Такая форма задания непосредственно не может быть использована машиной. Поэтому необходимо чертеж преобразовать в цифровой код и представить последний в "понятной" для машины форме. Для этого машина должна быть оборудована дополнительным устройством, которое могло бы самостоятельно, без участия человека, преобразовать чертеж в цифровой код.

Наиболее трудоемким является составление алгоритма решения задачи и его реализации на машине. Для автоматизации этого процесса необходимо разработать новый метод решения задач, учитывающий возможности ЭЦВМ, и на его основе составить программу работы машины.

Результаты решения на ЭЦВМ выдаются в цифровой форме. В связи с этим, чтобы получить ответ в виде чертежа, следует предусмотреть на выходе машины преобразователь цифровых величин в аналоговые (линии чертежа).

Таким образом, чтобы осуществить автоматизацию процесса графического решения задач, необходимо решить следующие вопросы:

1) создать конструкцию "читающего" устройства (преобразователя аналог — код);

2) разработать теорию обработки информации, полученной в результате преобразования чертежа в цифровой код;

3) разработать метод решения задач, учитывающий возможность его реализации на ЭЦВМ;

4) создать теоретическую базу для программирования графического решения задач, установив критерии, выполнение которых гарантирует получение правильного ответа;

5) создать конструкцию пишущего устройства (преобразователя код — аналог).

Если будут решены перечисленные выше вопросы, то три основные операции из пяти, которые выполняет человек при решении задачи графическими методами, могут быть выполнены техническими средствами без его участия. Несмотря на многообразие задач, решаемых графическими методами, каждое из таких решений состоит из комбинации небольшого числа однотипных операций, которые можно представить в виде стандартных подпрограмм (операторов); с помощью последних легко может быть составлена программа для решения любой задачи. Когда будут составлены программы, роль человека при решении задач сведется только:

1) к определению типа задачи;

2) к выбору необходимой программы или, в крайнем случае, составлению компилирующей программы из имеющегося набора операторов;

3) к установке чертежа, который содержит исходные данные задачи, в "читающее" устройство и чистого листа бумаги в преобразователь код — аналог ("пишущее" устройство).

Все остальные операции, связанные с чтением чертежа, решением задачи, проверкой правильности решения и графического изображения ответа, будут выполнены машиной без участия человека.

§ 73. МАШИННОЕ ЧТЕНИЕ ЧЕРТЕЖА

Независимо от того, решает ли задачу человек или ее решение будет поручено машине, первая операция процесса решения должна включать в себя ознакомление с исходными данными, т. е. чтение чертежа. Под выражением "прочесть чертеж" мы подразумеваем совершающийся в коре головного мозга процесс обработки информации о чертеже, полученной посредством органов зрения. В результате его выполнения мы получаем возможность представить, какие геометрические фигуры изображены на чертеже и каково их взаимное расположение.

Говоря о чтении чертежа машиной, мы вкладываем в это понятие иной смысл, а именно: *машина должна определить координаты полностью или частично черных растрэлементов и установить их принадлежность к каждой из заданных на чертеже линий или точке**. Такое определение основано на машинном методе графического решения задач, который будет изложен в следующем параграфе.

Так как ЭЦВМ может оперировать только с числами, представленными в виде электрических сигналов, то первым шагом на пути машинизации процесса чтения чертежа является:

1) выявление на поле чертежа элементарных площадок (растрэлементов), принадлежащих линии;

2) определение их координат;

3) преобразование последних из цифровой формы в электрическую.

Отмеченные выше преобразования могут быть реализованы аппаратурными средствами с помощью преобразователя аналог — код и счетчика координат. Выявление растрэлементов, принадлежащих линиям чертежа, может быть выполнено посредством развертки с помощью светового (или электронного) анализирующего луча, который, перемещаясь по определенному закону, последовательно, строка за строкой, "просматривает" (анализирует) все поле чертежа.

---

* Имеется в виду, что чертеж выполнен черными линиями.

Мы не будем останавливаться в рамках учебника по курсу начертательной геометрии на изложении теоретических основ и созданной на их базе программы "чтения" чертежа*

§ 74. МЕТОД МАШИННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач, исходные данные которых представлены в графической форме, целесообразно осуществлять графическими методами.

Для реализации процесса решения задач предполагается использовать цифровую электронно-вычислительную машину, принцип действия которой позволяет оперировать только с числами. Поэтому в процессе подготовки задачи для машинного решения необходимо осуществить ее арифметизацию, выбрать численный метод решения и составить расчетные формулы.

Таким образом, мы приходим к двум взаимно исключающим выводам: с одной стороны, форма задания исходных данных требует графического метода решения; с другой — реализация процесса решения на ЭЦВМ допускает применять только аналитический метод.

Использовать каждый из этих методов в том виде, в котором они обычно применяются, невозможно. Принцип действия и конструктивные особенности существующих ЭЦВМ не позволяют использовать их в качестве чертежной машины для выполнения всех тех геометрических построений, которые свойственны графическому методу решения. Трудности в использовании аналитического метода состоят в том, что для него необходимо иметь уравнения всех геометрических фигур, представленных на чертеже.

Для того чтобы составить (описать) уравнение геометрической фигуры, машина должна опознать ее. В настоящее время наука не располагает данными, которые необходимы для опознавания широкого круга материальных образов. Поэтому не представляется возможным составить алгоритм опознавания, а следовательно, и моделировать его на машине.

Из сказанного следует, что решение задачи, исходные данные которой представлены в графической форме, невозможно осуществить на ЭЦВМ, используя только аналитический или графический методы в их "чистом" виде. Необходимо разработать новый метод решения задач, учитывающий характер задания исходных данных и возможности вычислительной машины.

Этот метод должен отвечать двум основным требованиям: *во-первых*, решение должно осуществляться без каких-либо геометрических построений; *во-вторых*, обходиться без определения уравнений геометрических образов, заданных на чертеже (за исключением прямых и окружностей).

Для решения графическим методом не требуется знание уравнений геометрических образов; при аналитическом решении нет необходимости в геометрических построениях. Поэтому, если воспользоваться этими свойствами графического и аналитического методов, то можно с их помощью создать новый метод, удовлетворяющий отмеченным требованиям. Для этого достаточно, чтобы логика нового метода строилась на базе графического метода решения, а необходимые геометри-

---

*Подробно аспекты машинного "чтения" чертежа, а также другие вопросы автоматизации процесса графического решения задач изложены в книге С. А. Фролова "Кибернетика и инженерная графика". М.: Машиностроение, 1974.

ческие построения заменялись алгебраическими решениями, характерными для аналитического метода.

В новом методе фигурирует алгебра, но эта алгебра качественно отличается от той, с которой приходится иметь дело в аналитическом методе. Она заменяет собой геометрические построения, которые выполняются с помощью линейки и циркуля, т. е. в этом случае она ограничивается только операциями с уравнениями прямых и окружностей. Известно, что основу графического метода решения задач составляют различные геометрические построения, которые выполняются только для того, чтобы найти точки пересечения прямых и окружностей, проведенных в процессе решения задачи, как между собой, так и с линиями, заданными на чертеже. Иначе говоря, основной, наиболее существенной отличительной особенностью графического метода является выполнение в определенной логической последовательности операций по определению точки (точек) пересечения двух линий.

Решение задач на ЭЦВМ новым методом не противоречит принципам ее работы, так как этот метод позволяет использовать ее не в качестве чертежного агрегата, а как машину для определения координат точек пересечения двух линий, в общем случае заданных значением координат некоторой последовательности принадлежащих им точек (растрэлементов), выявленных в процессе автоматического "чтения" исходных данных.

Если при решении задачи по определению точки пересечения двух линий "вручную" не имеет значения, какие линии пересекаются, то для машинного решения мы должны четко различать следующие случаи:

1) пересечение двух прямых;

2) пересечение прямой с кривой (в частном случае с окружностью);

3) пересечение двух кривых (в частности, двух окружностей).

Иногда операция по нахождению координат точки пересечения двух прямых или прямой и кривой, если прямая занимает горизонтальное или вертикальное положение, может быть заменена определением на линии точки с заданным значением абсциссы (ординаты), если известна величина ее ординаты (абсциссы).

Итак, для автоматизации процесса графического решения задач с помощью ЭЦВМ ее функции могут быть сведены к выполнению арифметических операций по определению координат точки пересечения двух линий и решению логических задач, связанных с нахождением последовательности, в которой определяются координаты точек.

Если логическая схема решения (алгоритм) всецело зависит от условий поставленной задачи и вида исходных данных, то определение координат точек пересечения линий для всех задач одинаково. Отличие может состоять лишь в том, с каким из отмеченных выше случаев пересечения приходится иметь дело.

В отличие от человека для машины определение точки пересечения двух линий является не элементарной операцией, а задачей. Число и характер команд, которые должна выполнить машина для ее решения, во всех перечисленных выше случаях будут различными. Если для определения координат точки пересечения двух прямых (случай 1), или пересечения прямой и окружности, или двух окружностей (частные варианты случаев 2 и 3) машине достаточно решить систему уравнений, которыми описываются эти линии, то в общем варианте случая 2 (рис. 321) машина должна сначала на кривой выделить точки *1* и *2*, расположенные ближе к прямой (множество $M_1\ \{\dots\}$), чем любые другие точки множества $M_2\ \{\dots\}$; составить уравнение прямой, проходящей через эти точки, и лишь после этого приступить к определению координат точки

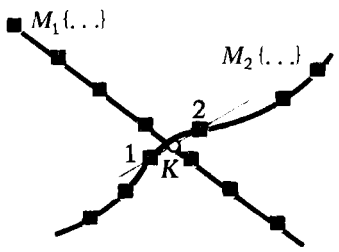


Рис. 321

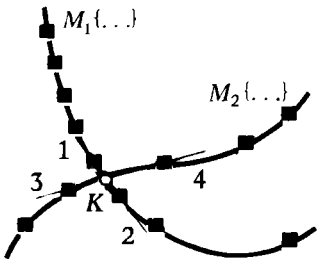


Рис. 322

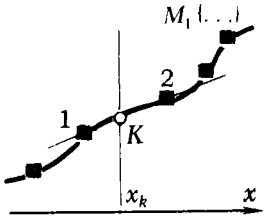


Рис. 323

пересечения K. В случае 3 (рис. 322) машина предварительно должна выделить две пары таких точек (по одной паре из каждого множества $M_1\{\ldots\}$ и $M_2\{\ldots\}$), чтобы расстояние между ними было наименьшим из всех возможных в данной ситуации, и только после этого приступить к составлению уравнений прямых, проходящих через эти точки *1*, *2* и *3*, *4*, и совместному решению этих уравнений.

Если одна из координат искомой точки известна, то в зависимости от того, на какой линии — прямой или кривой — определяется недостающая координата точки, возможны два варианта решения. В первом варианте (прямая линия) задача решается подстановкой значения x (или y) в уравнение прямой и решения этого уравнения относительно y (или x).

Во втором варианте (кривая линия) отыскания в множестве $M_1\{\ldots\}$ точки (растрэлемента) с абсциссой x является случайностью (рис. 323). Как правило, такой точки в $M_1\{\ldots\}$ не будет, поэтому можно говорить только о нахождении в $M_1\{\ldots\}$ точек *1* и *2*, у которых абсолютное значение разности $|x_K - x_1|$ и $|x_2 - x_K|$ меньше наперед заданной величины Δd. Затем машина составляет уравнение прямой, проходящей через выявленные точки *1* и *2*, и на ней определяет искомую точку (так, как это делается в первом варианте).

Геометрические построения при графическом способе решения задач выполняются с помощью линейки и циркуля, т. е. приведением простейших линий — прямых и окружностей.

Для ЭЦВМ "провести" прямую или окружность означает составить ее уравнение. Проведение прямых нужно для того, чтобы в дальнейшем выделить на них какие-либо точки (в частности, точки пересечения с другими линиями); проведение окружностей необходимо для решения таких задач, как:

1) определение на заданной линии точек, удаленных от данной точки на расстояние d;

2) определение на плоскости точек, удаленных от данной точки A на расстояние d_1 и от точки B на расстояние d_2.

При решении метрических задач машина должна уметь определять расстояние между двумя точками, делить отрезок в данном отношении.

Для того чтобы ЭЦВМ можно было поручить решать задачу, необходимо, чтобы она умела выполнять элементарные графические операции, входящие составной частью в решение этих задач.

В табл. 10 приведен перечень операций, которые должна "уметь" выполнять ЭЦВМ.

Запрограммировав перечисленные в табл. 10 операции, мы получим подпрограммы (операторы), с помощью которых можно составить компилирующую программу, пригодную для решения любой задачи, исходные данные которой представлены в графической форме.

Таблица 10

Содержание операции	Обозначение	Число команд
Определить уравнение прямой, проходящей через две данные точки	I	10
Определить уравнение прямой, параллельной данной, проходящей через заданную точку	II	7
Определить уравнение прямой, перпендикулярной данной, проходящей через заданную точку	III	9
Определить уравнение горизонтальной прямой, проходящей через заданную точку	IV	5
Найти точку пересечения двух заданных прямых	V	17
На данной прямой найти точку с заданным значением абсциссы	$VI_а$	11
На данной прямой найти точку с заданным значением ординаты	$VI_б$	10
Найти расстояние между двумя заданными точками	VII	8
Разделить заданный отрезок в данном отношении	VIII	5
На данной прямой найти точки, удаленные от данной точки, на заданное расстояние	$IX_а$	40
Определить уравнение прямой, проходящей через две точки, удаленные от двух данных точек на заданное расстояние	$IX_б$	11
Найти на заданной кривой две точки, ближайшие к данной прямой	X	23
Найти на двух заданных кривых по паре точек, чтобы две точки, выделенные на одной кривой, являлись ближайшими к двум выделенным точкам другой кривой	XI	26
Найти на заданной кривой точки, расстояние от которых до данной точки ближе всего к заданному расстоянию	$XII_а$	25
Найти точки пересечения кривой с окружностью, проведенной из заданного центра данным радиусом	$XII_б$	19
Определить уравнение прямой по совокупности ее точек	XIII	57

§ 75. СОСТАВЛЕНИЕ МАШИННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Простейший пример алгоритма — математическая формула, она указывает, над какими величинами и в какой последовательности необходимо выполнять арифметические операции для решения более сложных задач. Если при графическом методе процесс решения нельзя записать в виде формулы, то это можно сделать с помощью схемы счета, указывающей последовательность выполнения различных геометрических операций, реализуемых с помощью операторов, приведенных в табл. 10.

Установим алгоритм и запишем его в виде схемы счета, составленной из стандартных операторов для решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью (рис. 324). Пусть заданы плоскость α $(a \parallel b)$ и пересекающая ее прямая m. Требуется найти точку $K = m \cap \alpha$.

Мы знаем, что для решения этой задачи необходимо прямую m заключить в плоскость γ; найти прямую пересечения плоскостей $\gamma \cap \alpha = n$; отметить проекцию точки K, в которой пересекаются одноименные проекции заданной прямой m и полученной линии пересечения n. Все необходимые построения приведены на рис. 324. Индексация арабскими цифрами указывает на последовательность определения точек.

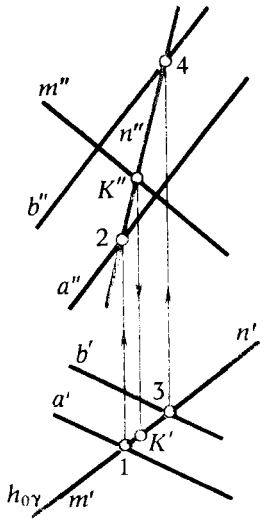


Рис. 324

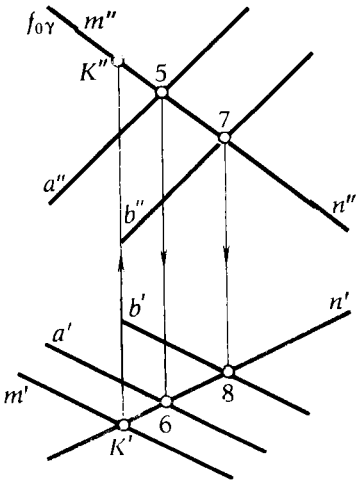


Рис. 325

В рассматриваемом случае схема счета, представляющая алгоритм решения задачи, записанный в символах стандартных операторов (табл. 10), примет вид

$$V_1\, III_2\, V_3\, V_4\, III_5\, V_6\, I_7\, V_8\, III_9\, V_{10}.$$

Выполнение двух операторов $III_n V_{n+1}$ можно заменить одним оператором VI_a*. Окончательно схема счета машинного алгоритма запишется

$$\begin{matrix} V_1 & VI_{a_2} & V_3 & VI_{a_4} & I_5 & V_6 & VI_{a_7}. \\ (1) & (2) & (3) & (4) & & (K')\,(K'') & \end{matrix} \qquad (5)$$

Арабские цифры и буквы в скобках указывают точку, обозначенную на чертеже, которая получается в результате выполнения оператора, под которым она поставлена.

Проследим, как будет изменяться схема счета, а следовательно, и алгоритм решения задачи в зависимости от взаимного расположения геометрических фигур как между собой, так и по отношению к плоскостям проекций.

Внесем изменение в эпюр, задающий исходные данные предыдущей задачи (см. рис. 324) так, чтобы горизонтальная проекция m' прямой m заняла положение, параллельное горизонтальным проекциям a' и b' прямых a и b (рис. 325).

В данном случае решить задачу так, как в предыдущем случае, не представляется возможным. Действительно, если мы заключим прямую m в горизонтально проецирующую плоскость γ, а затем будем определять с помощью оператора V точку *1*, то сделать это нам не удастся, так как пересечение a'' и b'' произойдет в несобственной точке ($a'' \cap b'' = 1_\infty$). По той же причине нельзя определить и точку *3*. Не имея точек *1* и *3*, мы не получим точек *2* и *4*, а следовательно, нам не удастся найти проекцию n'' прямой n. Но эта задача может быть решена по схеме счета (5), если решение начать с фронтальных проекций (см. рис. 325).

---

* Такая замена целесообразна, так как она уменьшает затраты машинного времени. На выполнение двух операторов III, V требуется 26 команд, оператор VI_a реализуется с помощью только 11 команд.

Как следует из рис. 325, схема счета по формальным признакам ничем не отличается от предыдущей:

$$\begin{matrix} \text{V}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{V}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{I}\ \text{V}\ \text{VI}_\text{а}. \\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\quad (K')(K'') \end{matrix} \tag{6}$$

Условимся считать этот путь вторым вариантом решения в отличие от первого варианта, описанного схемой счета (5).

Когда одна из заданных геометрических фигур (прямая или плоскость) занимает проецирующее положение, решение задачи представляется следующими схемами счета:

а) прямая — проецирующая, плоскость общего положения задана параллельными прямыми (рис. 326, *а*):

$$\begin{matrix} \text{VI}_\text{б}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{VI}_\text{б}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{I}\ \text{V}\ \text{VI}_\text{а}; \\ (9)\ (10)\ (11)\ (12)\ (K')(K'') \end{matrix} \tag{7}$$

б) прямая — проецирующая, плоскость общего положения задана следами (рис. 326, *б*):

$$\begin{matrix} \text{VI}_\text{б}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{II}\ \text{V}; \\ (13)\ (14)\quad (K') \end{matrix} \tag{8}$$

в) плоскость — проецирующая, прямая общего положения (рис. 326, *в*):

$$\begin{matrix} \text{V}\ \text{VI}_\text{а}. \\ (K')\ (K'') \end{matrix} \tag{9}$$

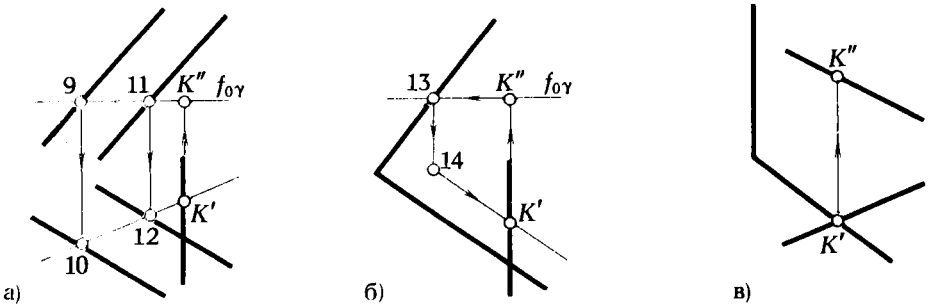
Все многообразие случаев задания исходных данных задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью может быть отнесено к семи альтернативным вариантам. Кроме схем счета (5), (6), (7), (8), (9) отметим еще:

$$\begin{matrix} \text{V}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{II}\ \text{V}\ \text{VI}_\text{а} \\ (15)(16)\quad (K'')(K') \end{matrix} \tag{10}$$

(рис. 327, *а*)

$$\begin{matrix} \text{VI}_\text{б}\ \text{VI}_\text{а}\ \text{VI}_\text{б}\ \text{VI}_\text{а} \\ (17)\ (18)\ (K'')\ (K') \end{matrix} \tag{11}$$

(рис. 327, *б*)



а) б) в)

Рис. 326

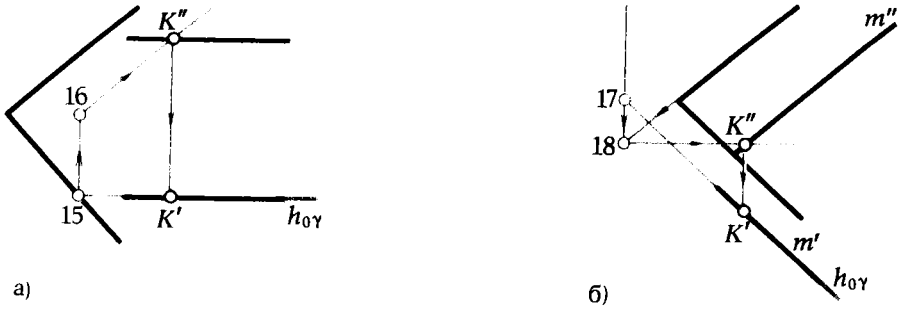


Рис. 327

Приведенные примеры иллюстрируют изменение алгоритма решения одной и той же задачи в зависимости от характера расположения геометрических фигур.

Программирование решения многих задач является трудоемким процессом. Поэтому, чтобы каждый раз, когда машина приступает к решению задачи с другими исходными данными, не составлять новую программу (схему счета, которая является управляющей программой), следует создать единый (обобщенный) алгоритм, запрограммировав который получим программу, пригодную для решения всех вариантов данной задачи. Чтобы выяснить логическую схему построения обобщенного алгоритма, выпишем составленные ранее схемы счета частных алгоритмов в виде табл. 11.

Из табл. 11 (строка 1) видно, что если после выполнения оператора V_1 точка пересечения найдена, то следует переходить к выполнению оператора VI_{a_2}, если и в этом случае точка определяется, то машина должна приступить к выполнению следующего оператора V_3 и т. д., пока не будет выполнен оператор VI_{a_7}, завершающий решение задачи.

Это решение соответствует исходным данным, показанным на рис. 324. Если при решении задачи по варианту I после выполнения оператора V_6 точку не получили (случай, изображенный на рис. 326,*а*), то следует переходить к выполнению группы операторов $VI_{б_{15}}\ VI_{a_{16}}\ VI_{б_{17}}\ VI_{a_{18}}\ I_{19}\ V_{20}$ (табл. 11, строка 2). Если в результате выполнения оператора $VI_{б_{17}}$ новой точки не будет, то следует переходить к выполнению операторов $II_{21}\ V_{22}$ (табл. 11, строка 3, рис. 326, *б*).

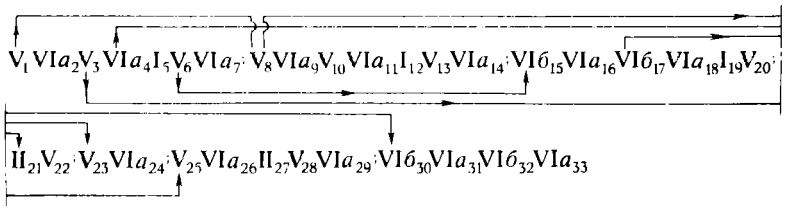
Таблица 11

№ строки	Схема счета общего случая		Необходимое добавление в основную схему для решения частных случаев
	Вариант I	Вариант II	
1	$V_1\ VI_{a_2}\ V_3\ VI_{a_4}\ I_5\ V_6\ VI_{a_7}$	. . . . .	
2	$V_1\ VI_{a_2}\ V_3\ VI_{a_4}\ I_5\ V_6$ . . .	. . . . .	$VI_{б_{15}}\ VI_{a_{16}}\ VI_{б_{17}}\ VI_{a_{18}}\ I_{19}\ V_{20}$
3	$V_1\ VI_{a_2}\ V_3\ VI_{a_4}\ I_5\ V_6$ . . .	. . . . .	$VI_{б_{15}}\ VI_{a_{16}}\ VI_{б_{17}}$ ..... $II_{21}\ V_{22}$
4	$V_1\ VI_{a_2}\ V_3\ VI_{a_4}$	. . . . .	$V_{23}\ VI_{a_{24}}$
5	$V_1\ VI_{a_2}\ V_3$	. . . . .	$V_{25}\ VI_{a_{26}}\ II_{27}\ V_{28}\ VI_{a_{29}}$
6	V_1	$V_8 VI_{a_9} V_{10} VI_{a_{11}} I_{12} V_{13} VI_{a_{14}}$	$VI_{б_{30}}\ VI_{a_{31}}\ VI_{б_{32}}\ VI_{a_{33}}$
7	V_1	. . . . .	

Отсутствие новой точки после выполнения оператора VI_{a_4} может служить указанием для перехода к выполнению операторов V_{23} $VI_{a_{24}}$ (табл. 11, строка 4, рис. 326,*в*). В том случае, когда не найдена новая точка после выполнения оператора V_3, переходят к выполнению группы операторов V_{25} $VI_{a_{26}}$ II_{27} V_{28} $VI_{a_{29}}$ (табл. 11, строка 5, рис. 327,*а*).

Если при выполнении оператора V_1 точку не получили, переходят к выполнению варианта II решения (табл. 11, строка 6, рис. 325). И, наконец, если точку не получают при выполнении операторов V_1 и V_8, то необходимо переходить к выполнению участка подпрограммы, состоящего из операторов $VI_{б_{30}}$ $VI_{a_{31}}$ $VI_{б_{32}}$ $VI_{a_{33}}$ (табл. 11, строка 7, рис. 327,*б*).

Схемы счета для решения частных вариантов задачи, сведенные в табл. 11, могут быть объединены в одну схему счета, представляющую обобщенный алгоритм:



(12)

Для наглядности и выявления структуры построения обобщенного алгоритма для решения задачи по определению точки встречи прямой с плоскостью полученную схему счета целесообразно представить графически в виде "дерева", устанавливающего связь между исходными данными задачи и алгоритмом ее решения (рис. 328).

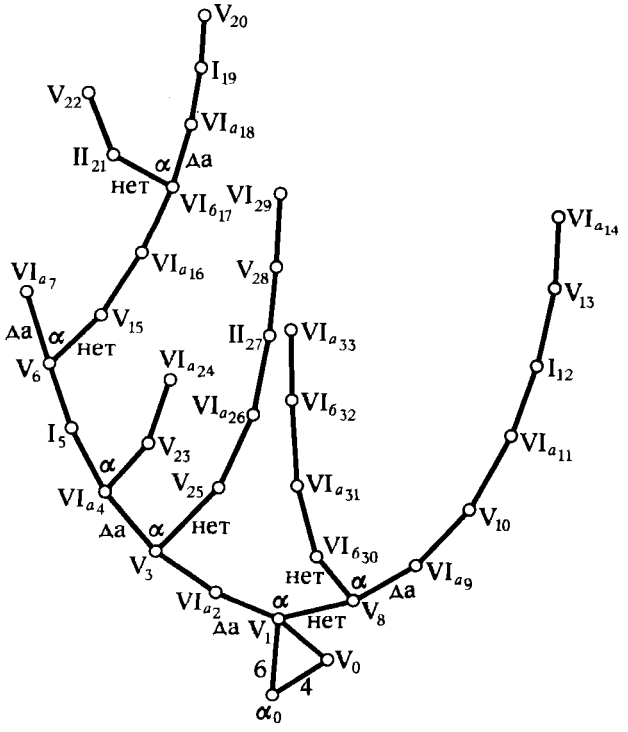


Рис. 328

Из приведенной схемы видно, что машина сможет самостоятельно выбрать правильный путь решения, если программа будет составлена так, чтобы она начала работать по "жесткой" подпрограмме (5) основного (вариант I) алгоритма. После выполнения оператора V_1 выполняется проба α, позволяющая выяснить, определяется ли точка в результате его выполнения*. Если да, то машина приступает к выполнению оператора VI_{a_2}, если нет, то ей следует выполнять оператор V_8. Аналогичные пробы выполняются и после операторов V_3, VI_{a_4}, V_6. По результатам этих проб машина либо продолжает решение по основной программе, если точка определена, либо приступает к выполнению другого участка программы, когда точка не получена. Выбор нового участка зависит от того, при выполнении какого оператора не получена новая точка пересечения.

Пользуясь схемой счета (12) обобщенного алгоритма, машина самостоятельно решает любую задачу по нахождению точки встречи прямой с плоскостью, независимо от характера расположения исходных данных и варианта задания плоскости **.

Нахождение точки встречи прямой с плоскостью является элементарной, но часто встречающейся задачей, входящей в состав алгоритма для решения более сложных задач, например, задач по определению линии сечения линейчатой поверхности плоскостью.

Обозначим через R схему счета (алгоритм) для решения задачи по нахождению точки встречи прямой с плоскостью. Тогда в общем случае алгоритм для решения задачи по определению линии сечения линейчатой поверхности плоскостью в символической форме может быть записан:

$$\Sigma_0(\alpha_i);\ \Sigma_1(P_i);\ \Sigma_2(S_i);\ \Sigma_3(RP_i), \qquad (13)$$

где $\Sigma_0(\alpha_i)$ — различные пробы, позволяющие выбрать правильный путь решения в зависимости от вида и характера расположения исходных данных; $\Sigma_1(P_i)$ — логическая последовательность элементарных операций для нахождения точки, через которую проходит прямолинейная образующая линейчатой поверхности; $\Sigma_2(S_i)$ — последовательность выполнения операторов I или II для нахождения проекций прямолинейных образующих; $\Sigma_3(RP_i)$ — вспомогательные операции.

Выполнение R для всех задач рассматриваемого типа одинаково, оно может меняться только в пределах вариантов задания и расположения секущей плоскости. При определении сечения линейчатой поверхности плоскостью задача сводится к многократному выполнению подпрограммы R — определению точки встречи прямой с плоскостью. Содержание (Σ_1, Σ_2, Σ_3) продиктовано задачей определения частных положений последовательности прямолинейных образующих линейчатой поверхности; очевидно, для различных поверхностей оно будет различным.

Проследим изменение Σ_1, Σ_2, Σ_3 в зависимости от вида линейчатой поверхности.

---

* На схеме (рис. 328) указаны также проба α_0 и оператор V_0, α_0 — проба на число геометрических образов, заданных на чертеже. Если $N = 4$, то прежде чем приступить к выполнению основной программы, необходимо определить координаты точки схода следов (оператор V_0).

**Исключение составляют два случая: если плоскость, проходящая через ось x, задана следами; если пересекающая плоскость прямая — профильная.

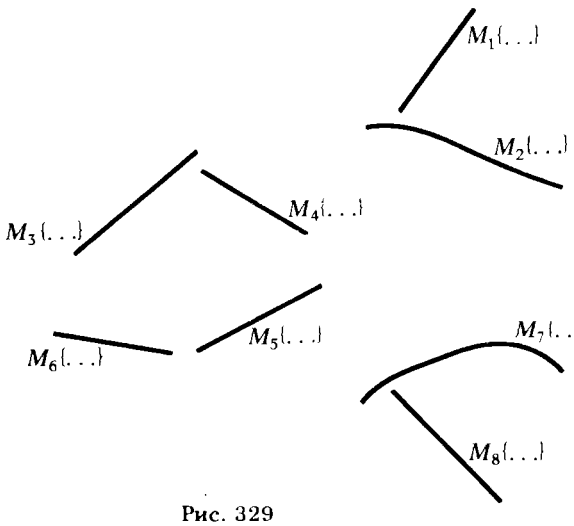


Рис. 329

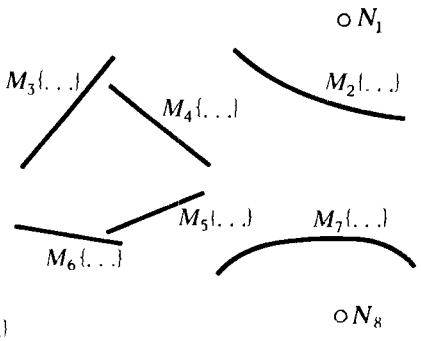


Рис. 330

ПРИМЕР 1. Определить сечение цилиндрической поверхности плоскостью (рис. 329).

Для определения линии сечения произвольной цилиндрической поверхности плоскостью может быть рекомендован следующий план машинного решения задачи:

1) из массива ячеек памяти, где хранятся координаты растрэлементов, принадлежащих горизонтальной проекции криволинейной направляющей (множества $M_7\ \{\ldots\}$), выбрать точку $1'_1$, имеющую минимальное значение x;

2) найти на фронтальной проекции криволинейной направляющей $M_2\{\ldots\}$ точку $1''_1$ с $x = x_{(.)}1'_1$;

3) определить уравнение прямой $n \ni 1'_1$ и $\|$ прямой, определяемой множеством растрэлементов $M_8\{\ldots\}$;

4) определить уравнение прямой $n''_1 \ni 1''_1$ и $\|$ прямой $M_1\{\ldots\}$;

5) найти точку встречи прямой n_1 с плоскостью α, заданной пересекающимися прямыми, представленными множествами $M_3\{\ldots\}$, $M_4\{\ldots\}$ и $M_5\{\ldots\}$, $M_6\{\ldots\}$.

Чтобы найти вторую точку, принадлежащую искомой линии сечения, нужно определить уравнения проекции следующей прямолинейной образующей поверхности. Для этого повторяем операции, предусмотренные пп. 1...4. Для определения положения второй (n'_2) и всех последующих $(n'_3, n'_4, \ldots, n'_n)$ проекций прямых берем на кривой $M_7\{\ldots\}$ следующую из записанных точку (растрэлемент). После того, как будут определены уравнения проекций n'_2 и n''_2 ($n'_2 \| n'_1$ и $n''_2 \| n''_1$), машина приступает к выполнению п. 5. Цикл из операций, предусмотренных в пп. 1... 5, выполняется до тех пор, пока на кривой $M_7\{\ldots\}$ не останется ни одной точки. Тогда в символике машинных операторов операции Σ_1, Σ_2, Σ_3 можно записать:

$$\Sigma_1(P_i) - \Pi\ \mathrm{III}\ \mathrm{X}\ \mathrm{I}\ \mathrm{V};^* \qquad (14)$$

$$\Sigma_2(S_i) - \mathrm{II}\ \mathrm{II}; \qquad (15)$$

$$\Sigma_3(RP_i) - R. \qquad (16)$$

Схема счета программы для решения поставленной задачи примет вид

$$\Pi_1 \mathrm{III}_2 \mathrm{X}_3 \mathrm{I}_4 \mathrm{V}_5 \mathrm{II}_6 \mathrm{II}_7 \mathrm{R}_8. \qquad (17)$$

Цикл $\Pi \ldots R_8$ выполняется до тех пор, пока в $M_7\{\ldots\}$ не останется ни одной точки.

ПРИМЕР 2. Определить сечение конической поверхности плоскостью (рис. 330)

Отличие решения этой задачи от предыдущей будет состоять лишь в том, что выражение (15) может быть записано $\Sigma_2(S_i) - \mathrm{I\ I}$ и схема счета примет вид

$$\Pi_1 \mathrm{III}_2 \mathrm{X}_3 \mathrm{I}_4 \mathrm{V}_5 \mathrm{I}_6 \mathrm{I}_7 R_8. \qquad (18)$$

ПРИМЕР 3. Определить сечение однополостного гиперболоида плоскостью (рис. 331).

Для определения характера и последовательности выполнения операторов, входящих в Σ_1, Σ_2 и Σ_3, воспользуемся свойством направляющих рассматриваемой поверхности, состоящим в том, что если спроецировать точку, взятую на одной из трех направляющих (принад-

---

* Π — операция обращения к первой записанной в $M_7\{\ldots\}$ массиве точке.

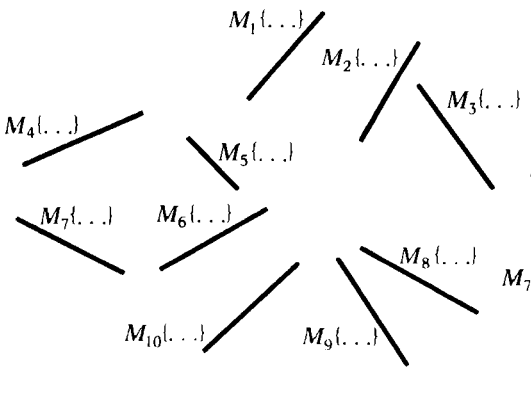


Рис. 331

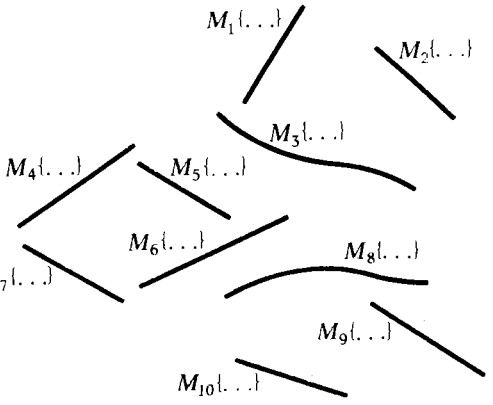


Рис. 332

лежащих одному семейству), на плоскость α в направлении двух других направляющих и полученные точки соединить с соответствующими проекциями (следами) двух других направляющих, то полученные прямые будут принадлежать второму семейству образующих.

Точки пересечения соответственных прямых, принадлежащих разным семействам, определяют кривую второго порядка — сечение однополосного гиперболоида плоскостью α. В этом случае выражения (14), (15) и (16) примут вид

$$\Sigma_1(P_i) - \text{П III V I V};$$

$$\Sigma_2(S_i) - \text{П II II II};$$

$$\Sigma_3(RP_i) - \text{R R R R I I V III V}$$

для первого цикла, а для всех последующих циклов

$$\Sigma_3(RP_i) - \text{R R I I V III V}.$$

Схема счета программы запишется в виде

$$\text{П}_1\text{III}_2\text{V}_3\text{I}_4\text{V}_5\text{II}_6\text{II}_7\text{II}_8\text{II}_9R_{10}R_{11}R_{12}R_{13}\text{I}_{14}\text{I}_{15}\text{V}_{16}\text{III}_{17}$$

$$\text{V}_{18}\text{П}_{19}\text{III}_{20}\text{V}_{21}\text{II}_{22}\text{II}_{23}\text{II}_{24}\text{II}_{25}R_{26}R_{27}\text{I}_{28}\text{I}_{29}\text{V}_{30}\text{III}_{31}\text{V}_{32}.$$

(19)

ПРИМЕР 4. Определить сечение коноида плоскостью (рис. 332).

Решение этой задачи аналогично предыдущей с той лишь разницей, что точки следует брать на криволинейной направляющей и проецировать их на секущую плоскость в направлении прямолинейной направляющей коноида.

Схема счета в этом случае примет вид

$$\text{П}_1\text{III}_2\text{X}_3\text{I}_4\text{V}_5\text{II}_6\text{II}_7\text{II}_8\text{II}_9R_{10}R_{11}R_{12}R_{13}\text{I}_{14}\text{I}_{15}\text{V}_{16}\text{III}_{17}\text{V}_{18}$$

$$\text{П}_{19}\text{III}_{20}\text{X}_{21}\text{I}_{22}\text{V}_{23}\text{II}_{24}\text{II}_{25}\text{II}_{26}\text{II}_{27}R_{28}R_{29}\text{I}_{30}\text{I}_{31}\text{V}_{32}\text{III}_{33}\text{V}_{34}.$$

(20)

Чтобы машина самостоятельно (без участия человека) могла выбрать правильный путь решения задачи, ей должна быть известна поверхность, линию пересечения с которой требуется определить. Признаками, с помощью которых машина сможет "распознать" по эпюру Монжа, с какой поверхностью она имеет дело при решении задачи, служат:

1) присутствие точечного образа;
2) отсутствие криволинейных образов;
3) число криволинейных образов.

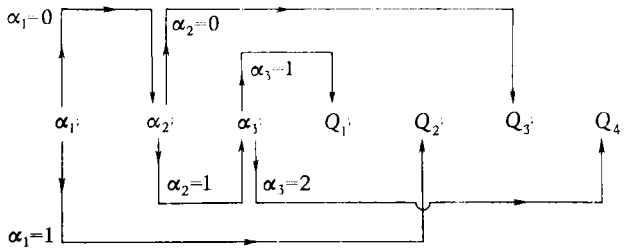
Эти признаки положены в основу проб, составляющих содержание $\Sigma_0(\alpha_i)$ [из выражения (13)], которые должна выполнить машина для выбора нужного варианта решения.

Обозначим:

а) схемы счета (17) $-Q_1$; (18) $-Q_2$; (19) $-Q_3$; (20) $-Q_4$;

б) пробы: α_1 — проба на наличие точечного образа, если точечный образ есть ($\alpha_1 = 1$), то выполняется массив Q_2, если нет ($\alpha_1 = 0$), то следует переходить к пробе α_2; α_2 — проба на наличие криволинейного образа, если такой образ есть ($\alpha_2 = 1$), то необходимо выполнять пробу α_3, если нет ($\alpha_2 = 0$), то машина должна приступить к выполнению массива Q_3; α_3 — проба на число криволинейных образов, если образ один ($\alpha_3 = 1$), то выполняется массив Q_1,если два ($\alpha_3 = 2$), то машина приступает к выполнению массива Q_4.

Вариант задания секущей плоскости не влияет на характер поиска, так как при составлении признаков прямолинейные образы не учитывались. В общем виде схема счета программы для решения рассмотренных задач примет вид



§ 76. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО МАШИННОГО АЛГОРИТМА

Решение одной и той же задачи может быть осуществлено различными графическими способами, каждому из которых соответствует свой машинный алгоритм. Возникает вопрос, какому из них отдать предпочтение? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно сопоставить между собой "схемы счета" сравниваемых алгоритмов.

Сравнение осуществляется путем подсчета суммарного числа машинных операций (команд), которые необходимо выполнить для реализации алгоритма на ЭЦВМ. С этой целью в графе 3 табл. 10 указано число команд, которые должна выполнить машина для реализации перечисленных в таблице стандартных операторов.

Поясним сказанное на примере: пусть требуется определить расстояние от точки A до плоскости α (рис. 333).

Эта задача может быть решена различными способами, в том числе и теми, что представлены на рис. 334 и 335. В первом случае решение осуществляется без применения способов преобразования (рис. 334).

Во втором плоскость общего положения α переведена во фронтально проецирующее положение с помощью перемещения $\| \pi_1$ (рис. 335). Выясним, какое решение требует меньшей затраты машинного времени. Для этого составим схемы счета для каждого варианта решения.

Схема счета, отражающая логику графического решения задачи, без применения способов преобразования будет иметь вид

$$\underset{(1)}{\mathrm{III}_1}\ \underset{(2)}{\mathrm{V}_2}\ \underset{(3)}{\mathrm{VI}_{a_3}}\ \underset{(4)}{\mathrm{V}_4}\ \underset{(5)}{\mathrm{VI}_{a_5}}\ \underset{(6)}{\mathrm{I}_6}\ \underset{(7)}{\mathrm{III}_7}\ \mathrm{V}_8\ \underset{(8)}{\mathrm{VI}_{a_9}}\ \mathrm{II}_{10}\ \mathrm{VI}_{б_{11}}\ \mathrm{VII}_{12}\ \mathrm{III}_{13}\ \mathrm{IX}_{a_{14}}\ \mathrm{VII}_{15}.$$

Схема счета решения этой же задачи с применением способа параллельного перемещения может быть записана:

$$\underset{(1)}{\mathrm{VI}_{a_1}}\ \underset{(2)}{\mathrm{III}_2}\ \underset{(3)}{\mathrm{V}_3}\ \underset{(4)}{\mathrm{VII}_4}\ \underset{(5)}{\mathrm{IX}_{a_5}}\ \underset{(6)}{\mathrm{III}_6}\ \underset{(7)}{\mathrm{II}_7}\ \underset{(8)}{\mathrm{V}_8}\ \mathrm{I}_9\ \mathrm{III}_{10}\ \mathrm{V}_{11}\ \mathrm{VII}_{12}\ \mathrm{IX}_{a_{13}}\ \mathrm{III}_{14}\ \mathrm{II}_{15}\ \mathrm{V}_{16}\ \mathrm{III}_{17}\ \mathrm{V}_{18}\ \mathrm{VII}_{19}.$$

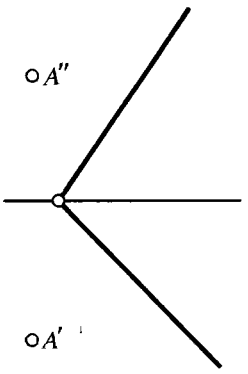


Рис. 333

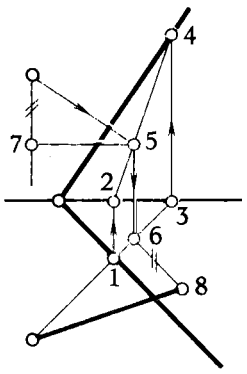


Рис. 334

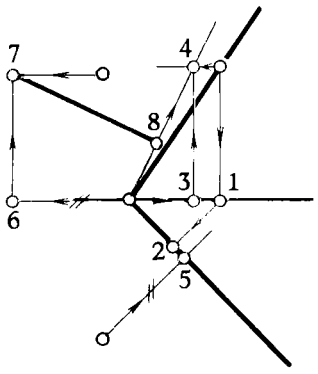


Рис. 335

Подсчитав число команд, которые необходимо выполнить для каждого оператора, и суммировав их, мы получим: для первого варианта — 195 команд, для второго варианта — 278. Если условно принять, что время выполнения одной команды одинаково для различных команд, то можно сделать вывод, что первый вариант решения лучше. Машина затратит на 30% меньше времени, чем решая эту же задачу по второму варианту. Что касается точности решения, то в обоих случаях она будет одинаковой (определяется точностью задания исходных данных).

Уместно отметить, что, переходя на машинный метод решения задач, мы обнаруживаем, что не все те способы решения, которым следовало отдать предпочтение при решении задачи "вручную", оказываются удобными для машины. И наоборот, громоздкий, нерациональный способ, если он выполняется с помощью линейки и циркуля, может дать весьма рациональное машинное решение, т. е., переходя на машинный способ решения, образно говоря, необходимо произвести "переоценку ценностей".

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите основные вопросы, которые должны быть решены для осуществления автоматизации процесса графического решения задач.

2. Нарисуйте структурную схему установки, включающую ЭЦВМ, которая обеспечивает комплексную автоматизацию процесса графического решения задач, и дайте объяснение назначения всех элементов, входящих в схему.

3. Что подразумевается под термином" машинное чтение чертежа"?

4. Каким образом осуществляется выявление растрэлементов, принадлежащих линии чертежа, и как определяется значение координат этих растрэлементов?

5. Каким требованиям должен отвечать машинный метод решения задач, исходные данные которых представлены в графической форме?

6. В чем сущность машинного метода решения задач?

7. Что такое стандартный оператор?

8. Что такое схема счета и что служит основанием для ее составления?

9. Составьте схему счета для машинного решения задач:

а) определить расстояние между двумя плоскостями;

б) определить точки встречи прямой с поверхностью прямого конуса, цилиндра, сферы;

в) найти линию пересечения поверхностей сферы и кругового цилиндра, ось которого не проходит через центр сферы.

10. Как определяется рациональный машинный алгоритм?

11. Определите, какой способ решения задачи по нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми будет наиболее целесообразным для машины:

а) без способов преобразования;

б) с использованием способа замены плоскостей проекций;

в) способом параллельного перемещения.